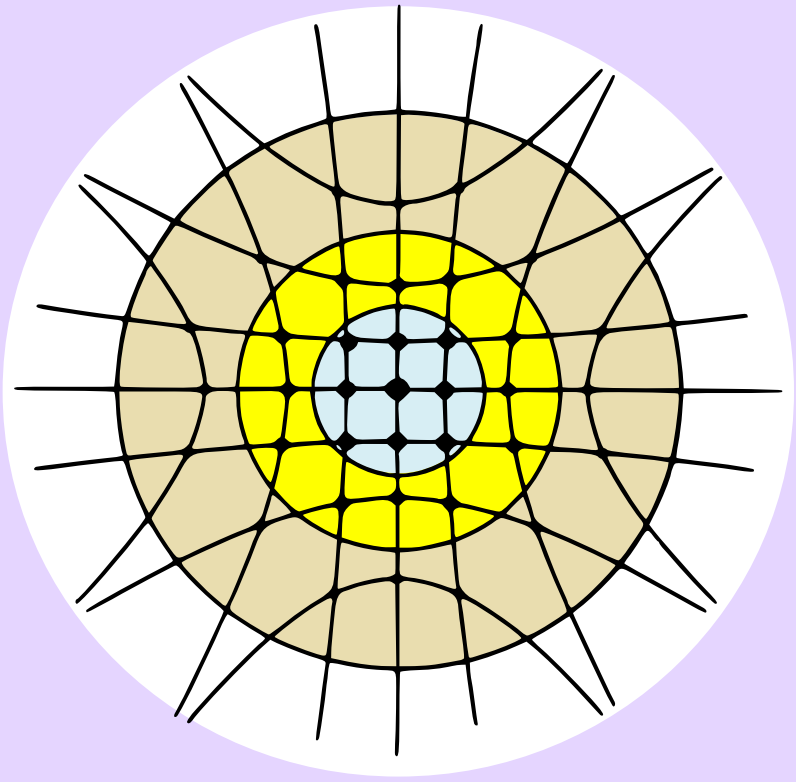
E. Chpolski

PHYSIQUE ATOMIQUE

Tome 1



Éditions Mir Moscou

Э. В. ШПОЛЬСКИЙ

АТОМНАЯ ФИЗИКА

ТОМ I

ВВЕДЕНИЕ В АТОМНУЮ ФИЗИКУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», МОСКВА

E. CHPOLSKI

PHYSIQUE ATOMIQUE

tome I

Introduction à la physique atomique

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe
par OLEG PARTCHEVSKI

На французском языке

© Издательство « Наука », 1974, с изменениями

© Traduction française Editions Mir 1977

PRÉFACE

La physique atomique s'appuie aujourd'hui sur des fondements solides de la physique dite « classique ». C'est une veine tentative que de vouloir comprendre quelque chose à la mécanique quantique sans de connaissances suffisantes sur la mécanique de Newton et de Lagrange ou de s'orienter dans les problèmes de théorie quantique de la radiation sans connaître la théorie électromagnétique de Maxwell et de Lorentz. En outre, les méthodes mathématiques de la mécanique quantique utilisent largement les techniques élaborées pour la résolution des problèmes de la théorie des oscillations et des autres problèmes de la physique mathématique classique. Néanmoins, quoique la voie à suivre pour une formation sérieuse dans le domaine de la physique atomique soit ainsi tracée, on est obligé de tenir compte de ce que l'enseignement de la physique théorique et notamment de la mécanique théorique est prodigué en général en attachant à ces exigences de la physique atomique une attention pour au moins insuffisante. Pour libérer au maximum le lecteur de l'obligation de rechercher l'information nécessaire dans un grand nombre d'ouvrages où, d'ailleurs, elle se trouve souvent sous une forme inadaptée au cas concerné, on a inséré dans ce livre un chapitre récapitulatif assez étendu « Structure de l'atome et physique classique ». L'auteur pense que pour un grand nombre de lecteurs ce chapitre sera fort utile, quant aux autres ils y puiseront l'information nécessaire. En outre dans des notes au bas de la page le lecteur est renvoyé aux ouvrages de base où une plus ample information pourra être trouvée sur les différentes questions dont la connaissance est nécessaire pour la bonne compréhension du texte.

Une mention spéciale est exigée par une autre particularité du livre qui consiste dans la grande attention apportée à l'expérience. L'auteur ne se limite jamais à un énoncé sommaire des données de l'expérience, comme on le fait habituellement dans les ouvrages de physique théorique, mais décrit la façon dont ces données ont été obtenues en tâchant chaque fois d'indiquer l'ordre de grandeurs concernées.

On s'est heurté à des grandes difficultés dans le choix et la répartition du matériel. Comme on le sait, parmi les spécialistes il n'y a pas d'unanimité sur la nécessité de se soumettre dans l'exposé de la physique atomique à la suite historique des événements. Certains théoriciens se tiennent au point de vue qu'il est rationnel d'exposer la mécanique quantique en renonçant

complètement à la suite historique et de suivre une voie logique en adoptant une ligne plus ou moins dogmatique. Tout en ne considérant pas qu'il est nécessaire d'apporter dans un cours tous les détails du développement de la théorie et notamment ceux ayant perdu aujourd'hui leur intérêt, l'auteur estime qu'en rompant complètement avec l'histoire de la science on commettrait une faute tout au moins de nature pédagogique. C'est pourquoi dans le chapitre VI consacré au rayonnement du corps noir on explique les causes de la « catastrophe » de la physique classique à la limite des XIX^{e} et XX^{e} ss et dans le chapitre VIII on fournit un court exposé de la théorie de Bohr en indiquant pourquoi cette théorie s'est avérée non justifiée tout en restant (avec le modèle vectoriel de l'atome) d'un appoint important pour l'expérimentateur. L'auteur estime que c'est la seule voie facilitant au lecteur l'assimilation des notions de la mécanique quantique.

De nombreux problèmes de la physique atomique exigent nécessairement pour leur exposé l'utilisation d'un appareil mathématique fastidieux. Rompant avec l'habitude prise d'omettre les calculs l'auteur fournit un grand nombre de démonstrations de façon assez détaillée. Cela entraîne souvent des répétitions des mêmes bouts de phrase, du type « portons dans », « dérivons », etc., qui alourdissent le texte. Mais selon l'auteur l'intérêt du lecteur exige que l'on passe outre à ces exigences de style.

Il va de soi qu'il n'est pas possible de donner tous les calculs et qu'en les faisant on commettrait une faute pédagogique grave. Le lecteur a suffisamment d'efforts à fournir et les étudiants des cours supérieurs ont déjà l'expérience du travail sur ce genre de livres sachant que ces ouvrages doivent être lus la plume à la main. D'ailleurs ce n'est pas un secret que dans les études de la physique quantique la grande difficulté pour un novice ce ne sont pas les mathématiques, mais la nature même du sujet : l'extrême particularité des lois des phénomènes se déroulant dans les systèmes microscopiques, leur nature insolite et l'impossibilité de représentation concrète. Dans le but d'aider le lecteur l'auteur a fait tout son possible : il présenta des exemples concrets, fit appel à des illustrations et à des données numériques et n'a pour ainsi dire pas pesé sa peine pour rendre l'exposé aussi concis que possible étant donné la nature du sujet ainsi que les moyens dont il disposait.

Deux traits particuliers du livre sont encore à souligner. Tout d'abord à côté de la constante de Planck h, là où il s'est avéré nécessaire on a introduit la constante $\hbar = h/2\pi$, en second lieu, malgré l'utilisation actuelle du système d'unités international S. I. dans la plupart des domaines de la physique, on a conservé ici le système C. G. S. (plus précisément, le système d'unités de Gauss). La raison en est que pour la mécanique quantique le système S. I. est non seulement inutile, mais très incommode. Ceci a été spécialement souligné par A. Sommerfeld qui fut l'initiateur de l'introduction du système international dans l'électrodynamique.

Le premier volume de ce livre est essentiellement consacré aux fondements expérimentaux de la théorie nucléaire de l'atome et de la physique quantique. Il s'achève par l'examen des propriétés ondulatoires de la

matière, le dernier chapitre étant réservé à l'équation de Schrödinger et à ses plus simples applications — presque exclusivement aux problèmes unidimensionnels. Il constitue ainsi un tout entier pouvant présenter un intérêt par lui-même pour certains lecteurs.

Le livre a été réédité six fais en russe, ce qui a permis à l'auteur de vérifier par l'enseignement du sujet dans deux établissements d'études supérieures l'accessibilité de l'exposé et la logique de la construction du livre. Il remercie particulièrement ceux des lecteurs qui lui ont envoyé leurs remarques et suggestions. Ils l'aidèrent dans la révision des éditions successives et lui permirent de corriger les fautes notées ainsi que de préciser l'exposé du texte. Il a en particulier fait plus de place aux expériences dont la description s'est avérée trop élémentaire dans la première édition. Enfin il a mis à jour l'ouvrage chaque fois qu'il a fallu tenir compte des nouveaux apports de la science.

L'auteur exprime sa reconnaissance à T. Bolotnikova de l'aide qu'elle lui a prodiguée lors de la préparation de la dernière édition du livre.

L'éditeur*)

*) Lors de l'envoi du manuscrit à la composition les Editions Mir ont appris avec grand regret la mort subite de E. Chpolski. Il n'a donc pas pu, comme il en avait l'intention, de préfacer lui-même son œuvre au lecteur français.

CHAPITRE I

ÉLECTRON, SA CHARGE ET SA MASSE

§ 1. Découverte de l'électron

La découverte de la structure discrète (discontinue) des charges électriques a été le corollaire des lois de l'électrolyse de Faraday. Rappelons le cheminement de la pensée qui amena cette découverte.

Suivant les lois de Faraday si on fait passer une même quantité d'électricité à travers des électrolytes différents, la quantité de la substance libérée dans les solutions d'ions monovalents sera proportionnelle au poids atomique des ions. Si la quantité d'électricité est telle qu'elle libère un atome-gramme d'ions déterminés (c'est-à-dire la quantité de grammes de la substance égale à son poids atomique, par exemple, 107,88 g d'argent, 35,45 g de chlore, etc.), alors, dans un autre électrolyte contenant des ions monovalents, elle libérera également un atome-gramme d'ions. Comme le courant électrique dans un électrolyte est conditionné par le déplacement des ions, on est en droit de formuler le fait constaté en affirmant qu'un atome-gramme d'ions monovalents transporte la même quantité d'électricité, quelle que soit la nature des ions. Cette quantité d'électricité dite nombre de Faraday F est égale à 96 491 coulombs ou $2{,}892 \cdot 10^{14}$ unités électrostatiques absolues. Si maintenant on fait passer le courant à travers des solutions d'ions bivalents, la charge d'un faraday est alors véhiculée par une moitié d'atome-gramme de l'ion bivalent et dans le cas d'électrolytes trivalents, par un tiers d'atome-gramme ou, autrement dit, un atome-gramme d'ions bivalents transporte une charge faraday double et un atome-gramme d'ions trivalents, une charge triple. D'autre part, puisque suivant la loi d'Avogadro un atome-gramme de substance quelconque contient toujours la même quantité de particules N et comme on est fondé de supposer que toute la charge transportée par un atome-gramme se répartit régulièrement sur toutes les N particules, la charge transportée par chaque ion monovalent sera une quantité bien déterminée e égale à

$$e=F/N, \tag{1.1}$$

la charge transportée par chaque ion bivalent sera

$$2e=2F/N,$$

et, en général, un ion de valence k transporte

$$ke=kF/N.$$

On voit ainsi que les différents ions peuvent porter des charges égales à e, $2e$, $3e$, ..., mais on ne rencontre pas d'ions dont la charge soit égale à $1{,}5e$ ou $2{,}5e$. Il s'en dégage une conclusion particulièrement bien formulée par Helmholtz dans son discours prononcé en l'honneur de Faraday : « Si nous admettons l'existence des atomes d'éléments, nous ne pouvons ignorer la conséquence suivante que l'électricité, tant positive que négative, se subdivise en des quantités élémentaires se comportant comme des atomes d'électricité. »

Un rôle particulièrement important dans la compréhension de la nature atomique de l'électricité revient à l'étude de la traversée des gaz par l'électricité. Et, en particulier, l'observation des décharges dans des gaz raréfiés et l'étude des propriétés des rayons cathodiques émis dans ce cas montrèrent que les atomes d'électricité négative peuvent facilement être obtenus à l'état libre non lié aux atomes habituels de la substance. Ces atomes d'électricité négative ont reçu le nom d'électrons qui s'est historiquement conservé.

§ 2. Détermination de la charge de l'électron

La démonstration directe de la nature discrète des charges électriques et les premières déterminations précises de la valeur de la charge de l'électron par la mesure des charges des particules isolées ont été réalisées par Millikan en 1911. La détermination de la charge des électrons libérés sous l'action de la lumière (effet photo-électrique) suivant une méthode rappelant celle de Millikan fut réalisée en 1918 par A. Ioffé.

La méthode expérimentale utilisée par Millikan consista en des mesures directes de la charge de petites gouttelettes d'huile. Supposons qu'une telle gouttelette se trouve entre deux plateaux d'un condensateur placé horizontalement. En l'absence du champ entre les plateaux du condensateur, la gouttelette tombe abandonnée à elle-même. Comme ses dimensions sont petites, le mouvement sera uniforme, son poids mg étant équilibré par la force de résistance de l'air égale, d'après la loi de Stokes, à

$$F = 6\pi\eta a v_g, \tag{2.1}$$

où v_g est la vitesse de chute, η le coefficient de frottement interne de l'air et a le rayon de la gouttelette. La condition que

$$mg = 6\pi\eta a v_g \tag{2.2}$$

autorise le calcul du rayon de la gouttelette. En effet, désignons par σ la densité de la substance de la gouttelette et par ϱ la densité de l'air. Comme sur une bille de poids $mg = \frac{4}{3}\pi a^3 \sigma g$, en mouvement de chute dans l'air, agit selon le principe d'Archimède une autre force dirigée vers le haut et égale à $\frac{4}{3}\pi a^3 \varrho g$, on peut récrire l'égalité (2.2) sous la forme

$$\frac{4}{3}\pi a^3(\sigma - \varrho)g = 6\pi\eta a v_g,$$

d'où

$$a=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\eta^{1/2}v_g^{1/2}}{(\sigma-\varrho)^{1/2}g^{1/2}}. \tag{2.3}$$

Supposons maintenant qu'aux armatures du condensateur est appliquée une différence de potentiel dont la grandeur et la direction sont choisies de façon que la gouttelette sous l'action du champ électrique monte vers le haut. Désignant par v_E la vitesse de cette montée qui comme la chute sera uniforme, on peut écrire

$$\mathcal{E}e-mg=6\pi\eta a v_E, \tag{2.4}$$

où $\mathcal{E}$ est l'intensité du champ à l'intérieur du condensateur. De (2.2) et de (2.4) on obtient

$$e=\frac{6\pi\eta a}{\mathcal{E}}(v_g+v_E),$$

ou, en remplaçant le rayon a qui ne peut être directement mesuré par son expression (2.3) au moyen de v_g,

$$e=9\sqrt{2}\,\frac{\pi v_g^{1/2}\eta^{3/2}}{\mathcal{E}(\sigma-\varrho)^{1/2}g^{1/2}}(v_g+v_E). \tag{2.5}$$

En ionisant l'air entre les armatures du condensateur (par exemple, au moyen des rayons X) on peut modifier la charge de la gouttelette. Si dans ce cas l'intensité du champ ne varie pas, la vitesse de la gouttelette changera et deviendra égale à v'_E; on a alors

$$e_1=9\sqrt{2}\,\frac{\pi v_g^{1/2}\eta^{3/2}}{\mathcal{E}(\sigma-\varrho)^{1/2}g^{1/2}}(v_g+v'_E).$$

En combinant cette expression avec (2.5) on trouve

$$\Delta e=e-e_1=9\sqrt{2}\,\frac{\pi v_g^{1/2}\eta^{3/2}}{\mathcal{E}(\sigma-\varrho)^{1/2}g^{1/2}}(v_F-v'_E). \tag{2.6}$$

En modifiant plusieurs fois la charge on peut avec la même gouttelette effectuer beaucoup de mesures.

§ 3. Réalisation pratique de l'expérience de Millikan

Des plateaux P_1 et P_2 soigneusement polis (fig. 1) sont maintenus à une distance fixée, très parallèlement l'un à l'autre, au moyen d'un corps isolant JJ. Le plateau supérieur P_1 a en son milieu une ouverture O par laquelle pénètre à l'intérieur du condensateur la gouttelette d'huile testée qu'on disperse dans le cylindre C au moyen d'un pulvérisateur. On sait que lorsqu'un liquide est dispersé, on obtient des gouttelettes électriquement chargées et, par suite, ce sont des gouttelettes déjà chargées qui pénètrent dans le condensateur. Par la fenêtre F_1 la gouttelette est habituellement éclairée par la lumière d'un arc; les observations sont faites au moyen

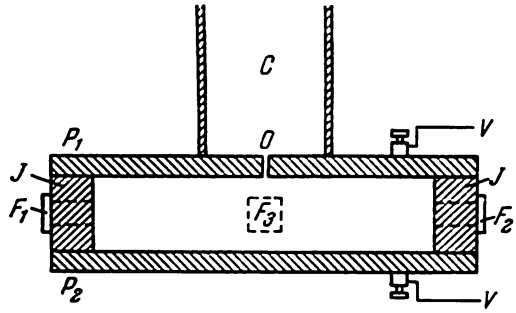


Fig. 1. Schéma du condensateur de Millikan

d'un microscope par la fenêtre F_3. Comme les observations sont menées dans la direction perpendiculaire au faisceau lumineux, la gouttelette tombant dans le champ visuel du microscope apparaît comme une étoile brillante sur fond noir (comme dans un ultramicroscope). Le faisceau lumineux est évacué par la fenêtre F_2, car l'absorption de la lumière par les parois de la chambre y provoquerait un échauffement irrégulier et des courants d'air gênant l'observation. Par la même fenêtre F_2 peuvent pénétrer à l'intérieur du condensateur des rayons X provoquant l'ionisation de l'air et permettant ainsi de modifier la charge de la gouttelette. Le schéma de principe de l'installation de Millikan est représenté à la figure 2.

La mesure de la vitesse de chute ou de montée de la gouttelette s'effectuait par la détermination de l'intervalle de temps nécessaire au passage entre deux fils disposés dans le plan focal du microscope; on choisissait comme unité de mesure de la vitesse la grandeur inverse de cet intervalle de temps. Au tableau I on a donné quelques résultats de ces mesures de Millikan.

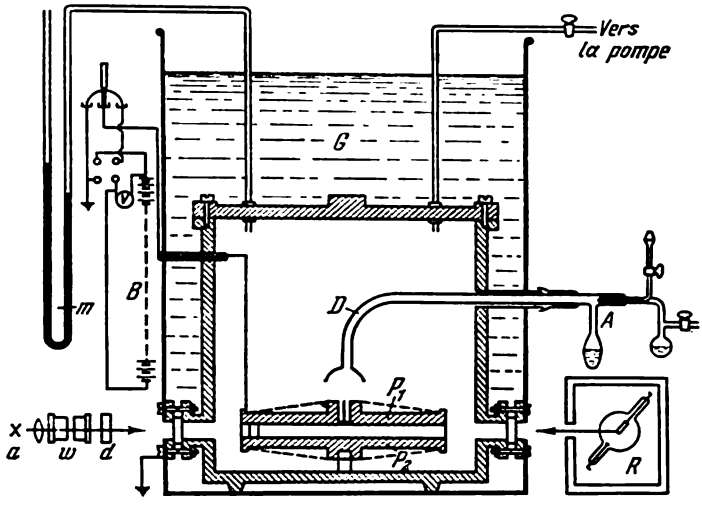


Fig. 2. Schéma de l'installation de Millikan : *a* — source de lumière; *w*, *d* — filtres absorbant les rayons thermiques; P_1 P_2 — condensateur; *AD* — pulvérisateur pour l'obtention des gouttelettes d'huile; *G* — bain d'huile (thermostat); *B* — batterie; *m* — manomètre; *R* — tube à rayons X

Selon (2.6) la variation de la grandeur de la charge à la recharge devait être proportionnelle à la différence de vitesses $v_E - v'_E$. Si cette différence se présente toujours comme un multiple entier d'une même quantité, on peut affirmer que les variations de la charge ne sont pas continues mais s'effectuent par des portions finies. Dans les colonnes 4 et 5 du tableau on voit qu'il en est en réalité ainsi : à quelque unités de la cinquième décimale près la charge varie de 6, 7, 1, ... unités, l'unité de recharge (cinquième colonne du tableau) conservant une valeur constante (dans les limites de l'erreur de l'expérience).

Tableau I

Temps de montée dans un champ électrique t_E, s	L'inverse du temps de montée dans un champ électrique $\frac{1}{t_E}$	Différence des temps inverses de montée après recharge $\frac{1}{t'_E} - \frac{1}{t_E}$	Nombre d'unités de recharge n'	Valeur relative de l'unité de recharge $\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{t'_E} - \frac{1}{t_E}\right)$	Somme des temps inverses de chute et de montée $\frac{1}{t_g^{*)}} + \frac{1}{t_E}$	Nombre d'unités de charge $n \pm n'$	Valeur relative de l'unité de charge $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_E}\right)$
80,708	0,012 36				0,096 55	18	0,005 366
		0,032 34	6	0,005 390		+6	
22,375	0,044 70				0,128 87	24	0,005 371
		0,037 51	7	0,005 358		−7	
140,565	0,007 19				0,091 38	17	0,005 375
		0,005 348	1	0,005 348		+1	
79,600	0,012 54				0,096 73	18	0,005 374
		0,016 16	3	0,005 387		+3	
34,785	0,028 70				0,112 89	21	0,005 376

*) La moyenne $t_g = 11{,}880$ où t_g est le temps de chute dans un champ de gravitation.

La formule (2.5) montre que la valeur absolue de la charge de la goutte doit être proportionnelle à la somme $v_g + v_E$ (sixième colonne du tableau). Si cette somme est un multiple d'une même quantité, cela signifie que la charge est la somme d'unités discrètes. Les colonnes 7 et 8 du tableau montrent qu'il en est ainsi en réalité. Enfin, en comparant les colonnes 5 et 8 on voit que l'unité de recharge et l'unité de charge coïncident toujours à quelques unités de la cinquième décimale près. Ainsi, l'analyse du tableau fournit une preuve exhaustive et directe de la nature discrète de la charge électrique, c'est-à-dire de l'atomicité des phénomènes électriques.

La détermination précise de la valeur absolue de la charge de l'électron exige que les nombres obtenus à l'aide de la formule (2.5) soient sensiblement corrigés. En effet, il est apparu que quand on détermine la charge de gouttelettes de rayons différents on constate qu'avec la diminution de ces derniers on obtient au début des valeurs identiques de e, mais que pour des gouttelettes très petites e croît rapidement avec la décroissance du rayon.

La charge de l'électron semble donc dénuée de valeur constante et paraît dépendre de la dimension des gouttelettes.

Millikan expliqua ce résultat non conforme par le fait que la loi de Stokes ne peut être appliquée au mouvement de gouttelettes très fines. La loi de Stokes a en effet été dégagée avec la supposition que le corps en mouvement avait une forme sphérique et que le milieu où le mouvement a lieu était continu. Cette dernière supposition est manifestement en défaut quand le mouvement concerne des gouttelettes de dimensions comparables à la longueur moyenne du libre parcours des molécules gazeuses. Le rapport λ/a du libre parcours moyen au rayon de la gouttelette peut donc servir de critère de l'applicabilité ou de la non-applicabilité de la loi de Stokes : si ce rapport est faible ($\lambda/a \ll 1$), la loi de Stokes est applicable, dans le cas contraire, la loi de Stokes ne peut être utilisée.

Afin de tenir compte de la dérogation à la loi de Stokes on a proposé d'utiliser pour des gouttelettes très fines au lieu de (2.1) l'expression corrigée de la force de Stokes suivante :

$$F = \frac{6\pi\eta a v_g}{1 + A\dfrac{\lambda}{a}}, \tag{3.1}$$

où A est une constante. Car cette expression quand $A\dfrac{\lambda}{a} \to 0$ se transforme en la formule de Stokes (2.1). A l'aide de cette formule corrigée on obtient pour la valeur absolue de la charge au lieu de (2.5) l'expression suivante :

$$e_0 = \frac{9\sqrt{2}\pi\eta^{3/2} v_g^{1/2}}{(\sigma - \varrho)^{1/2} g^{1/2}} \frac{(v_E + v_g)}{\mathcal{E}\left(1 + A\dfrac{\lambda}{a}\right)^{3/2}}. \tag{3.2}$$

Pour obtenir la valeur absolue de la charge à l'aide de cette formule il faut connaître la constante A. Toutefois Millikan a montré comment on peut obtenir la valeur réelle de la charge sans recourir à cette constante.

En comparant les formules (2.5) et (3.2) il est facile de trouver le rapport de la quantité e_0 à la charge calculée sans correction :

$$\frac{e_0}{e} = \frac{1}{\left(1 + A\dfrac{\lambda}{a}\right)^{3/2}};$$

ou

$$e_0^{2/3}\left(1 + A\frac{\lambda}{a}\right) = e^{2/3}.$$

Mais la longueur du libre parcours λ est inversement proportionnelle à la pression du gaz p, d'où

$$e_0^{2/3}(1 + B/pa) = e^{2/3}, \tag{3.3}$$

où B est une nouvelle constante.

Si on modifie la pression p et pour chaque valeur de cette pression on calcule la valeur apparente de la charge e (sans correction), alors, selon la formule (3.3), entre $e^{2/3}$ et $1/pa$ il doit exister une dépendance linéaire.

Dans ce cas, comme le terme B/pa dans la formule (3.3) joue le rôle de faible correction, on peut choisir comme rayon a de la goutte la grandeur calculée selon la formule de Stokes non corrigée [voir formule (2.3)]. En réalité, la constante B, selon les mesures de Millikan, est égale à

$$B = 0{,}000\,617$$

si p est mesuré en centimètres de mercure et a en centimètres.

Sur la figure 3 où sur l'axe des abscisses on a porté les valeurs de $1/pa$ et sur l'axe des ordonnées les valeurs de $e^{2/3} \cdot 10^8$ on voit la dépendance linéaire décrétée par la formule (3.3).

En posant dans la formule (3.3) $1/p = 0$ ou $a = \infty$, c'est-à-dire en passant au cas limite quand la loi de Stokes s'applique (le rayon de la particule étant infiniment grand par rapport au libre parcours moyen), on trouvera que $e^{2/3} = e_0^{2/3}$ ou que $e = e_0$. Ainsi donc pour trouver la vraie valeur de la charge de l'électron e_0 il suffit d'extrapoler la droite jusqu'à son intersection avec l'axe des ordonnées.

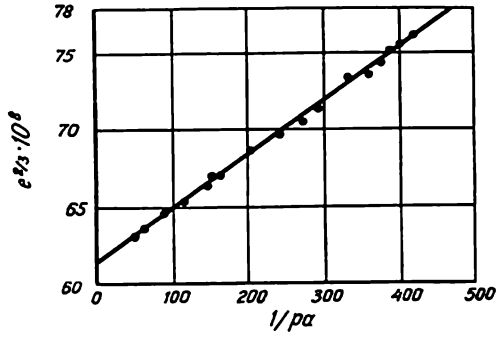


Fig. 3.

Sur la figure 4 on a tracé quatre droites construites de la même façon pour des particules de différentes natures : *I* — gouttelettes d'huile dans l'air, *II* — gouttelettes d'huile dans l'hydrogène, *III* — gouttelettes de mercure dans l'air, *IV* — particules de scories dans l'air. Les quatre droites coupent l'axe des ordonnées au même point : la charge de l'électron ne dépend ni de la nature de la particule, ni de la nature du gaz qui l'entoure.

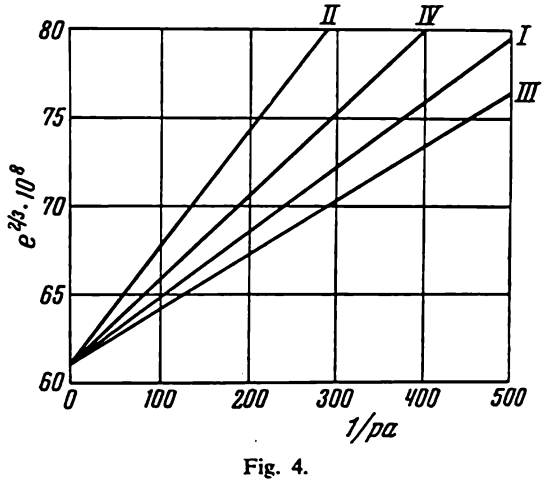


Fig. 4.

Les expériences de Millikan ont une grande importance de principe, car elles montrent avec évidence la nature atomique de la charge électrique. Quant à la valeur absolue de e, comme on le voit de la formule (3.2), la précision de sa détermination est essentiellement fonction de la précision de la détermination du coefficient de frottement interne de l'air η. La moyenne des mesures les plus précises de η donne pour η la valeur $\eta = 1832 \cdot 10^{-7}$. Avec cette valeur de η on obtient pour la charge de l'électron $e = 4{,}805 \cdot 10^{-10}$ U. E. S. C. G. S. Cependant la valeur la plus précise de la charge de l'électron est obtenue de façon indirecte, au moyen des mesures absolues de la longueur d'onde des rayons X (voir §§ 37 et 38).

Exercices : Quelle différence de potentiel faut-il appliquer aux armatures du condensateur distantes de 5 mm pour équilibrer la gouttelette d'huile portant une charge égale à 5 charges de l'électron? La masse de la gouttelette est égale à $3{,}119 \cdot 10^{-13}$ g. (*Réponse :* 19,2 V.)

2. Calculer la vitesse de chute dans l'air d'une gouttelette d'huile de densité 0,98 et de rayon 10^{-4} cm pour une pression de 76 cm Hg. Le coefficient de frottement interne de l'air est de 0,000 1832. (*Réponse :* 0,0117 cm/s.)

3. Une différence de potentiel de 31,5 V appliquée aux armatures d'un condensateur distantes de 1 cm oblige une gouttelette d'huile chargée de monter vers le haut avec une vitesse de 10 graduations en 10 s (50 graduations = 1 mm). La vitesse de chute sous l'effet de la pesanteur est de 10 graduations par 100 s. Le coefficient de frottement interne de l'air est de 0,000 18. La densité de la gouttelette est de 0,9. La pression de l'air est de 76 cm Hg. Combien d'électrons porte la gouttelette? (*Réponse :* un.)

§ 4. Mouvement de l'électron dans des champs électrique et magnétique

A côté de la charge la constante principale qui caractérise l'électron est sa masse. Cette masse est très petite, ce qui découle du fait que dans les observations du condensateur de Millikan la perte ou le gain de quelques électrons au cours de la recharge n'a aucune influence sensible sur la vitesse de chute de la particule et ceci quoique selon la formule (2.2) la vitesse de chute uniforme est proportionnelle à la masse. La masse inerte de l'électron se manifeste toutefois quand une accélération est communiquée à l'électron sous l'action d'un champ électrique ou magnétique. C'est pourquoi toutes les méthodes de détermination de la masse de l'électron sont basées sur l'étude de son mouvement dans des champs électrique et magnétique et notre premier objectif sera d'étudier l'influence de ces deux champs sur le mouvement de l'électron.

Comme on sait*) la force s'exerçant de la part du champ électromagnétique sur une particule de charge e (force dite de Lorentz) s'exprime par la formule

$$\mathbf{F} = e\mathscr{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \wedge \mathscr{H}). \tag{4.1}$$

*) Voir, par exemple, le livre de I. Tamm, *Principes de la théorie de l'électricité*, Ed. « Naouka », Moscou, 1966 (en russe).

Le premier terme représente ici la force agissant de la part du champ électrique et le second, de la part du champ magnétique*). On suppose que la charge e est exprimée dans le système des unités électrostatiques. Les raisonnements ultérieurs s'appliqueront à la particule chargée positivement, toutefois ils sont également justes pour le mouvement des particules chargées négativement. Il faut seulement se rappeler que, dans le cas d'un électron, ce dernier porte une charge négative et que la direction de sa déviation est toujours opposée à celle de la particule chargée positivement.

Selon le principe fondamental de la dynamique la force $\mathbf{F}$ est égale au produit de la masse m par l'accélération $\dot{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{F}=m\dot{\mathbf{v}}. \tag{4.1'}$$

En égalant les seconds membres de (4.1) et de (4.1') on obtient

$$m\dot{\mathbf{v}}=e\mathcal{E}+\frac{e}{c}(\mathbf{v}\wedge\mathcal{H}). \tag{4.2}$$

Examinons maintenant séparément l'action des champs électrique et magnétique. En posant dans (4.2) $\mathcal{E}=0$ on a

$$m\dot{\mathbf{v}}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\wedge\mathcal{H}). \tag{4.3}$$

Fort souvent en examinant le mouvement de la charge dans un champ magnétique on se sert du système d'unités électromagnétiques. Alors (4.3) prend la forme

$$m\dot{\mathbf{v}}=e(\mathbf{v}\wedge\mathcal{H}),$$

d'où $$\dot{\mathbf{v}}=\frac{e}{m}(\mathbf{v}\wedge\mathcal{H}). \tag{4.4}$$

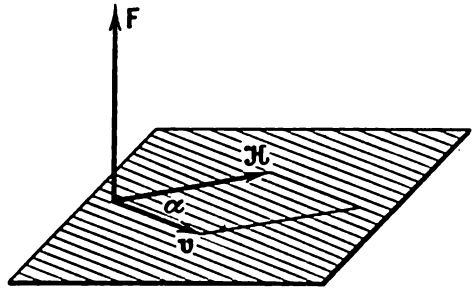


Fig. 5.

Comme la force s'exerçant de la part du champ magnétique s'exprime par un produit vectoriel, les trois vecteurs $\mathcal{H}$, e, $\mathbf{F}$ forment un système direct (fig. 5).

L'équation vectorielle (4.4) est équivalente aux trois équations scalaires suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=\frac{e}{m}(v_y\mathcal{H}_z-v_z\mathcal{H}_y),\\ \frac{dv_y}{dt}&=\frac{e}{m}(v_z\mathcal{H}_x-v_x\mathcal{H}_z),\\ \frac{dv_z}{dt}&=\frac{e}{m}(v_x\mathcal{H}_y-v_y\mathcal{H}_x).\end{aligned}\right\} \tag{4.4'}$$

*) Dans la suite on appellera parfois force de Lorentz le second terme de la formule (4.1) lié au champ magnétique.

Dans la plupart des cas l'intégration de ce système d'équations pose un problème mathématique ardu. Sa solution pour une série de cas a été donnée par S. Bogouslavski. On examinera le cas le plus simple où les conditions sont celles qui se posent dans des expériences de laboratoire et, sans faire le calcul de la trajectoire, on ne recherchera que la valeur de la déviation du faisceau parallèle de particules chargées dans un champ magnétique. Supposons qu'au moment $t=0$ la vitesse de la particule est dirigée suivant l'axe x, c'est-à-dire que pour $t=0$ on a $v_x=v$, $v_y=v_z=0$. En ce qui concerne le champ magnétique on supposera qu'il est constant dans le temps et est dirigé suivant l'axe y, mais, en général, est hétérogène, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\mathcal{H}=\mathcal{H}(x)$. Ainsi donc, $\mathcal{H}_x=\mathcal{H}_z=0$, $\mathcal{H}_y=\mathcal{H}(x)=\mathcal{H}$. Supposons que le champ agit le long de $OA=x$ (fig. 6) et que, à la distance $OB=l$, en général différente de OA, est placé un écran fluorescent qui permet de mesurer la déviation. Comme le champ sur toute son étendue est dirigé suivant l'axe y, la composante de la force $F_y=e(v_z\mathcal{H}_x-v_x\mathcal{H}_z)$ est égale à zéro ($v_y\equiv 0$) et le mouvement s'effectue dans le plan xz. Puisqu'on s'intéresse à la déviation de la particule z pour $x=l$ et non pas à sa trajectoire, on ne se servira que de la troisième équation (4.4′). Si la déviation est faible, on peut tout au long du parcours aux petits de second ordre près poser $v=v_x=\frac{dx}{dt}$; en effet,

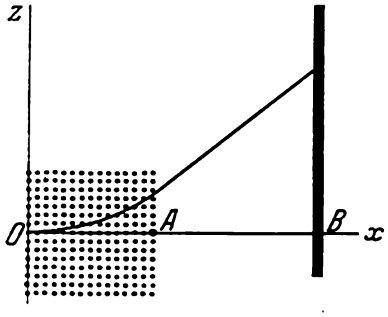


Fig. 6. Particule chargée positivement dans un champ magnétique

$$v=\sqrt{v_x^2+v_z^2}=v_x\left[1+\left(\frac{v_z}{v_x}\right)^2\right]^{1/2}=v_x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v_z}{v_x}\right)^2+\ldots\right]\approx v_x.$$

La troisième équation tirée de (4.4′), qui nous intéresse, donne évidemment

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{e}{m}\frac{dx}{dt}\mathcal{H}, \tag{4.5}$$

le second terme du second membre étant nul.

Après quoi considérant que $\frac{d}{dt}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ on peut récrire (4.5) sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{e}{m}\frac{dx}{dt}\mathcal{H}.$$

En simplifiant et en remplaçant de nouveau $\frac{dx}{dt}$ par v on obtient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{e}{mv}\mathcal{H}.$$

De là on trouvera la déviation z qui nous intéresse par une double intégration. La première intégration dans les limites de 0 à x donne

$$\frac{dz}{dx}=\frac{e}{mv}\int_0^x \mathcal{H}\,dx.$$

La seconde intégration de 0 à l (distance de l'origine du champ jusqu'à l'écran) donne

$$z=\frac{e}{mv}\int_0^l dx\int_0^x \mathcal{H}\,dx.$$

Faisons l'intégration par parties en posant $u=\int_0^x \mathcal{H}\,dx$ et $dv=dx$; il vient

$$z=\frac{e}{mv}\left\{l\int_0^l \mathcal{H}\,dx-\int_0^l \mathcal{H}x\,dx\right\}=\frac{e}{mv}\int_0^l \mathcal{H}(l-x)\,dx. \tag{4.6}$$

Dans cette formule l'intégrale

$$A=\int_0^l \mathcal{H}(l-x)\,dx \tag{4.7}$$

est évidemment une donnée de l'instrument, car sa valeur dépend uniquement de l'intensité du champ $\mathcal{H}$ et de la distance l du point d'entrée des électrons jusqu'à l'écran. En utilisant les notations de (4.7) on trouve

$$z=A\frac{e}{mv}. \tag{4.8}$$

En particulier, si le champ est uniforme ($\mathcal{H}=$const) et s'étend de $x=0$ jusqu'à $x=a$ et si dans l'intervalle de $x=a$ à $x=l$ on a $\mathcal{H}=0$, alors

$$A=a\left(l-\frac{a}{2}\right)\mathcal{H}.$$

Enfin, si l'écran est disposé contre le bout des pôles de l'aimant, alors $l=a$ et

$$A=\frac{a^2}{2}\mathcal{H}.$$

Dans un champ uniforme perpendiculaire à la vitesse il est facile de trouver la trajectoire de la particule. En effet, comme la force de Lorentz est toujours perpendiculaire à $\mathbf{v}$, elle ne modifie que la direction de la vitesse et non pas sa valeur; l'électron décrit donc une circonférence dont le rayon

ϱ sera trouvé en égalant la force de Lorentz evH à la force centrifuge d'inertie :

$$ev\mathcal{H}=\frac{mv^2}{\varrho},$$

d'où

$$\varrho=\frac{mv}{e}\frac{1}{\mathcal{H}}. \tag{4.9}$$

Calculons maintenant la déviation de la particule chargée dans un champ électrostatique transversal. Supposons toujours que la vitesse de la particule au moment de sa pénétration dans l'espace compris entre les armatures du condensateur soit dirigée suivant l'axe x et que le champ du condensateur le soit suivant l'axe z. Toutes les autres conditions restent inchangées (fig. 7). Comme $\mathcal{H}=0$, (4.2) donne

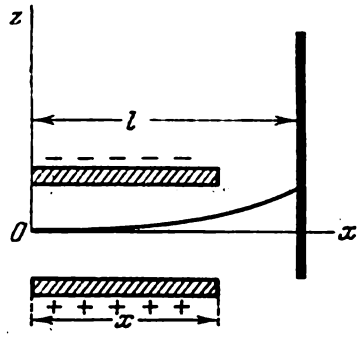


Fig. 7. Particule chargée positivement dans un champ électrostatique

$$m\dot{v}=e\mathcal{E}.$$

En considérant que $\mathcal{E}_x=\mathcal{E}_y=0$, $\mathcal{E}_z=\mathcal{E}$, on obtient les trois équations scalaires suivantes :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=e\mathcal{E}.$$

Pour des faibles déviations on peut comme avant poser approximativement que tout le temps $v=\frac{dx}{dt}$ et, pour le calcul de la déviation, n'utiliser que la troisième équation

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=e\mathcal{E}. \tag{4.10}$$

En remarquant que

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt}=v^2\frac{d^2z}{dx^2}$$

on peut récrire l'équation (4.10) sous la forme

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{e}{mv^2}\mathcal{E}.$$

En intégrant deux fois comme on l'a déjà fait on trouve

$$z=\frac{e}{mv^2}\int_0^l dx\int_0^x \mathcal{E}\,dx=\frac{e}{mv^2}\int_0^l (l-x)\mathcal{E}\,dx,$$

ou en posant

$$\int_0^l (l-x)\mathcal{E}\,dx=B$$

(B est une donnée de l'instrument tout comme la constante A introduite auparavant) on a

$$z=B\frac{e}{mv^2}. \tag{4.11}$$

En particulier, si la longueur des armatures du condensateur est égale à b et le champ est uniforme ($\mathcal{E}$=const), l'intégration directe donne

$$B=b\left(l-\frac{b}{2}\right)\mathcal{E},$$

ou pour $l=b$

$$B=\frac{b^2}{2}\mathcal{E}. \tag{4.12}$$

§ 5. Electron dans un champ électrostatique longitudinal

Examinons enfin le mouvement de l'électron dans le champ électrostatique coïncidant avec la direction du déplacement. Supposons qu'il s'agit de la direction de l'axe x. Alors $\mathcal{E}_x=\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_y=\mathcal{E}_z=0$. L'équation scalaire du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=e\mathcal{E} \tag{5.1}$$

se présente, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par v, sous la forme

$$m\frac{dv}{dt}=e\mathcal{E}. \tag{5.1'}$$

Multiplions les deux membres de (5.1') par v et en notant que

$$v\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=e\mathcal{E}v. \tag{5.2}$$

Si on désigne le potentiel du champ électrique par φ, alors $\mathcal{E}=\mathcal{E}_x=-\frac{d\varphi}{dx}$. Dans ce cas

$$\mathcal{E}v=-\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt},$$

et (5.2) prend la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=-e\frac{d\varphi}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}+e\varphi\right)=0,$$

d'où

$$\frac{mv^2}{2}+e\varphi=\text{const.} \tag{5.3}$$

L'équation (5.3) traduit le principe de la conservation de l'énergie, car $e\varphi$ est l'énergie potentielle de la charge e au point du champ de potentiel φ. Si la charge se déplace du point de potentiel φ_1 au point de potentiel φ_2 et $\varphi_1-\varphi_2=V$, alors

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=e(\varphi_1-\varphi_2)\equiv eV.$$

Pour $v_1=0$ on a

$$\frac{mv^2}{2}=eV. \tag{5.4}$$

Habituellement la différence de potentiel est mesurée en volts; dans ce cas

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{eV}{300}. \tag{5.4'}$$

En physique atomique on exprime souvent l'énergie en électrons-volts : 1 eV est l'énergie qu'acquiert un électron en parcourant une différence de potentiel d'accélération de 1 V. De (5.4') on obtient

$$1 \text{ électron-volt}=\frac{4{,}80\cdot10^{-10}\cdot1}{300}=1{,}60\cdot10^{-12} \text{ erg.}$$

L'énergie de 1 eV calculée pour $N=6{,}023\cdot10^{23}$ (1 mole) électrons est égale à

$$1 \text{ électron-volt}\cdot\text{mole}^{-1}=9{,}64\cdot10^{11} \text{ erg}\cdot\text{mole}^{-1}=2{,}304\cdot10^{4} \text{ cal}\cdot\text{mole}^{-1}=$$
$$=23{,}04 \text{ kcal}\cdot\text{mole}^{-1}.$$

Si l'énergie de l'électron est connue et est exprimée en électrons-volts, la vitesse v en cm/s pourra être calculée directement de (5.4') :

$$v=\sqrt{\frac{e}{m}\frac{V}{150}}=5{,}93\cdot10^{7}\sqrt{V(\text{volt})} \text{ cm/s.} \tag{5.5}$$

§ 6. Méthodes expérimentales de détermination de la charge spécifique

Les méthodes expérimentales de détermination de e/m se fondent sur les résultats de l'étude du mouvement de l'électron dans les champs électrique et magnétique réalisée dans les deux paragraphes précédents.

Il faut cependant souligner que, aussi bien dans le cas du champ électrique que magnétique, la déviation dans le champ transversal dépend non seulement de e/m mais également de v : la déviation magnétique est fonction du

facteur e/mv, quant à la déviation électrique elle est fonction du facteur e/mv^2. C'est pourquoi l'expérience sur la déviation dans l'un des champs ne permet pas de trouver e/m.

Dans les premiers essais on a habituellement mesuré la déviation successivement dans les deux champs et des deux équations (4.8) et (4.11) on tirait e/m et v. Pour cela les faisceaux d'électrons étaient produits sous forme de rayons cathodiques dans des tubes à gaz raréfiés (pression de l'ordre de quelques centièmes de mm Hg). Le développement de la technique du vide a permis durant ces dernières décennies d'effectuer des mesures dans des conditions mieux précisées et contrôlées. Sur la figure 8 on a

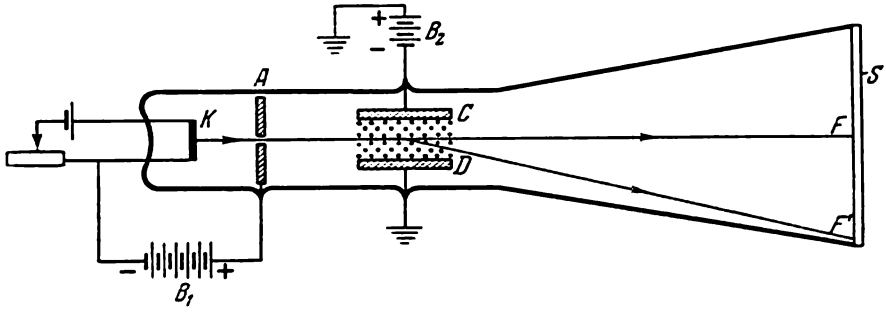


Fig. 8. Schéma de la méthode de détermination de la charge spécifique en fonction des déviations provoquées par les champs électrique et magnétique

représenté le schéma d'un dispositif moderne de détermination de e/m et de v. La cathode K placée dans le tube, où un vide est réalisé suivant les méthodes modernes de la technique du vide, une fois chauffé devient une source abondante d'électrons. Ces électrons sont accélérés par une batterie B_1 dont le pôle positif est relié à une plaque métallique A (anode) ayant au centre une ouverture. Les électrons traversant cette ouverture et se déplaçant linéairement frappent la paroi du tube S recouverte d'une substance fluorescente en y dessinant en face de l'ouverture dans l'anode A la tache claire F. Sur le chemin entre A et F les électrons passent entre les armatures du condensateur CD auquelles peut être appliquée une tension au moyen de la batterie B_2. Si on enclenche la batterie B_2, le faisceau d'électrons est dévié par le champ électrique produit entre les armatures et la tache en se déplaçant prend la position F'.

En créant entre les armatures du condensateur CD également un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan du dessin (sur la figure il est représenté par des points) on peut provoquer une déviation de la tache dans des directions identique ou inverse. Si l'on mesure les deux déviations, alors à l'aide des équations (4.8) et (4.11) on peut obtenir e/m et v. Pratiquement il est plus commode de compenser par le champ magnétique la déviation électrostatique initiale. Dans ce cas les mesures se réduisent à la détermination précise des champs : électrique et magnétique.

Comme il a été mentionné plus haut, les vitesses initiales des électrons libérés par la cathode chauffée sont faibles. Si, par exemple, la cathode est une spirale en tungstène portée à 2400 °K, ce n'est que 0,1 % d'électrons qui possédera une énergie dépassant 1,42 électron-volt et 0,0001 %, une énergie supérieure à 2,85 électrons-volts. C'est pourquoi, si le champ accélérateur n'est pas trop faible, on peut admettre avec une précision suffisante que la vitesse initiale des électrons libérés est nulle. Supposons que la différence de potentiel entre la cathode et l'anode (par exemple, entre K et A sur fig. 8) est égale à V volts. Dans ce cas, la vitesse finale des électrons se déduit de l'équation

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{eV}{300}. \qquad (5.4')$$

Donc, connaissant V on connaît également la vitesse des électrons. Ceci nous dispense d'utiliser simultanément la déviation électrique et magnétique pour la détermination de e/m et de v. Il suffit alors d'utiliser soit le champ électrique, soit le champ magnétique; la seconde équation est toujours fournie par la formule (5.4').

Aux paragraphes suivants on décrira, en puisant dans le grand nombre de méthodes actuelles de détermination de la charge spécifique, deux des plus caractéristiques. Dans la première on utilise le champ électrique, tandis que dans la seconde on se sert du champ magnétique.

§ 7. Détermination de la charge spécifique de l'électron par la méthode de deux condensateurs

L'une des plus précises méthodes actuelles de détermination du rapport e/m est la méthode de deux condensateurs. Issus du fil chauffé F (fig. 9), les électrons sont accélérés par un champ créé entre la cathode F et l'anode A. Après avoir traversé l'ouverture dans l'anode A et le diaphragme D_1 le faisceau d'électrons pénètre dans le premier condensateur K_1 soumis à une différence de potentiel alternative de la part du générateur à haute fréquence B. Sous l'influence de ce champ alternatif l'orientation du faisceau se modifie périodiquement et en général le faisceau est retenu par l'écran P_2. Seuls les électrons qui traversent le condensateur K_1 à l'instant où la courbe du potentiel passe par zéro (fig. 10) peuvent passer par la petite ouverture D_2 de l'écran P_2. Ces électrons pénètrent par la suite dans le condensateur K_2 relié au même générateur que K_1, les champs des deux condensateurs se trouvent donc à la même phase. C'est ainsi que deux fois durant la même période dans le condensateur K_2 pénètrent des électrons qui dévient plus ou moins vers le haut ou vers le bas suivant la phase du générateur au moment du passage des électrons par le condensateur K_2. Il est facile de se convaincre qu'il n'existe que deux orientations symétriques dans lesquelles peuvent dévier les électrons après la traversée du second condensateur K_2. Si, par exemple, l'intervalle de temps nécessaire au passage de l'électron du condensateur K_1 au condensateur K_2 est égal à $t_1=OA$ (fig. 10),

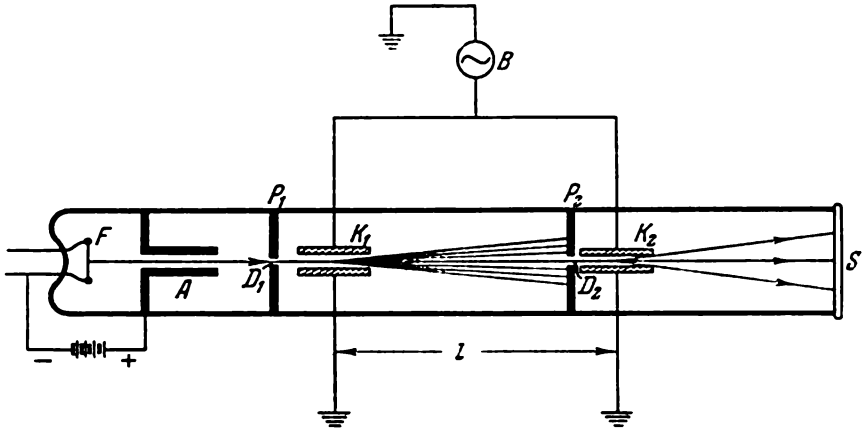


Fig. 9. Schéma de la méthode de détermination de la charge spécifique à l'aide de deux condensateurs

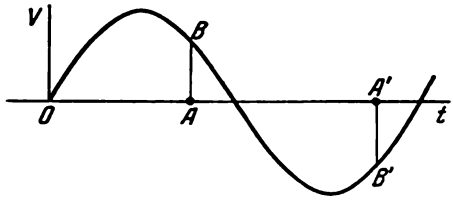


Fig. 10.

alors dans le second condensateur K_2 certains électrons seront soumis au potentiel $AB=+V_1$, tandis que les autres le seront au potentiel $A'B'=-V_1$. C'est pourquoi sur l'écran fluorescent S il apparaîtra deux taches symétriques.

En faisant varier la vitesse des électrons par des modifications du potentiel d'accélération on peut aboutir à ce que le temps t_1 soit égal à la demi-période du générateur $T/2$ ou, en général, à $nT/2$. Dans ces conditions les électrons traverseront également le second condensateur sans déviation et les deux taches sur l'écran fluorescent coïncideront. Si la distance entre K_1 et K_2 est égale à l et la fréquence du générateur à f, la vitesse de ces électrons sera

$$v=2l/T=2lf$$

ou, en général,

$$v=2l/nT=2lf/n. \tag{7.1}$$

D'autre part,

$$eV=\frac{mv^2}{2}, \tag{5.4}$$

où V est le potentiel d'accélération appliqué entre F et A. De (7.1) et (5.4) on obtient

$$\frac{e}{m}=\frac{v^2}{2V}=\frac{2f^2l^2}{n^2V}. \tag{7.2}$$

Le grand avantage de la méthode de deux condensateurs consiste dans le fait qu'elle est en quelque sorte une méthode de « zéro » n'exigeant aucune mesure de la déviation, habituellement accompagnée d'erreurs qu'il est difficile d'éviter. La valeur de la charge spécifique obtenue de cette façon après toutes les corrections est égale à*)

$$\frac{e}{m}=(1{,}7590\pm 0{,}0015)\cdot 10^7 \text{ U. E. M. C. G. S.}\cdot g^{-1}.$$

§ 8. Détermination de la charge spécifique de l'électron par la méthode de focalisation au moyen d'un champ magnétique longitudinal

Une autre méthode précise de détermination de e/m est associée à l'utilisation d'un champ magnétique longitudinal.

Etudions tout d'abord l'action du champ magnétique sur un faisceau d'électrons divergent issu d'un point (l'ouverture de la diaphragme). La force qu'exerce sur l'électron le champ magnétique est égale à (on suppose que e est exprimé en unités électromagnétiques) :

$$\mathbf{F}=e(\mathbf{v}\wedge\mathcal{H}).$$

Si l'électron se déplace sous l'angle α non égal à 0 ou 90° par rapport à la direction des lignes de force magnétiques, sa vitesse peut se décomposer en deux composantes longitudinale v_l et transversale v_ϱ :

$$v_l=v\cos\alpha, \qquad v_\varrho=v\sin\alpha. \tag{8.1}$$

Considérons l'influence du champ magnétique sur chacune de ces composantes séparément. Sur l'électron, se déplaçant perpendiculairement au champ avec la vitesse v_ϱ, agit une force $F_\varrho=ev_\varrho\mathcal{H}$. Comme la force F_ϱ est toujours perpendiculaire à v_ϱ, l'électron décrira une circonférence de rayon que l'on trouvera en égalant F_ϱ à la force centrifuge d'inertie :

$$ev_\varrho\mathcal{H}=\frac{mv_\varrho^2}{\varrho},$$

d'où

$$\varrho=\frac{v_\varrho}{\frac{e}{m}\mathcal{H}}, \qquad v_\varrho=\frac{e}{m}\mathcal{H}\varrho.$$

*) Suivant une pratique historiquement consacrée on exprime la charge spécifique de l'électron e/m en U. E. M. C. G. S.$\cdot g^{-1}$, alors que la charge e est habituellement exprimée en U. E. S. C. G. S. Dans le cas où les deux grandeurs e et e/m entrent dans les formules sous diverses combinaisons, au lieu de e/m il faut écrire e/mc.

Le temps t nécessaire pour que l'électron décrive la circonférence entière sera

$$t=\frac{2\pi\varrho}{v_\varrho}=\frac{2\pi}{\frac{e}{m}\mathcal{H}}. \tag{8.2}$$

Il apparaît ainsi que t ne dépend pas du rayon ϱ. Si donc on imagine des électrons sortant en même temps d'un même point avec des vitesses différentes v_ϱ perpendiculaires à $\mathcal{H}$, alors tous ces électrons, après avoir décrit des circonférences de rayon différent, retourneront en même temps au point de départ. Ceci est montré à la figure 11 dans sa partie droite où

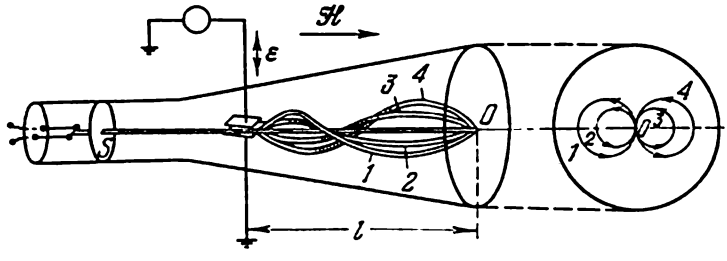


Fig. 11. Schéma de la méthode de détermination de la charge spécifique au moyen d'un champ magnétique longitudinal

on a représenté dans le plan perpendiculaire à la direction du champ magnétique les projections des trajectoires des électrons possédant des composantes différentes de la vitesse v_ϱ.

Le champ magnétique n'exerce aucune influence sur la composante longitudinale de la vitesse. C'est pourquoi dans l'intervalle de temps t les électrons se déplaceront le long de l'axe du solénoïde, créateur du champ, d'une distance

$$l=v_l t=\frac{2\pi v\cos\alpha}{\frac{e}{m}\mathcal{H}}. \tag{8.3}$$

Si l'angle α est petit, alors $\cos\alpha\approx 1$ et (8.3) prend la forme

$$l=\frac{2\pi v}{\frac{e}{m}\mathcal{H}}, \tag{8.4}$$

autrement dit, tous les électrons sortant par l'ouverture du diaphragme avec la même valeur absolue de la vitesse v, durant l'intervalle de temps au cours duquel les projections de ces électrons sur le plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde décrivent une circonférence entière, se déplacent le long de l'axe du solénoïde d'une même distance l. D'où il résulte que le faisceau divergent d'électrons possédant une même énergie sera focalisé à la distance l sous l'action du champ magnétique longitudinal.

Cette action focalisante du solénoïde se trouve justement à la base de la méthode du champ magnétique longitudinal. Les électrons sortant de l'ouverture S du diaphragme (fig. 11) et développés préalablement en un faisceau divergent par un champ électrique alternatif $\mathcal{E}$ pénètrent à l'intérieur du solénoïde. En choisissant convenablement l'intensité du champ $\mathcal{H}$ on peut arriver à focaliser le faisceau d'électrons au bout du solénoïde opposé au diaphragme, à l'emplacement même de l'écran fluorescent. En connaissant le champ exigé on peut aussitôt calculer e/m. En effet, (8.4) nous donne

$$v=\frac{l}{2\pi}\frac{e}{m}\mathcal{H}.$$

En portant cette expression à la place de la vitesse dans l'équation de l'énergie

$$\frac{mv^2}{2}=eV \tag{5.4}$$

on obtient facilement

$$\frac{e}{m}=\frac{8\pi^2V}{\mathcal{H}^2l^2}. \tag{8.5}$$

Le résultat des dernières (1939) mesures effectuées au moyen de cette méthode est le suivant :

$$\frac{e}{m}=(1{,}7586\pm 0{,}0023)\cdot 10^7 \text{ U. E. M. C. G. S.}\cdot g^{-1}.$$

La valeur la plus précise de la charge spécifique de l'électron obtenue après appréciation critique des mesures réalisées par des méthodes différentes est

$$\frac{e}{m}=(1{,}7592\pm 0{,}0005)\cdot 10^7 \text{ U. E. M. C. G. S.}\cdot g^{-1}. \tag{8.6}$$

Comparons maintenant la masse de l'électron à la masse de l'atome d'hydrogène. Pour cela il faut avant tout trouver la valeur de e/m_H, c'est-à-dire le rapport de la charge de l'électron à la masse de l'atome d'hydrogène. Il est facile de voir que ce dernier rapport est égal au rapport du nombre de Faraday F au poids atomique de l'hydrogène ^1H. En effet, puisque $F=Ne$ (N est le nombre d'Avogadro) et $^1H=Nm_H$, il en résulte que $F/{}^1H=e/m_H$. Les mesures les plus précises de F et de ^1H donnent

$$\frac{e}{m_H}=(9573{,}5\pm 1) \text{ U. E. M. C. G. S.}\cdot g^{-1}. \tag{8.7}$$

En combinant (8.6) et (8.7) on trouve

$$\frac{m_H}{m}=1837{,}5.$$

Ainsi, la masse de l'électron est 1837,5 fois plus petite que celle de l'atome d'hydrogène.

§ 9. Focalisation et monochromatisation des faisceaux de particules chargées

Etudions ici en passant les méthodes qui permettent d'obtenir des faisceaux de particules de vitesses constantes (monochromatisation, filtres de vitesses) ainsi que les méthodes de focalisation des faisceaux de particules chargées. La connaissance de ces méthodes nous sera utile ultérieurement.

Le filtre de vitesses le plus élémentaire se présente ainsi : un faisceau de particules chargées traverse en même temps des champs électrique et magnétique, perpendiculaires l'un à l'autre et tels que les déviations provoquées soient de sens opposés.

Sur la figure 12 le champ magnétique est perpendiculaire au plan du dessin et agit sur la particule chargée positivement avec une force $ev\mathcal{H}$ contenue dans le plan de la figure. Dans le même plan se trouve également la force $e\mathcal{E}$ avec laquelle le champ électrique du condensateur AB agit sur la charge. Si on choisit l'orientation des champs de façon que les deux forces soient dirigées dans des sens opposés, la force résultante sera $ev\mathcal{H}-e\mathcal{E}$. Sous l'action de cette force la particule se déplace ordinairement suivant une courbe de rayon de courbure ϱ. En égalant la force agissant sur la particule à la force centrifuge d'inertie on obtient

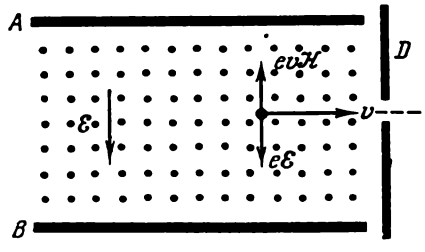


Fig. 12. Schéma d'un filtre de vitesses pour particules chargées

$$ev\mathcal{H}-e\mathcal{E}=\frac{mv^2}{\varrho}. \tag{9.1}$$

Il est évident que les particules qui traverseront le condensateur auront des vitesses pour lesquelles les deux forces $ev\mathcal{H}$ et $e\mathcal{E}$ se compenseront mutuellement. Dans ce cas

$$ev\mathcal{H}-e\mathcal{E}=0 \quad \text{et} \quad v=\mathcal{E}/\mathcal{H}. \tag{9.2}$$

Les particules dont les vitesses ne satisfont pas au rapport (9.2) seront attirées par les armatures du condensateur et écartées du faisceau ou, en tout cas, arrêtées par le diaphragme D.

Pour la focalisation des particules on utilise souvent l'action d'un champ magnétique uniforme transversal.

Soit S la source de particules (fig. 13), toutes ces particules se caractérisant par la même quantité mv/e. La particule émise verticalement vers le haut décrira une demi-circonférence de diamètre $SA=2\frac{mv}{e\mathcal{H}}=2\varrho$; une autre particule émise sous un angle α par rapport à la première décrira un arc de cercle de même rayon qui coupera la droite SA au point B. Il est aisé de voir que

$$AB=2\varrho(1-\cos\alpha).$$

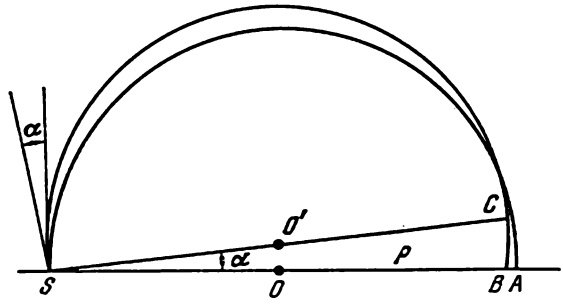


Fig. 13. Focalisation par un champ magnétique uniforme transversal

Si l'angle α est suffisamment petit, on peut utiliser le développement du cosinus en une série entière $\cos\alpha = 1-\alpha^2/2+\ldots$ et n'en conserver que les deux premiers termes; alors

$$AB = \varrho\alpha^2.$$

Par exemple, si $\varrho = 5$ cm, $\alpha = 3° = 0{,}05$, alors $AB = 1{,}25\cdot 10^{-2}$ cm. Il est évident que toutes les particules dont la direction d'envol de S se trouve dans les limites de l'angle α, après avoir décrit des arcs correspondants, couperont SA entre A et B. C'est pourquoi, si la source S est la fente que traversent les particules, alors AB sera l'« image » de cette fente sous la forme d'une ligne étroite; le champ magnétique uniforme transversal agit donc à la façon d'une lentille cylindrique.

Un autre type de filtre qui a reçu ces derniers temps une large application est basé sur l'action dans un condensateur cylindrique d'un champ électrique radial. Examinons une particule de charge e se déplaçant dans un condensateur cylindrique (fig. 14). Il est évident que cette particule traversera sans entrave le condensateur si la force $e\mathcal{E}$ agissant sur elle de la part du champ sera égale à la force centrifuge d'inertie :

$$e\mathcal{E} = \frac{mv^2}{\varrho}.$$

Dans le condensateur cylindrique le champ a une symétrie radiale et par suite

$$\mathcal{E} = -\frac{dV}{d\varrho}.$$

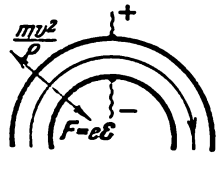


Fig. 14. Particule chargée positivement dans un champ électrique radial d'un condensateur cylindrique

Par conséquent, la condition de traversée sans entrave du condensateur sera

$$e\frac{dV}{d\varrho} = \frac{mv^2}{\varrho}. \qquad (9.3)$$

En exprimant l'énergie cinétique $mv^2/2$ au moyen du potentiel d'accélération : $mv^2 = 2eV_0$ et en séparant les variables dans l'équation (9.3) on obtient

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{2V_0}dV.$$

En posant que les rayons des armatures intérieures et extérieures sont égaux respectivement à ϱ_2 et ϱ_1, le potentiel de l'armature extérieure est égal à V_c et de l'armature intérieure à 0 on aura en intégrant dans ces conditions

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{2V_0} \int_0^{V_c} dV,$$

d'où

$$V_c = 2V_0 \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}. \tag{9.4}$$

On voit ainsi qu'à chaque différence de potentiel V_c aux armatures du condensateur correspond l'énergie des électrons V_0 autorisant leur passage à travers le condensateur.

Sur la figure 15 on a représenté le schéma de fonctionnement du condensateur cylindrique comme filtre de vitesses. On voit que si par la fente

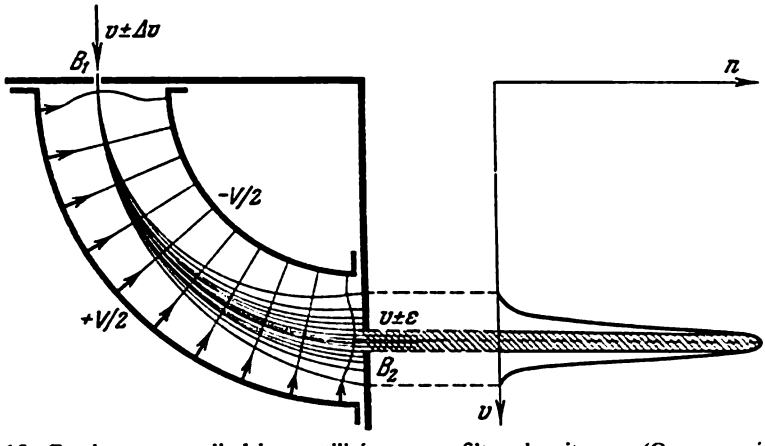


Fig. 15. Condensateur cylindrique utilisé comme filtre de vitesses. (On a représenté par des flèches les lignes de force du champ électrique; à droite sur le dessin n est le nombre de particules, v leur vitesse.)

B_1 passe un faisceau d'électrons dont les vitesses se trouvent dans l'intervalle $v \pm \Delta v$, il passera alors par la fente B_2 des électrons dont les vitesses se situeront dans un intervalle plus étroit $v \pm \varepsilon$. Dans la partie droite de la figure on a donné une représentation graphique de la répartition des électrons en fonction de la vitesse avant la traversée du filtre et après (partie hachurée).

Le côté le plus remarquable du filtre étudié est sa propriété de focalisation des faisceaux divergents. Hughes et Rojanski ont montré par des calculs théoriques qu'ont confirmé des expériences que le faisceau divergent sortant de la fente S est de nouveau focalisé après avoir décrit dans le condensateur cylindrique un arc de cercle $\pi/\sqrt{2} = 127°17'$ (fig. 16).

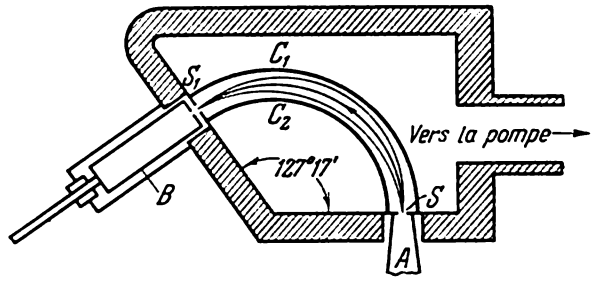


Fig. 16. Fonction focalisante du champ électrique radial : A — source de particules chargées; B — le cylindre de Faraday; C_1, C_2 — les armatures du condensateur cylindrique; S, S_1 — les fentes

Ainsi donc, le champ électrique radial d'un condensateur cylindrique agit sur un faisceau divergent de particules chargées de la même façon qu'un champ magnétique uniforme transversal. A certains égards, toutefois, l'utilisation du champ électrique au lieu d'un champ magnétique présente des avantages. Par exemple à l'aide d'écrans il est plus facile de restreindre un champ électrique qu'un champ magnétique.

§ 10. Dépendance de la masse de l'électron de sa vitesse

Aux vitesses des électrons proches de celle de la lumière on constate que la masse devient fonction de la vitesse. La première démonstration expérimentale de ce phénomène important appartient à Kaufmann dont le travail fut publié en 1901, c'est-à-dire quatre ans avant l'apparition de la théorie de la relativité d'après laquelle toute masse, portant une charge électrique ou non, doit dépendre de la vitesse suivant la formule

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Quoique le travail de Kaufmann n'ait actuellement qu'un intérêt historique, on exposera, toutefois, l'idée qui a présidé à sa méthode, car cette idée a été largement appliquée dans les expériences sur les particules chargées. En particulier, un principe analogue se trouve à la base de la « méthode des paraboles » de J. J. Thomson (§ 13) qui a été utilisée pour la première fois lors de la détermination des vraies masses des atomes.

L'essence de la méthode de Kaufmann consiste dans le fait que les électrons sont dirigés en même temps à travers des champs transversaux électrique et magnétique disposés soit parallèlement, soit antiparallèlement, de façon que les déviations provoquées par les deux champs soient perpendiculaires. Un faisceau parallèle d'électrons possédant une même vitesse se déplace entre les armatures d'un condensateur au sein duquel on a également excité un champ magnétique (fig. 17). Les directions des champs sont montrées

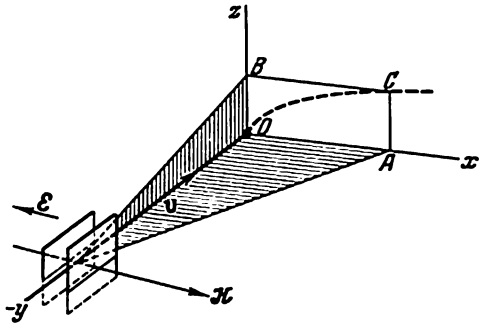


Fig. 17. Electrons dans des champs transversaux électrique et magnétique

sur la figure par des flèches. La déviation dans le champ électrique sera dirigée vers la droite et sera égale, par exemple, à $OA=x$; la déviation dans le champ magnétique sera dirigée vers le haut et sera égale, par exemple, à $OB=z$ (il faut se rappeler que les électrons portent une charge négative; par conséquent, la déviation des particules de charge positive serait respectivement vers la gauche et vers le bas). Les formules du § 4 donnent

$$z=A\frac{e}{mv}, \tag{4.8}$$

$$x=B\frac{e}{mv^2}, \tag{4.11}$$

où A et B sont des données de l'appareil. Tous les électrons de même vitesse frapperont après la traversée des deux champs le point C de la plaque photographique. Soit maintenant un faisceau hétérogène contenant des électrons de vitesses variables. Dans ce cas les traces des électrons sur la plaque se disposeront suivant une courbe dont la forme sera déduite en éliminant la vitesse v entre (4.8) et (4.11). En élevant la première au carré et en divisant par la seconde on obtient

$$\frac{z^2}{x}=\frac{A^2}{B}\frac{e}{m}. \tag{10.1}$$

Si e/m est constant et, par suite,

$$\frac{A^2}{B}\frac{e}{m}=K=\text{const},$$

alors

$$z^2=Kx, \tag{10.2}$$

et la courbe cherchée doit être un segment de parabole. En commutant le champ électrique, tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé, la direction du champ magnétique restant inchangée, on devrait obtenir deux segments de parabole disposés de façon qu'au point O l'axe z soit leur tangente commune (fig. 18, *a*). Dans les expériences de Kaufmann exécutées

suivant cette disposition et avec une préparation de radium comme source d'électrons, il apparut que les segments de courbe obtenus lors de cette expérience n'étaient pas des segments de parabole. Ceci montre déjà que e/m dans (10.1) ne reste pas constant, autrement dit que la masse dépend de la vitesse. Sur la figure 18, *b* on a représenté schématiquement la photo obtenue par Kaufmann. La tache provoquée par les rayons γ du radium non déviés dans les champs magnétique et électrique marque l'origine des coordonnées. On voit cependant que les segments n'atteignent pas l'origine des coordonnées et ceci nonobstant que dans le faisceau on trouve des électrons dont les vitesses diffèrent peu de celle de la lumière. On voit également que les tangentes aux prolongements des deux segments au point O ne se confondent pas avec l'axe z, mais forment avec celui-ci un angle α différant de zéro. C'est pourquoi z/x a une valeur finie pour $z=0$ et, par suite, $\frac{z^2}{x}=\frac{z}{x}z=0$. Ces photos permettent de trouver e/m pour différentes vitesses des électrons, quelle que soit la forme des traces. En effet, en mesurant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe on peut calculer e/m et v à l'aide des formules (4.8) et (4.11). Les traces obtenues sur les plaques étant assez floues, il n'est pas possible d'exiger de ces mesures de grandes précisions; toutefois elles montrent de façon qualitative et sans aucune contestation que la masse croît avec la vitesse. Kaufmann, par exemple, a obtenu les résultats suivants (voir tableau II).

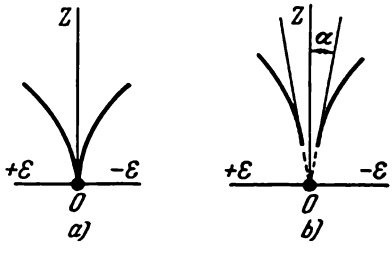


Fig. 18.

Tableau II

v, cm/s	e/m, U. E. M. C. G. S.·g^{-1}
$2{,}36\cdot10^{10}$	$1{,}31\cdot10^{7}$
$2{,}59\cdot10^{10}$	$0{,}97\cdot10^{7}$
$2{,}83\cdot10^{10}$	$0{,}63\cdot10^{7}$

Pour la détermination des dépendances quantitatives des masses de la vitesse la précision atteinte dans l'expérience de Kaufmann est insuffisante.

A l'époque où il effectuait ces expériences le choix ne pouvait se faire qu'entre deux formules : 1) la formule d'Abraham qui se fondait sur la représentation de l'électron sous forme d'une bille rigide et incompressible:

$$m=m_0\cdot\frac{3}{4}\,\frac{1}{\beta}\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}-1\right),$$

et 2) la formule de Lorentz

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad\left(\beta=\frac{v}{c}\right)$$

qui correspondait à la représentation suivant laquelle l'électron était une matière compressible dans la direction du mouvement; cette dernière

formule découlait également de la théorie de la relativité. Du fait de l'importance de principe du problème de choix de la formule la plus conforme à la réalité, après le travail de Kaufmann apparut une série d'autres travaux qui déclenchèrent une discussion. La cause de cette situation consistait dans l'extrême difficulté des expériences correspondantes et dans la faible différence entre les données numériques fournies par les deux formules.

Sans s'arrêter sur l'historique de la question on n'examinera que les résultats des derniers travaux dans lesquels on a tenu compte de toutes les observations formulées à propos des recherches précédentes. Dans les expériences de Trikker on a utilisé le schéma proposé par P. Kapitsa pour l'analyse des électrons en fonction des vitesses. Ce schéma est en fait celui d'un « monochromateur à foyers » pour électrons analogue au monochromateur de même appellation utilisé pour la monochromatisation de la lumière. A la figure 19, *a* on a montré le fonctionnement de ce monochromateur en optique. Le faisceau de rayons divergeant de la source de lumière *S* passe à travers une lentille *L* devant laquelle on a disposé un diaphragme annulaire *AB*. Le rôle de ce diaphragme est d'éliminer les rayons paraxiaux en conservant les rayons atteignant les bords de la lentille, c'est-à-dire se dispersant sous un angle suffisamment grand. Du fait de l'aberration chromatique de la lentille les rayons de longueurs d'onde différentes sont focalisés en divers points S', S'', S''', ... de l'axe optique : les rayons de petites longueurs d'onde sont focalisés plus près de la lentille, ceux qui ont une longueur plus grande en des points plus éloignés de la lentille. En déplaçant le diaphragme *C* on peut en faire sortir des rayons de longueur d'onde quelconque.

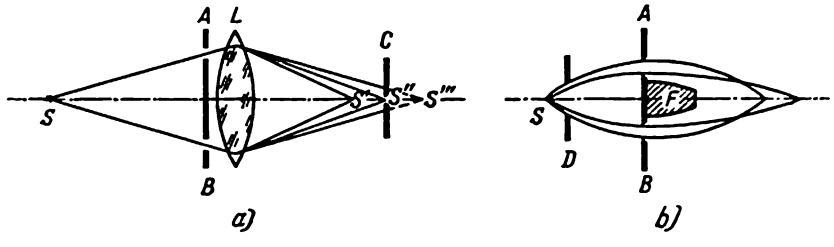


Fig. 19. a) « Monochromateur à foyers » optique. b) Schéma de l'expérience de Kapitsa-Trikker

Dans la méthode de Kapitsa—Trikker le rôle de la lentille est joué par le champ magnétique longitudinal à symétrie axiale, autrement dit par un solénoïde. Dans ce cas, le solénoïde est une longue lentille magnétique. Comme on a vu au § 8, les électrons sont focalisés par une telle lentille à la distance l égale à

$$l = \frac{2\pi v \cos \alpha}{\frac{e}{m} \mathcal{H}}. \tag{8.3}$$

Une fois donné $\mathcal{H}$ et α, la distance l est fonction de v et de e/m. Le schéma du « monochromateur à foyers » pour électrons est représenté à la figure 19, *b*. Le faisceau d'électrons divergeant de la source S constituée d'une préparation radioactive émettant des électrons de vitesse allant jusqu'à $\beta=0{,}8$ traversait un diaphragme annulaire AB et était focalisé par un champ magnétique longitudinal d'un solénoïde. Dans ce cas comme pour une lentille optique les électrons de différentes vitesses étaient focalisés en divers points de l'axe optique. F est un bloc de plomb qui protège contre les rayons X apparaissant au cours du freinage des électrons dans le diaphragme. Le diaphragme D pouvait être chargé jusqu'à ± 5000 V et ainsi accélérer ou décélérer les électrons. Pour une vitesse $\beta=0{,}8$ qui correspond au potentiel d'accélération de $340{,}5\cdot 10^5$ V, le rapport m/m_0 de la formule de Lorentz—Einstein est égal à 1,666. La variation du potentiel d'accélération de 5000 V provoque des modifications de masse rien que de 0,06 %, ce qui est au-delà des limites de l'erreur de l'expérience. C'est pourquoi un champ de 5000 V accélère ou freine sensiblement les électrons mais pratiquement ne modifie pas leur masse. De la formule (8.3) il suit que la variation de la vitesse de Δv provoque un déplacement du foyer de

$$\Delta l=\frac{2\pi\Delta v\cos\alpha}{\frac{e}{m}\mathcal{H}}.$$

Connaissant Δv et $\mathcal{H}$ et mesurant Δl on peut calculer e/m pour une vitesse considérée.

Les mesures de Trikker ont montré que pour des vitesses des électrons allant jusqu'à 0,8 de la vitesse de la lumière les modifications de la masse en fonction de la vitesse obéissent à la formule de Lorentz—Einstein à 1 à 2 % près, alors que la différence entre les résultats fournis par les formules de Lorentz—Einstein et d'Abraham constitue dans ces conditions environ 5 %.

Une autre méthode de détermination de la dépendance de la masse de la vitesse a été utilisée par Tzan et Spiss (1938). L'idée de cette méthode est la suivante.

Soit en A (fig. 20) la source des électrons. Si l'on a un champ magnétique uniforme $\mathcal{H}$ normal au plan de la figure, les fentes S_1 et S_2 choisiront dans le faisceau les électrons dont les vitesses satisfont à la condition

$$\frac{mc^2}{e}=ev\mathcal{H}, \tag{10.3}$$

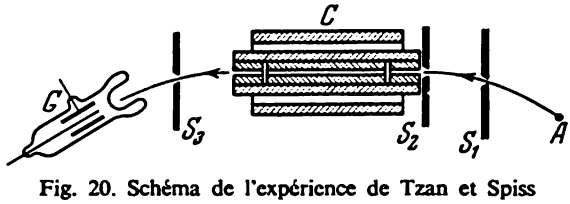


Fig. 20. Schéma de l'expérience de Tzan et Spiss

où ϱ est le rayon de courbure de la trajectoire définie par la position des fentes S_1, S_2, S_3. Les électrons ayant traversé les fentes S_1 et S_2 passent ensuite par le condensateur C. La présence du champ magnétique perpendiculaire au champ électrique fait jouer au condensateur le rôle de filtre (voir § 9) qui effectue une monochromatisation de la vitesse des électrons beaucoup plus précise. En G se trouve le dispositif enregistreur à l'aide duquel on peut compter les électrons ayant traversé toutes les fentes et le condensateur. L'expérience consiste à choisir pour une intensité donnée du champ magnétique une différence de potentiel appliquée aux armatures du condensateur pour laquelle le nombre d'électrons enregistrés par le compteur G est maximal. Si $\mathscr{E}$ est l'intensité du champ dans le condensateur, alors d'après la formule (9.2) ce dernier ne laissera passer que les électrons dont les vitesses répondent à la condition

$$v=\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{H}}. \tag{9.2}$$

En combinant cette formule avec (10.3) on obtient

$$\frac{e}{m}=\frac{\mathscr{E}}{\varrho\mathscr{H}^2}. \tag{10.4}$$

Les expériences de Tzan et de Spiss de même que celles de Kapitsa—Trikker ont montré que la différence entre les résultats calculés d'après la formule de Lorentz—Einstein et les résultats expérimentaux ne dépasse pas 1,5 % pour des vitesses des électrons $\beta=0{,}745$.

Actuellement la question de la dépendance de la masse des particules rapides de la vitesse a acquis une énorme importance technique du fait même que la dépendance de la masse de la vitesse ainsi que la formule qui en traduit quantitativement la dépendance sont à la base des accélérateurs cycliques modernes de particules élémentaires constituant des constructions techniques grandioses. Dans ces dispositifs les particules décrivent des circonférences de rayon allant jusqu'à 100 mètres et acquièrent des énergies de l'ordre de dizaines de milliards d'électrons-volts. Dans le calcul de ces machines un rôle fondamental est joué par la dépendance de la masse de la vitesse et tout écartement aussi infime qu'il soit de la formule de Lorentz—Einstein utilisée conduirait à une complète impossibilité de travailler sur ces machines. C'est pourquoi, actuellement cette formule doit être considérée comme confirmée dans tout l'intervalle des vitesses accessibles.

CHAPITRE II

ATOMES. ISOTOPES

§ 11. Introduction

Le chapitre précédent était consacré à l'électron, une des plus importantes particules élémentaires. On a passé en revue les démonstrations de la réalité de l'électron ainsi que les déterminations directes de la valeur de sa charge et de sa masse. Dans le présent chapitre on passe à l'étude des atomes de la matière. Les démonstrations de la réalité des atomes sont bien connues des cours élémentaires de physique et de chimie, aussi on ne s'y arrêtera pas, en se limitant exclusivement à la caractéristique essentielle de l'atome : à sa masse.

En chimie on utilise habituellement des masses d'atomes non pas absolues mais relatives, dites poids atomiques et, dans ce cas, on prend pour unité conventionnelle le 1/12 de la masse de l'isotope de carbone ^{12}C. La détermination des poids atomiques s'effectue avec des quantités macroscopiques de substance au moyen d'analyses chimiques. Les nombres ainsi obtenus ont une grande importance pratique et sont à la base de tous les calculs chimiques. Si l'on suppose, comme on le faisait jusqu'à une époque toute récente, que tous les atomes d'un élément considéré ont une même masse, alors utilisant la loi d'Avogadro d'après laquelle une mole d'une substance quelconque contient une même quantité de molécules, on peut à l'aide du poids atomique chimique calculer la masse absolue de l'atome.

Or on verra dans ce chapitre que les poids atomiques chimiques ne permettent pas de déterminer les masses absolues des atomes. Toutefois, la connaissance historique des poids atomiques chimiques fut non seulement importante du point de vue pratique, mais parce qu'ils permirent de découvrir les lois capitales liant entre eux les atomes des différents éléments. Ces lois apparaissent dans le système périodique des éléments de D. Mendeleïev, dont on abordera l'étude au début de ce chapitre.

§ 12. Classification périodique des éléments d'après D. Mendeleïev

Vers le milieu du XIX^{e} siècle on a découvert une grande quantité d'éléments chimiques et, tout naturellement, une question se posa : existe-t-il un lien entre tous ces éléments ou bien leurs propriétés sont tout à fait aléatoires et indépendantes les unes des autres. Certaines régularités particulières ont été découvertes relativement tôt, mais c'est D. Mendeleïev qui

le premier est arrivé à découvrir la loi générale liant tous les éléments en un système unique et qui apparaît comme l'expression la plus manifeste de la similitude de structure des atomes. Afin de mieux apprécier l'intuition géniale grâce à laquelle Mendeleïev a découvert son système il est nécessaire de rappeler certains faits.

La première variante du tableau a été publiée par Mendeleïev en 1869. A cette époque on connaissait déjà près de 63 éléments. Or, en les groupant en un système, il apparut que seuls 35 éléments pouvaient être disposés sûrement conformément à leurs poids atomiques. Les positions de 8 éléments paraissaient malséantes. Par exemple, il était incompréhensible pourquoi Zn, Cd et Hg entraient dans le même groupe que Mg, Ca, Sr, Ba; on était encore plus perplexe devant le placement de Mn dans le groupe des halogènes (c'est-à-dire dans le VII groupe du tableau périodique). Enfin, pour les 20 éléments restants Mendeleïev fut obligé de modifier soit leurs poids atomiques, soit leur ordre de succession. Souvent ces modifications furent fort importantes : ainsi, par exemple, le poids atomique du cérium était considéré égal à 92; Mendeleïev lui attribua un poids atomique 138 (sa valeur actuelle est 140,12); les poids atomiques du thorium et de l'uranium d'après les connaissances de l'époque étaient respectivement 116 et 120. Mendeleïev, par contre, indiqua que ces poids atomiques devaient être 232 et 240. Enfin, Mendeleïev dut laisser vides certain nombre de cases qu'il supposa correspondre à des éléments encore inconnus. En particulier, il prédit l'existence de trois éléments qu'il appela ekabore, ekasilicium et ekaaluminium en décrivant leurs propriétés. Quelque temps après, en 1875, fut découvert l'élément dénommé gallium. Mendeleïev indiqua aussitôt que ce gallium est justement l'ekaaluminium qu'il avait prédit et qu'il devrait avoir un poids atomique de l'ordre de 68, un poids spécifique de 6,0 à 5,9 et un volume atomique de 11,5. En réalité le poids atomique du gallium est de 69,7, son poids spécifique de 5,96 et son volume atomique de 11,7.

Le point de base dont partait Mendeleïev en construisant son système d'éléments consistait en ce qu'en disposant les éléments dans l'ordre de leurs poids atomiques croissants, les éléments aux propriétés identiques se répètent périodiquement. En partant de cette idée il parvint à construire « le système naturel des éléments » qui apparut juste nonobstant le fait que le poids atomique, comme il le devint clair par la suite, ne peut être considéré comme constant et définissant de façon univoque les propriétés individuelles de l'atome. On verra plus bas qu'il existe des substances qui au point de vue chimique se conduisent pratiquement de la même façon quoique leurs poids atomiques soient variables. Ces substances portent le nom d'*isotopes*, car par suite de l'identité de leurs propriétés chimiques il est nécessaire de les disposer dans une même case du tableau périodique (le mot « isotope » signifie littéralement en grec « occupant la même place »). En réalité, les éléments chimiques constituent des mélanges d'isotopes et leurs poids atomiques, déterminés par les méthodes chimiques habituelles, sont des moyennes des poids atomiques de tous les isotopes qui les forment. A côté des atomes possédant des caractéristiques extrêmement voisines pour des

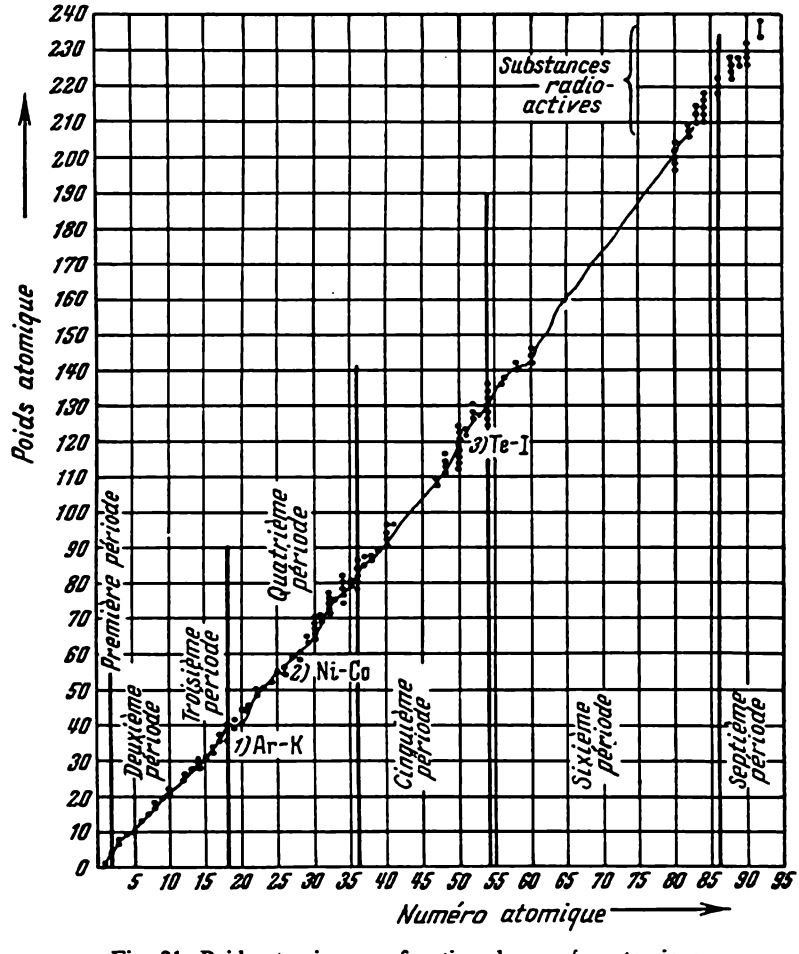


Fig. 21. Poids atomique en fonction du numéro atomique

poids atomiques différents, il existe aussi des atomes aux propriétés variées pour des mêmes poids atomiques (isobares).

Malgré tous ces faits le tableau périodique des éléments créé par Mendeleïev est juste et on doit le considérer comme une *loi fondamentale de la nature*.

Puisque le poids atomique chimique n'est pas en fait un caractère spécifique de l'atome, la caractéristique fondamentale de l'élément découle de sa place dans le tableau périodique, or cette place est définie par le numéro de la case occupée par l'élément considéré dans le tableau de Mendeleïev. La profonde cause de l'importance de ce nombre, appelé *numéro*

atomique, consiste en ce qu'en réalité ce n'est non seulement un numéro d'ordre, mais une des constantes *physiques* fondamentales de l'atome, comme on le montrera plus loin.

La possibilité de disposer les éléments en un système naturel au moyen des poids atomiques est basée sur le fait remarquable suivant : si l'on caractérise l'élément considéré par son poids atomique, déterminé par des méthodes chimiques et représentant la moyenne des poids atomiques de tous les isotopes de cet élément, alors entre ce poids atomique moyen et le numéro atomique il existe une simple dépendance monotone (fig. 21). Dans des cas isolés quand cette correspondance est violée (K — Ar, Te — I, Co — Ni), Mendeleïev, inspiré par une intuition géniale, disposa correctement ces éléments nonobstant leurs poids atomiques.

Sur les figures 22 et 23 on a donné quelques exemples de la périodicité des propriétés des atomes. A la figure 22 est représentée la courbe des volumes atomiques : sur l'axe des abscisses sont portés les numéros atomiques, sur l'axe des ordonnées, les volumes atomiques $\left(=\frac{\text{poids atomique}}{\text{densité}}\right)$; à la figure 23 on a représenté sur un diagramme les variations de quelques propriétés physiques en fonction du numéro atomique; ainsi la courbe du haut donne la variation des valeurs inverses de la température de fusion, la courbe du milieu, la variation des coefficients de dilatation linéaire et celle du bas, la variation des coefficients de compressibilité. On voit que toutes ces propriétés non seulement se modifient périodiquement avec l'accroisse-

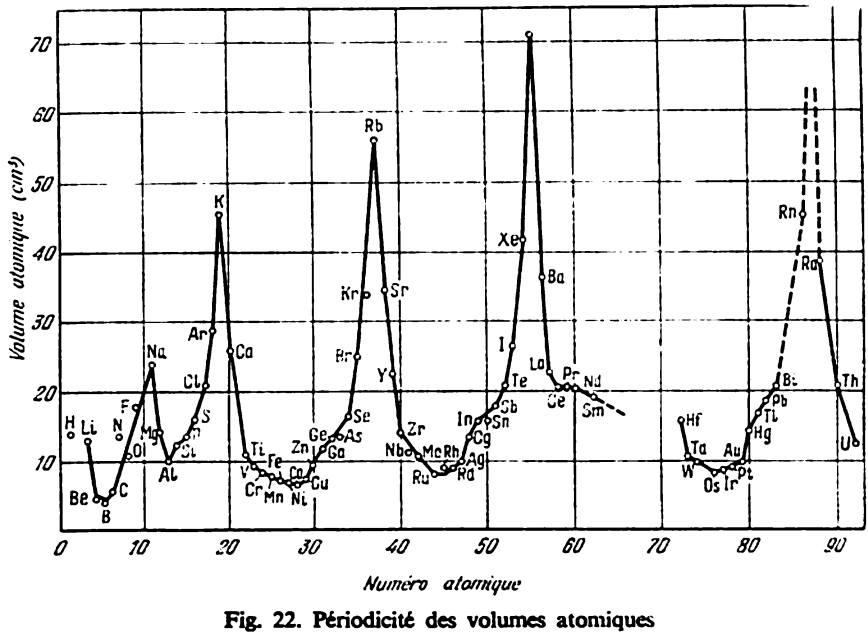


Fig. 22. Périodicité des volumes atomiques

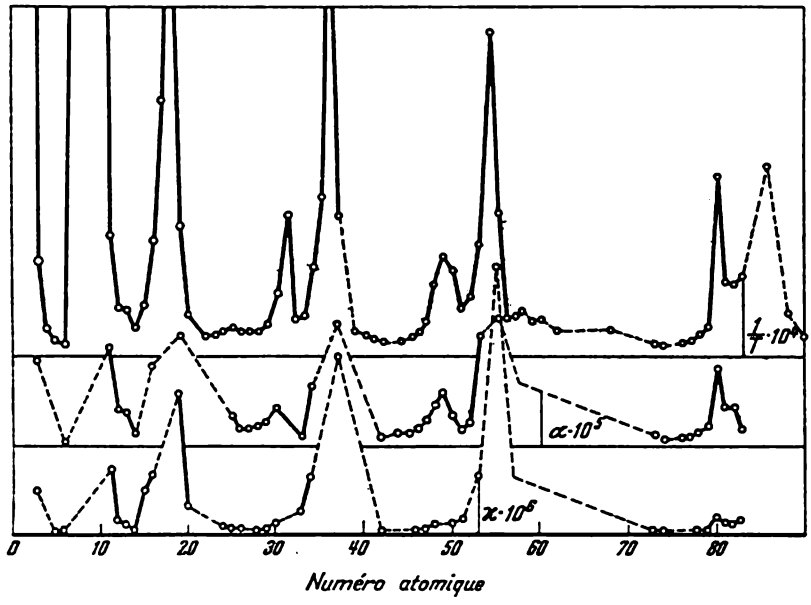


Fig. 23. Périodicité des propriétés physiques. La courbe du haut : valeurs inverses de la température de fusion $(1/T)\cdot 10^4$; la courbe du milieu : coefficient de dilatation linéaire $\alpha\cdot 10^5$; la courbe du bas : coefficient de compressibilité $\varkappa\cdot 10^6$. Pour des endroits marqués par des pointillés on ne possède pas d'information sûre

ment monotone du numéro atomique (poids atomique moyen) mais que les maximums et les minimums de toutes les courbes correspondent à la même valeur du numéro atomique, c'est-à-dire que toutes ces propriétés montrent une *même* périodicité.

Les formes adoptées pour la représentation de la classification naturelle des éléments peuvent être très variées. Généralement on rencontre deux types de tableaux : aux périodes longues et aux périodes courtes. En théorie les tableaux aux longues périodes sont mieux fondés (tableau III de la page 43).

Examinons les lignes successives de ce tableau. La première ligne n'est constituée que de deux éléments : elle débute par l'élément monovalent de l'hydrogène et se termine par le gaz noble, l'hélium. Le troisième élément, le lithium, est de nouveau monovalent; c'est un métal typique qui possède des propriétés alcalines bien marquées. A mesure qu'on se déplace vers la droite ces deux propriétés s'atténuent sensiblement et, progressivement, on voit apparaître des propriétés opposées; enfin, le neuvième élément, le fluor, apparaît comme un antipode du lithium : c'est un métalloïde typique qui possède des propriétés acides fortement marquées. Puis vient le gaz noble, le néon, suivi d'un métal alcalin, le sodium (n° 11), et toute la série des propriétés précédentes se répète, ainsi, après huit éléments (en y comptant

Tableau III

1 H 1,0080																	2 He 4,0026
3 Li 6,939	4 Be 9,0122												5 B 10,811	6 C 12,0111	7 N 14,0067	8 O 15,9994	9 F 18,9984	10 Ne 20,183
11 Na 22,9898	12 Mg 24,312												13 Al 26,9815	14 Si 28,086	15 P 30,9738	16 S 32,064	17 Cl 35,453	18 Ar 39,948
19 K 39,102	20 Ca 40,08		21 Sc 44,956	22 Ti 47,90	23 V 50,942	24 Cr 51,996	25 Mn 51,938	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,71	29 Cu 63,54	30 Zn 65,37	31 Ga 69,72	32 Ge 72,59	33 As 74,9216	34 Se 78,96	35 Br 79,909	36 Kr 83,80
37 Rb 85,47	38 Sr 87,62		39 Y 88,905	40 Zn 91,22	41 Nb 92,906	42 Mo 95,94	43 Te 99	44 Ru 101,07	45 Rh 102,905	46 Pd 106,4	47 Ag 107,87	48 Cd 112,40	49 In 114,82	50 Sn 118,69	51 Sb 121,75	52 Te 137,60	53 I 126,9044	54 Xe 131,30
55 Cs 132,905	56 Ba 137,34	57 La 138,92	58-71 Voir la série des La	72 Hf 178,49	73 Ta 180,948	74 W 183,85	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,09	79 Au 196,967	80 Hg 200,59	81 Tl 204,37	82 Pb 207,19	83 Bi 208,98	84 Po 210	85 At (210)	86 Rn 222
87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac 227	90-103 Voir la série des Ac	104 Ku 261														

Série des lanthanides	58 Ce 140,12	59 Pr 140,907	60 Nd 144,24	61 Pm (150,35)	62 Sm 150,35	63 Eu 151,96	64 Gd 157,24	65 Tb 158,924	66 Dy 162,50	67 Ho 164,93	68 Er 167,16	69 Tm 168,934	70 Yb 173,04	71 Lu 174,97
Série des actinides	90 Th 232,38	91 Pa 231	92 U 238,03	93 Np 237	94 Pu (242)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (249)	98 Cf (251)	99 Es (254)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (255)	103 Lw (256)

le sodium) on trouve de nouveau un métal alcalin, le potassium, précédé par un gaz noble, l'argon (n° 18).

La transition des métaux typiques aux métalloïdes typiques s'effectue par l'intermédiaire d'un élément « amphotère », le silicium (n° 14), qui présente deux modifications : l'une métallique et l'autre non métallique. La période suivante, la quatrième, commence par le potassium et comprend non pas huit mais déjà 18 éléments, car le métal alcalin qui suit le potassium, le rubidium, se place dans la 37^{e} case. Le rubidium est suivi d'une nouvelle grande période qui est également composée de 18 éléments et se termine à la 54^{e} place par le gaz noble, le xénon. Puis de nouveau vient un métal alcalin, le cæsium (n° 55), par lequel débute la plus longue des périodes comprenant 32 éléments. Parmi ces 32 éléments une série à part est formée par les 14 éléments qui suivent le lanthane, de la 58^{e} à la 71^{e} case, et constitue les terres rares ou les « lanthanides » aux propriétés chimiques si proches qu'il est difficile de les séparer au chimiste. C'est justement cette similitude des propriétés des lanthanides qui a permis de leur réserver dans le tableau une même case et toute la série est produite séparément. La dernière période débutant par le 87^{e} élément est composée d'éléments instables naturellement radioactifs. L'élément le plus lourd de cette période, rencontré dans la nature, l'uranium (n° 92), jusqu'à une époque récente était le dernier élément du système périodique. Ces dernières années on est toutefois arrivé à synthétiser des éléments transuraniens plus lourds, jusqu'à l'élément au numéro 104. L'étude de leurs propriétés chimiques et la révision des propriétés des éléments qui les précèdent ont montré que l'élément appelé le thorium (n° 90) qui suit l'actinium (n° 89) ouvre une série d'éléments aux propriétés chimiques voisines, les actinides, série semblable aux métaux des terres rares, les lanthanides.

La forme de présentation de beaucoup plus répandue du système des éléments est le tableau aux périodes courtes (tableau IV à la page 45). Son avantage essentiel est sa compacité, son défaut est le caractère artificiel de la classification des éléments en huit groupes par l'introduction de sous-groupes et de « triades » (dans le VIII^{e} groupe).

§ 13. Détermination des masses vraies des atomes. Méthode des paraboles

Il découle du paragraphe précédent que la détermination des masses vraies et non des masses atomiques moyennes est un problème très important. Les déterminations actuelles les plus précises des masses atomiques, basées exclusivement sur les *différences de masses* des atomes isolés et indépendantes de toutes autres propriétés sont réalisées à l'aide de la déviation des ions de différents gaz par des champs électrique et magnétique. Pour la première fois cette méthode a été proposée par J. J. Thomson.

Si dans la cathode d'un tube à décharge fonctionnant à basse pression (de centièmes de mm Hg) on perce une ouverture, alors les ions se dirigeant vers la cathode passeront par cet orifice et formeront derrière la cathode

Tableau IV

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			0
1	1 H 1,0080										2 He 4,0026
2	3 Li 6,939	4 Be 9,0122	5 B 10,811	6 C 12,011	7 N 14,0067	8 O 15,9994	9 F 18,9984				10 Ne 20,183
3	11 Na 22,9898	12 Mg 24,312	13 Al 26,9815	14 Si 28,086	15 P 30,9738	16 S 32,064	17 Cl 35,453				18 Ar 39,948
4	19 K 39,102	20 Ca 40,08	21 Sc 44,956	22 Ti 47,90	23 V 50,942	24 Cr 51,996	25 Mn 54,938	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,71	
	29 Cu 63,54	30 Zn 65,37	31 Ga 69,72	32 Ge 72,59	33 As 74,9216	34 Se 78,96	35 Br 79,909				36 Kr 83,80
5	37 Rb 85,47	38 Sr 87,62	39 Y 88,905	40 Zr 91,22	41 Nb 92,906	42 Mo 95,94	43 Tc 99	44 Ru 101,07	45 Rh 102,9	46 Pd 106,4	
	47 Ag 107,87	48 Cd 112,40	49 In 114,82	50 Sn 118,69	51 Sb 121,75	52 Te 127,60	53 I 126,9044				54 Xe 131,30
6	55 Cs 132,905	56 Ba 137,34	57 La* 138,92	72 Hf 178,49	73 Ta 180,948	74 W 183,85	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,09	
	79 Au 196,967	80 Hg 200,59	81 Tl 204,37	82 Pb 207,19	83 Bi 208,98	84 Po 210	85 At 210				86 Rn 222
7	87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac** 227	104 Ku (261)							

* 58-71 Série des lanthanides	58 Ce 140,12	59 Pr 140,97	60 Nd 144,24	61 Pm 150,35	62 Sm 150,35	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,924	66 Dy 162,50	67 Ho 164,93	68 Er 167,26	69 Tm 168,934	70 Yb 173,04	71 Lu 174,97
** 90-98 Série des actinides	90 Th 232,038	91 Pa 231	92 U 238,03	93 Np 237	94 Pu (242)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (249)	98 Cf (251)	99 Es (254)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (255)	103 Lw (256)

un pinceau de rayons appelés *rayons canaux* (ou rayons positifs). Ces rayons canaux sont essentiellement composés d'ions positifs de gaz résiduels se trouvant dans le tube; on rencontre également dans leur composition, mais en moindre proportion, des particules neutres et des ions négatifs formés par recombinaison des ions positifs et des électrons derrière la cathode.

La méthode Thomson permet de déterminer les masses relatives des particules entrant dans la composition du faisceau de rayons canaux de la façon suivante. Les rayons canaux s'obtiennent en faisant passer des ions produits et accélérés dans le tube à décharge à travers le canal K (fig. 24)

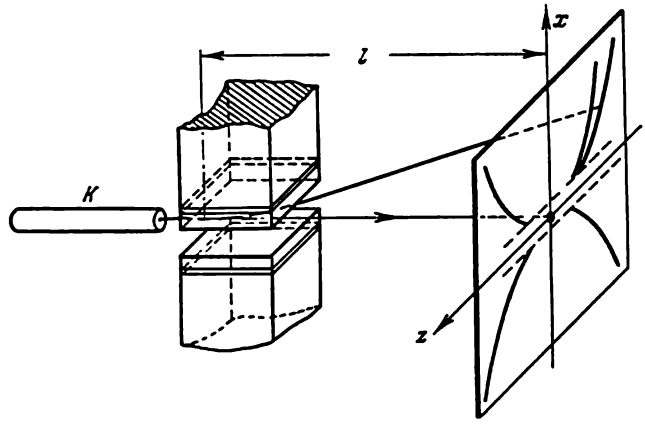


Fig. 24. Représentation schématique de la méthode des paraboles

d'une longueur de 2 cm et d'un diamètre de 0,1 mm. Grâce à la longueur importante du canal le pinceau obtenu est presque parallèle; il contient des particules d'énergies différentes, allant jusqu'à la valeur maximale réglée par la tension établie dans le tube. Le pinceau de rayons canaux est alors soumis à l'action des champs transversaux électrique et magnétique dirigés parallèlement et antiparallèlement. Dans ce cas, les particules chargées sont déviées par les champs électrique et magnétique dans des directions perpendiculaires et, comme on l'a vu au § 10, si le pinceau est composé de particules de masse identique mais de vitesses différentes, les champs électrique et magnétique le dévient de façon qu'il frappe l'écran fluorescent perpendiculaire à la direction initiale du pinceau ou une plaque photographique en y laissant une trace en forme de segment de parabole représentée de façon plus détaillée sur la figure 25.

Supposons que la déviation électrique soit dirigée suivant l'axe x et la déviation magnétique suivant l'axe z. Alors, comme il a été montré au § 10, z et x sont liés par la relation

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2}{B}\frac{e}{m}, \qquad (10.1)$$

où A et B sont des données de l'instrument (voir § 4). De (10.1) on obtient

$$z^2 \frac{m}{e} = \frac{A^2}{B} x. \qquad (13.1)$$

La charge de l'ion ne peut être qu'un multiple entier de la charge de l'électron (c'est-à-dire peut être égale à $+e$, $+2e$, ...). Si tous les ions sont chargés une seule fois, alors, comme le montre la formule (13.1), pour des valeurs constantes des abscisses x les masses des ions sont inversement proportionnelles au carré des ordonnées (voir fig. 25).

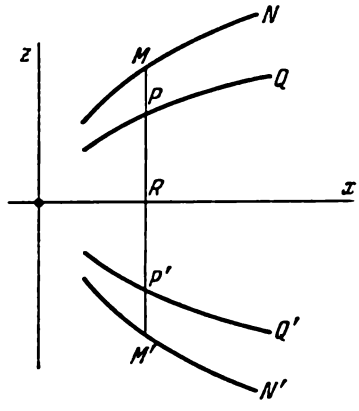


Fig. 25.

L'origine des coordonnées est marquée sur la plaque par les particules non chargées qui ne sont pas déviées par les champs électrique et magnétique, mais il n'y a évidemment aucun axe de coordonnées sur la plaque. Pour pouvoir mesurer les ordonnées nécessaires à la détermination des masses il faut inverser l'orientation du champ magnétique au cours de l'expérience (à la différence de l'expérience sur l'estimation de la dépendance de la masse de l'électron de la vitesse, décrite au § 10, et où l'on inversait le champ électrique), ce qui permet d'obtenir à côté des segments de paraboles MN et PQ des segments symétriques $M'N'$ et $P'Q'$.

Si dans le pinceau à côté des ions chargés une seule fois on rencontre des ions doublement chargés (par exemple O^+ et O^{++}), ces derniers donnent une parabole correspondant à la moitié de la masse (par exemple, la parabole de O^{++} correspond à une masse de 8). Il existe toutefois des indices extérieurs qui permettent de différencier les paraboles de particules à charges multiples des paraboles de particules à charge unique.

Sur la figure 26 on a représenté deux photographies de paraboles obtenues par cette méthode, mais sur des dispositifs modernes améliorés. Sur la photo de gauche on voit distinctement deux paraboles formées d'ions à charge unique d'une même substance, le néon, qui montrent clairement que ce dernier possède deux isotopes de masses 20 et 22. Ces photographies montrent qu'avec des pièces arrangées convenablement et une mise au point précise de l'instrument on peut obtenir des paraboles sous forme de fines traces séparées par des espaces suffisamment grands, malgré la faible différence de masses. Le pouvoir résolvant maximum obtenu de cette façon est égal à $^1/_{600}$, c'est-à-dire que deux lignes se distinguant encore correspondent à des masses dont les valeurs diffèrent de $^1/_{600}$ (grossissement de 20 fois). Toutefois, un défaut important de l'appareil est son « ouverture relative » extrêmement faible : pour obtenir des lignes bien nettes il faut utiliser des fentes très étroites, de plus les champs électrique et magnétique provoquent l'étalement du faisceau de particules et affaiblissent, par consé-

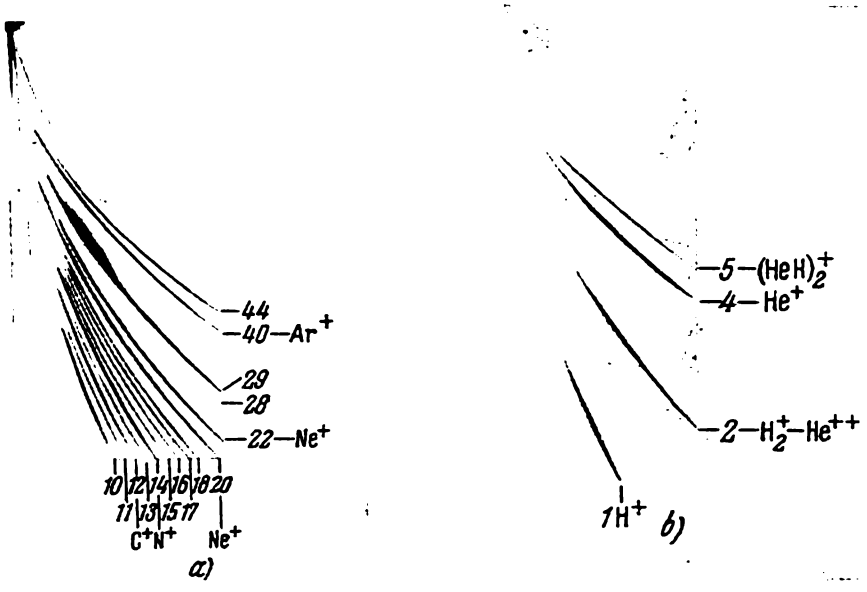


Fig. 26. Paraboles d'ions de gaz différents

quent, l'intensité de la trace. Ces conditions rappellent à certains égards ce qui a lieu dans une chambre photographique démunie de l'objectif et possédant une petite ouverture : en diminuant le diamètre de cet orifice on peut obtenir une image aussi nette que l'on veut mais en augmentant l'exposition jusqu'à des durées pratiquement inacceptables.

§ 14. Spectrographes de masse

Les méthodes qui à l'aide de combinaisons variées de champs électriques et magnétiques permettent de focaliser des particules chargées offrent par rapport à la méthode des paraboles de grands avantages. Ces dispositifs portent le nom de spectrographes de masse; le prototype de cet instrument a été réalisé par F. W. Aston.

Ce spectrographe présente le montage suivant. Les ions chargés positivement sont fournis par la décharge dans un tube à faible pression. Par l'orifice dans la cathode ces ions passent derrière la cathode en un faisceau de particules positives et y sont analysés. Dans ce but le faisceau est avant tout rendu parallèle à l'aide de deux fentes de collimateur B_1 et B_2 larges de 0,02 mm (fig. 27). Un condensateur P_1P_2 déploie ce faisceau en infligeant aux particules une déviation proportionnelle à e/mv^2. Une partie de ce faisceau déployé traverse l'écran C par la fente B_3 et est soumise à un champ magnétique produit par l'électro-aimant aux pièces polaires M. A la différence de la méthode Thomson où le champ magnétique est dirigé parallèlement

ou antiparallèlement au champ électrique, dans le dispositif d'Aston le champ magnétique est dirigé *perpendiculairement* au champ électrique. Par suite, la déviation des particules sous l'influence du champ magnétique s'effectue ici dans le même plan que la déviation électrique, l'orientation du champ magnétique étant choisie de façon que les particules dévient dans le sens opposé à la déviation électrique. Dans ces conditions le champ magnétique rassemble en fin de compte les particules de même masse (plus précisément de même valeur du rapport e/m), mais de vitesses différentes, au même foyer de la plaque S. En effet, la déviation subie par les ions dans

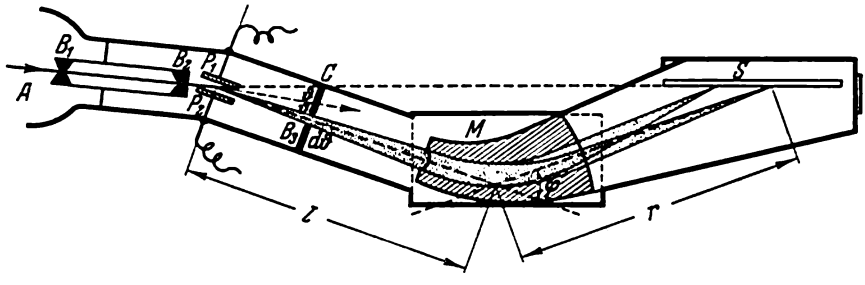


Fig. 27. Schéma du spectrographe de masse d'Aston

le condensateur est proportionnelle à e/mv^2 tandis que le rayon de courbure de la trajectoire dans le champ magnétique, suivant la formule (4.9), est proportionnel à mv/e. C'est pourquoi les particules ayant le plus dévié dans le champ électrique décrivent dans le champ magnétique des trajectoires de moindre rayon de courbure (fig. 27). En définitive le champ magnétique fera converger le faisceau d'ions déployé au foyer commun. La forme spéciale des pièces polaires, montrée sur le dessin, favorise la convergence des particules au foyer.

L'exemple suivant, tiré de l'optique, permet de mieux comprendre le fonctionnement de l'appareil : un faisceau de rayons parallèles de lumière blanche (fig. 28) en passant à travers le prisme P_1 s'étale en un spectre. Un second prisme P_2, disposé de façon que son sommet soit tourné dans le sens opposé au premier et possédant un pouvoir dispersif plus grand, rassemble de nouveau ces rayons différemment colorés au « foyer » blanc. Ici, le premier prisme correspond au champ électrique et le second au champ

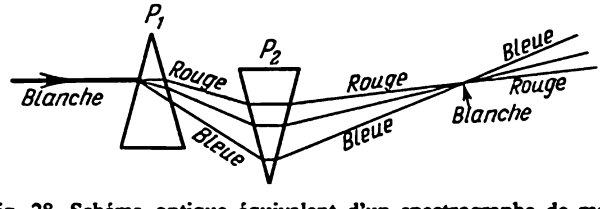


Fig. 28. Schéma optique équivalent d'un spectrographe de masse

magnétique; les rayons de différentes longueurs d'onde représentent les particules aux vitesses variables.

La théorie détaillée de l'instrument d'Aston est trop compliquée. On ne fera que quelques observations très simples permettant d'expliquer les conditions de convergence des particules. Soit $d\vartheta$ la largeur angulaire du faisceau déployé par le champ électrique et sortant de la fente B_3. Si l est la distance du milieu du condensateur au centre du champ magnétique et r la distance du centre du champ magnétique au foyer, alors en l'absence du champ magnétique le faisceau déployé par le champ électrique acquerra à la distance $l+r$ une largeur $(l+r)\,d\vartheta$. Pour la convergence des rayons cette largeur doit être compensée par une déviation magnétique de sens opposé. Si $d\varphi$ est la largeur angulaire acquise par le faisceau à la suite de la déviation magnétique, alors $r\,d\varphi$ sera sa largeur linéaire à la distance r. Il est nécessaire pour que la focalisation se réalise que la déviation électrique soit compensée par la déviation magnétique. D'où la condition

$$(l+r)\,d\vartheta - r\,d\varphi = 0. \tag{14.1}$$

Examinons pour commencer un faisceau homogène en masse, autrement dit, posons que pour toutes les particules du faisceau on a $e/m=\text{const}$. La déviation z dans un champ électrique uniforme d'un faisceau de particules parallèles suivant les formules (4.11) et (4.12) sera

$$z = \frac{e}{2mv^2}\mathcal{E}a^2$$

où a est la longueur du condensateur. D'où pour de petits angles de déviation ϑ on a

$$\vartheta \approx \operatorname{tg}\vartheta = \frac{z}{a} = \frac{e}{2mv^2}\mathcal{E}a$$

et par suite

$$\vartheta v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,\mathcal{E}a = \text{const}.$$

En dérivant on obtient $v^2\,d\vartheta + 2v\vartheta\,dv = 0$ ou

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -2\,\frac{dv}{v}. \tag{14.2}$$

Le rayon de courbure de la trajectoire dans un champ magnétique uniforme suivant (4.9) est égal à

$$\varrho = \frac{mv}{e}\,\frac{1}{\mathcal{H}}.$$

D'où l'angle de déviation φ dans un champ magnétique

$$\varphi = \frac{L}{\varrho} = \frac{e}{mv}L\mathcal{H},$$

où L est la longueur du chemin dans le champ magnétique. Comme précédemment on obtient $\varphi v=\frac{e}{m}L\mathcal{H}=\text{const}$, $\varphi\, dv+v\, d\varphi=0$,

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=-\frac{dv}{v}. \tag{14.3}$$

Portant $d\vartheta$ et $d\varphi$ tirés de (14.2) et de (14.3) dans (14.1) on trouve

$$\frac{dv}{v}[(\varphi-2\vartheta)r-2l\vartheta]=0.$$

Comme $dv/v\neq 0$, cette condition ne sera remplie que si la parenthèse est nulle, c'est-à-dire

$$(\varphi-2\vartheta)r=2l\vartheta. \tag{14.4}$$

Le sens géométrique de cette relation peut s'expliquer à l'aide de la figure 29. Soit Z le milieu du champ électrique du condensateur, O le milieu

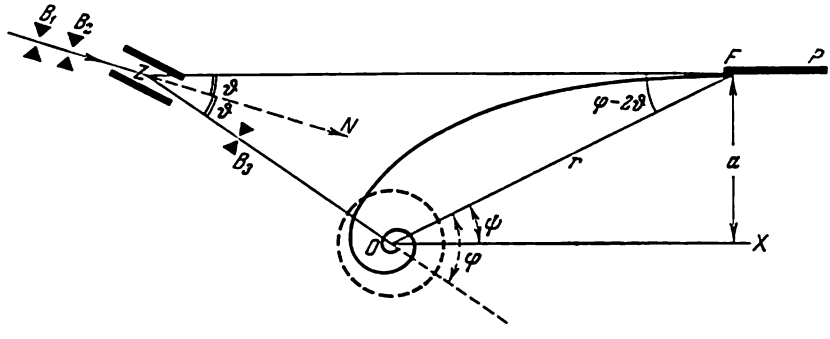


Fig. 29. Explication géométrique de la focalisation dans un spectrographe de masse d'Aston

du champ magnétique, F le foyer où convergent les particules de masse choisie. ZN est la direction du flux de particules positives avant leur déviation. Si dans le triangle OZF l'angle au sommet Z est égal à 2ϑ, comme c'est montré sur le dessin, alors d'après le «théorème trigonométrique des sinus» on obtient, en tenant compte de ce que $ZO=l$ et $OF=r$ (voir fig. 27),

$$\frac{r}{\sin 2\vartheta}=\frac{l}{\sin(\varphi-2\vartheta)}. \tag{14.5}$$

Pour de petits angles la relation (14.5) donne immédiatement (14.4).

Jusque-là on avait en vue des particules pour lesquelles e/m avait des valeurs déterminées. Il apparaît, toutefois, que si la plaque FP avait été placée de façon que la droite ZF se trouve dans son plan, alors sur la plaque on aurait simultanément les foyers relatifs aux différentes valeurs de e/m. En effet, choisissons comme axe polaire la droite OX parallèle à ZF. Dans ce cas, le rayon vecteur tracé vers F est égal à r et l'angle polaire

ψ, comme c'est montré sur le dessin, est égal à $\varphi-2\vartheta$. La distance a entre ZP et OX est égale à $r\sin(\varphi-2\vartheta)$ ou selon (14.5)

$$a=r\sin(\varphi-2\vartheta)=l\sin 2\vartheta\approx 2l\vartheta.$$

Or comme l'angle ϑ est fixé par la position de la fente B_3 (fig. 27), *a ne peut être qu'une constante.* En utilisant les notations $\varphi-2\vartheta=\psi$, $2l\vartheta=a$, de (14.4) on tire

$$r=\frac{a}{\psi}. \tag{14.6}$$

Puisque a est une constante, (14.6) est l'équation de la spirale hyperbolique*). Cette spirale exécute un nombre infini de révolutions en s'approchant de l'origine des coordonnées mais sans l'atteindre; elle a pour asymptote une droite parallèle à l'axe polaire qui en est distante de a. C'est pourquoi si on place la plaque photographique de la manière que cette asymptote se dispose dans son plan, alors tous les foyers auxquels correspondent des angles ψ inférieurs à une certaine valeur déterminée se trouveront dans le plan de la plaque et garantiront ainsi la netteté des raies du spectre de masse.

A la figure 30 on a représenté plusieurs spectres de masse obtenus à l'aide de l'appareil du type décrit. On y voit à quel point les raies du spectre y sont nettes. La distance qui les sépare (dispersion de l'appareil) est si grande que la mesure des masses et la différenciation des masses très proches peuvent être effectuées avec un haut degré de précision. En effet, pour une longueur du spectre de 16 cm on y voit se placer les raies d'atomes auxquels correspondent des masses se différenciant d'un peu plus que deux fois; une différence de masse de un pour cent correspond à une distance entre les raies variant de 1,5 à 3 mm (en différentes parties de la plaque).

La détermination des masses au moyen de ces spectres s'effectue de la façon suivante. Tout d'abord il faut choisir une masse connue qui sert de « standard », car le spectre de masse ne peut donner que des valeurs *relatives* des masses. Sur l'échelle dite physique des masses on prend pour base la masse de l'isotope du carbone $^{12}C=12$. En second lieu pour déterminer les masses inconnues il faut construire une courbe d'étalonnage en portant sur l'axe des abscisses les distances des raies à un point bien déterminé pris sur la plaque et sur l'axe des ordonnées les masses correspondantes. Cette échelle des masses peut être étalonnée à l'aide des raies associées aux masses dont les rapports sont connus avec précision. Par exemple, aux raies de l'atome et de la molécule d'oxygène O et O_2 il faut attribuer les masses 16 et 32; aux ions O^+ et O^{++} de charge unique et de charge double on doit attribuer les masses 16 et 8, etc.

Sur la figure 31 on a donné un exemple de courbe d'étalonnage du spectrographe d'Aston. Comme on le voit, elle diffère peu de la droite,

*) Voir, par exemple, le livre de V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, tome I, Editions Mir, Moscou, 1972 (traduit du russe).

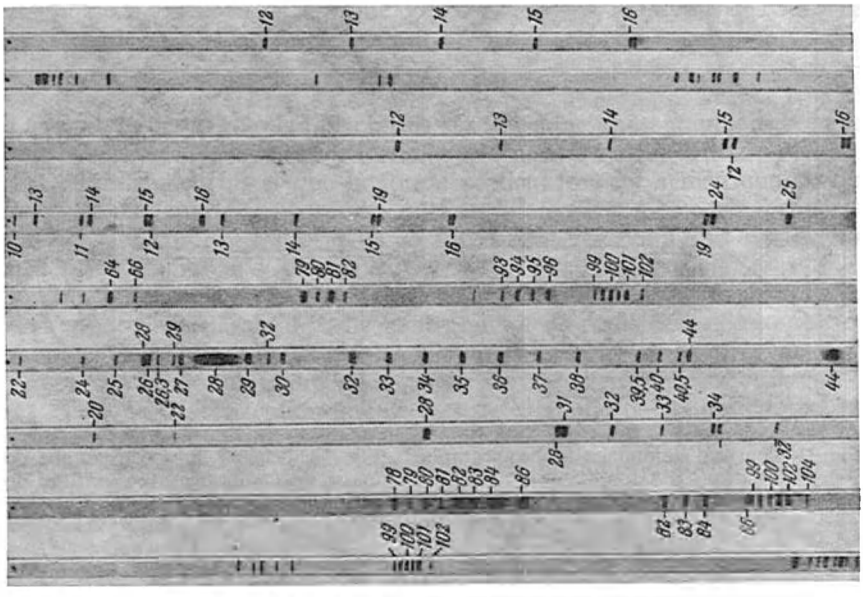


Fig. 30. Quelques spectres de masse typiques

ce qui assure une grande précision. Pour obtenir le maximum de précision on utilise des méthodes plus compliquées qu'on s'abstiendra de décrire*).

Bainbridge utilisa dans son appareil une association tout à fait différente des champs électrique et magnétique. Le spectrographe de masse qu'il construisit est d'un montage très simple, mais fournit des résultats dans bien des cas plus précis que le spectrographe d'Aston. Le schéma du spectrographe de Bainbridge est le suivant : un faisceau de rayons positifs est rendu parallèle à l'aide de deux fentes de collimateur S_1 et S_2 (fig. 32). Ce faisceau parallèle, comprenant des ions de masses et vitesses différentes, passe ensuite dans un condensateur P_1P_2 qui se trouve dans un champ magnétique transversal perpendiculaire au plan du dessin. Ce système, comme il a été montré au § 9, constitue un filtre de vitesses. Ce filtre simplifie énormément le problème. En effet, le filtre laisse passer à travers la fente S_3 des ions de masses différentes mais de même vitesse v_0. En traversant la fente S_3 ces ions décrivent des trajectoires circulaires dans un champ magnétique uniforme transversal. Selon la formule (4.9), les rayons de courbure de ces trajectoires sont proportionnels à la quantité de mouvement des ions :

$$\varrho = \frac{mv_0}{e\mathcal{H}}, \tag{4.9}$$

*) Voir le livre de T. Rik, *Spectroscopie de masse*, Gostekhizdat, Moscou, 1953 (en russe).

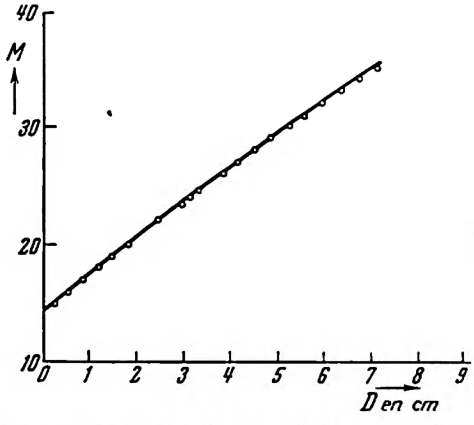


Fig. 31. Courbe d'étalonnage du spectrographe d'Aston.

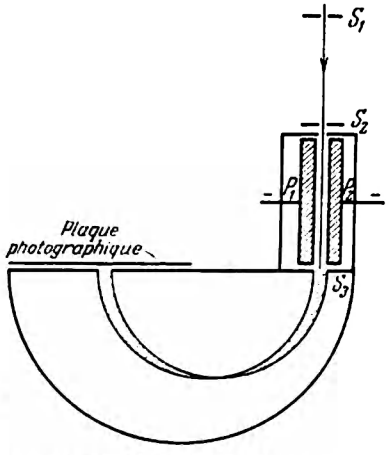


Fig. 32. Schéma du spectrographe de masse de Bainbridge avec un filtre de vitesses

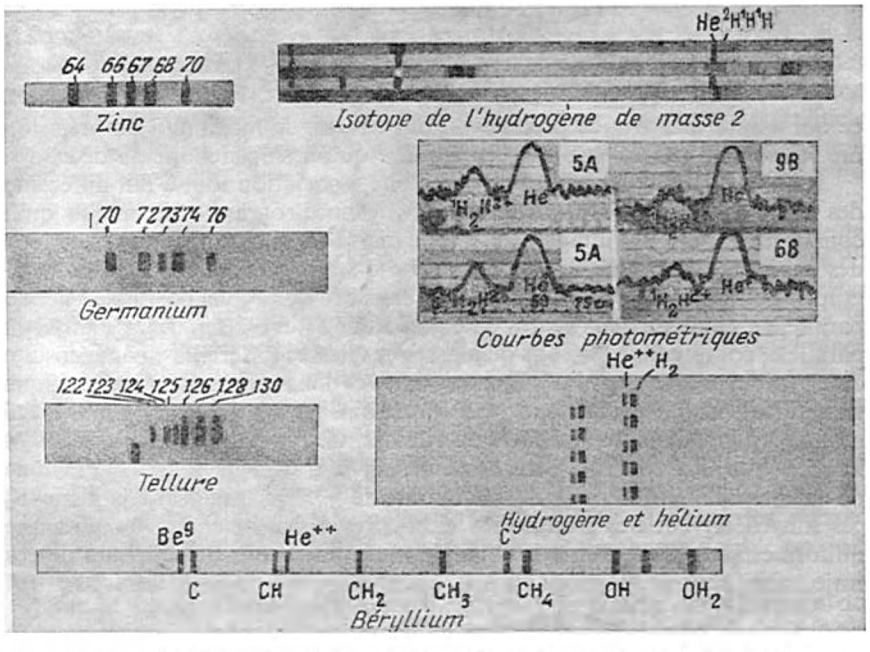


Fig. 33. Exemples de spectres de masse obtenus au moyen du spectrographe de Bainbridge. A gauche sont représentés les isotopes du zinc, du germanium et du tellure; à droite, les spectres confirmant l'existence de l'isotope de l'hydrogène de masse 2. Le spectre du bas montre l'absence d'isotopes pour le béryllium

et comme la vitesse v_0 est la même pour tous les ions, les rayons de courbure des ions de masses différentes seront proportionels aux masses :

$$\varrho = \text{const} \cdot m.$$

La distance des raies à la raie choisie sur la plaque photographique comme repère sera également proportionnelle à la masse. La linéarité de l'échelle de cet instrument ainsi que la forme particulièrement symétrique de ces raies, permettant de comparer des raies se différenciant même très fortement en intensité, contribuent à rendre cet instrument beaucoup plus avantageux que le spectrographe d'Aston.

Sur la figure 33 on a donné plusieurs spectres de masse obtenus à l'aide de l'appareil de Bainbridge. Le haut pouvoir de résolution de ce spectrographe apparaît dans le fait que les raies de la molécule de l'hydrogène et de l'ion hélium à double charge He^{++} sont très espacées.

Quoique de conception simple le spectrographe de Bainbridge est en réalité une installation encombrante. Son élément le plus important est un énorme électro-aimant créant un champ magnétique uniforme de 15 000 œrsteds sur l'aire d'un demi-cercle de diamètre de 40 cm pour une distance entre les pôles de 1,8 cm.

§ 15. Spectromètres de masse et spectrographes de masse à double focalisation

Les spectrographes de masse décrits dans le paragraphe précédent permettent de déterminer la masse atomique de types isolés d'atomes avec une grande précision (de l'ordre de cinq décimales). En utilisant les méthodes de photométrie photographique on peut évidemment suivant le degré de noircissement de la plaque dans certaines raies du spectre effectuer de même une comparaison entre le pourcentage des masses des raies relatives. Or, d'abord les méthodes de photométrie photographique sont particulièrement ardues et ne fournissent pas de résultats précis, d'autre part, la détermination du pourcentage d'isotopes peut être faite plus rapidement et avec une plus grande précision à l'aide d'instruments appelés spectromètres de masse. Dans ces instruments l'enregistrement des ions de masse déterminée s'effectue toujours non pas par des voies photographiques mais électriques : d'après la valeur de la charge transportée par les ions de masses considérées, ou bien d'après l'intensité du courant ionique. Par suite, pour déterminer le pourcentage il n'est plus nécessaire d'effectuer des mesures complémentaires : les indications d'instruments de mesures électriques sont simplement proportionnelles au nombre d'ions du type considéré.

Les spectromètres de masse permettent également de déterminer les masses atomiques, cependant avec des précisions moindres que les spectrographes de masse. Ils ont acquis ces derniers temps une grande importance pratique par suite de l'élargissement de leur utilisation dans l'analyse chimique des gaz (par exemple, pour l'analyse des hydrocarbures) et aussi parce que les installations électromagnétiques de séparation des isotopes

dont on parlera plus bas (§ 19) constituent des spectromètres de masse de grande puissance.

L'une des particularités importantes des spectromètres de masse est leur fonction de focalisation des faisceaux d'ions divergents. Lors de la description du spectrographe de masse d'Aston on a vu que par focalisation on entendait dans cet instrument la convergence au foyer des particules de même masse mais de vitesses différentes. Dans ce but, cependant, le faisceau d'ions était tout d'abord transformé en un pinceau parallèle en le faisant passer par deux fentes étroites placées à des distances très grandes l'une de l'autre (B_1 et B_2 sur fig. 27). Mais ce procédé engendre une grande perte d'ions; en employant le langage des opticiens on peut dire que l'instrument gagne en netteté de l'image mais perd en intensité lumineuse. Dans le montage des spectromètres de masse on utilise une grande variété de méthodes de focalisation des faisceaux d'ions divergents en y incluant les méthodes de focalisation de directions et non pas uniquement de vitesses comme dans le spectrographe de masse d'Aston.

La solution de ce problème est actuellement grandement facilitée grâce au développement de la soi-disante optique géométrique électronique, c'est-à-dire à l'utilisation de la remarquable analogie entre la mécanique et l'optique géométrique pour le calcul des trajectoires de particules chargées dans des champs électriques et magnétiques. Cette méthode a reçu ces derniers temps un grand développement sous l'instigation de nombreuses applications pratiques, en particulier dans la télévision, le montage des microscopes électroniques, etc.

La méthode de convergence des directions, la plus ancienne et largement utilisée dans les montages des spectromètres de masse, se ramène à une focalisation par un champ magnétique transversal à une distance de 180° (ou π radians). Au § 9 on a vu qu'un faisceau d'ions faiblement divergent de valeur e/m déterminée se focalise après avoir décrit un demi-cercle dans un champ magnétique transversal uniforme, agissant tout au long du trajet des ions. Ce phénomène est à la base du montage du spectromètre de masse construit pour la première fois par Dempster (fig. 34) presque simultanément

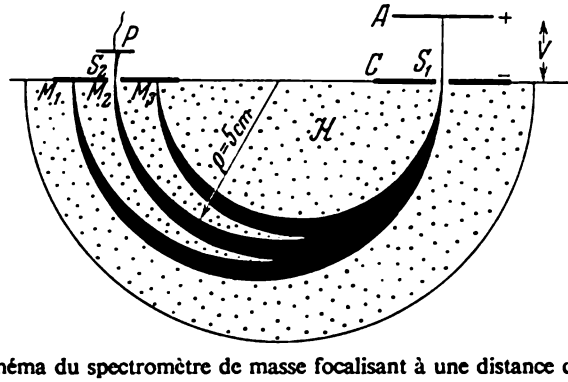


Fig. 34. Schéma du spectromètre de masse focalisant à une distance de π radians

avec le spectrographe de masse d'Aston (1918). Les ions émis par la source A (après chauffage des sels du métal étudié*)) acquièrent une même énergie sous l'action de la différence de potentiel V appliquée entre A et C. Par la fente S_1 le faisceau d'ions divergents passe dans la région où agit le champ magnétique transversal uniforme $\mathcal{H}$. Les ions dont e/m est variable convergent, comme c'est montré sur la figure, vers différents points. Si, comme c'est le cas, l'énergie des ions est la même, on peut établir une relation simple entre le rayon de courbure fixant la position du foyer et la masse (plutôt m/e). En effet, on a

$$\frac{mv^2}{2} = eV, \tag{5.4}$$

$$\varrho = \frac{mv}{e\mathcal{H}}, \tag{4.9}$$

d'où on tire immédiatement

$$\frac{m}{e} = \frac{\mathcal{H}^2\varrho^2}{2V},$$

ou

$$\varrho^2 = \frac{2\frac{m}{e}}{\mathcal{H}^2} V.$$

En choisissant la valeur de la tension accélératrice de façon que pour m/e donné le rayon de courbure ϱ atteigne une valeur déterminée, par exemple 5 cm, comme c'est indiqué sur la figure 34, on peut faire passer par la fente S_2 des ions de masse quelconque. Le potentiel auquel est porté dans ce cas le collecteur P (ou l'intensité du courant ionique attaquant le collecteur) sert de mesure de la quantité d'ions de masse considérée.

Les perfectionnements de cette méthode effectués ces derniers temps sont en rapport avec la tendance d'obtenir la plus grande quantité d'ions possible. Par exemple, dans le spectromètre de masse de Bleakney qui fut le prototype d'une série de constructions ultérieures on y arrive de la façon suivante. Les ions sont générés dans l'espace entre l'électrode P_1 et la fente P_2 (fig. 35) par un flux d'électrons perpendiculaire au plan du dessin et le coupant au point S. Le solénoïde J crée le champ magnétique transversal uniforme également perpendiculaire au plan du dessin (autrement dit parallèle au faisceau d'électrons) interdisant au faisceau d'électrons de diverger. Les ions ainsi formés sont expulsés par un faible champ électrique entre P_1 et P_2 dans l'espace entre les fentes P_2 et P_3 où agit un champ électrique beau-

*) Si l'anode est recouverte d'un sel métallique puis portée à incandescence, alors après décharge dans un gaz raréfié on voit apparaître un flux d'ions positifs du métal sous la forme de rayons anodiques, or et, c'est très important, l'énergie des ions formés est très faible; en tout cas elle est de beaucoup inférieure à celle que les ions acquièrent après accélération ultérieure grâce à quoi tous les ions possèdent la même énergie, car les faibles différences de l'énergie initiale peuvent être négligées.

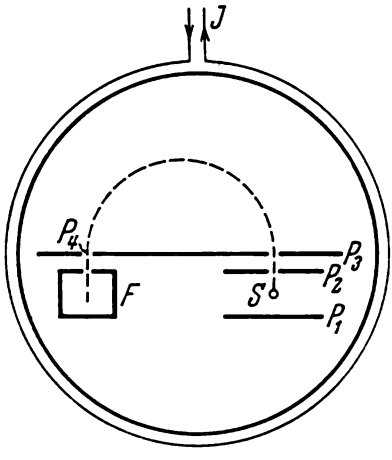


Fig. 35. Schéma du spectromètre de masse de Bleakney

coup plus intense. Après avoir passé à travers la fente P_3 les ions sont focalisés par le champ magnétique à une distance de π radians, comme il a été expliqué plus haut. En choisissant une valeur convenable pour le champ magnétique on peut obliger les ions à passer à travers la fente P_4 dans le cylindre de Faraday F dont la charge est la mesure de l'intensité du courant d'ions de masse considérée. Toutes les fentes sont très étirées afin d'augmenter le nombre d'ions qui les traversent.

La figure 36 fournit l'exemple de l'analyse de la composition en isotopes du cadmium réalisée à l'aide d'un spectromètre perfectionné du type décrit. Les nombres sur l'axe des abscisses sont des masses atomiques arrondies des isotopes; les maximums marqués correspondent aux isotopes du cadmium de masses 106, 108, 110, 111, 112, 113, 114 et 116. Les rapports des courants ioniques dont les valeurs se lisent sur l'axe des ordonnées donnent aussitôt le pourcentage des isotopes. Il est :

Nombre de masse	106	108	110	111	112	113	114	116
Pourcentage	1,215	0,875	12,39	12,75	24,07	12,26	28,86	7,58

Le champ magnétique transversal uniforme agissant tout au long du trajet en demi-cercle des ions, du point de vue de l'optique électronique, constitue une lentille cylindrique qui fournit l'« image » de la fente S_1. Dans l'optique électronique on démontre que le rôle de lentille cylindrique peut être également joué par le champ magnétique transversal uniforme dont l'action s'exerce dans un espace limité représenté par un secteur circulaire d'angle ϑ à condition que le rayon central du faisceau d'ions divergent pénètre dans le champ et en émerge normalement aux frontières du champ (fig. 37). Dans ce cas la convergence a lieu quel que soit l'angle du secteur circulaire, toutefois les angles β, γ et ϑ doivent être liés par la relation $\beta+\gamma+\vartheta=\pi$. Cette condition est remplie quand la source des ions, le sommet du secteur circulaire et le foyer sont alignés. En particulier, quand $\vartheta=\pi$ on obtiendra le cas déjà étudié de focalisation de trajectoires circulaires.

On peut également utiliser pour la convergence de faisceaux d'ions divergents un champ électrique radial d'un condensateur cylindrique; dans ce cas, comme on l'a vu au § 9, le foyer est éloigné de la source de 127° 17′ ou de $\pi/\sqrt{2}$ radians. Un montage très efficace est celui de l'association d'un

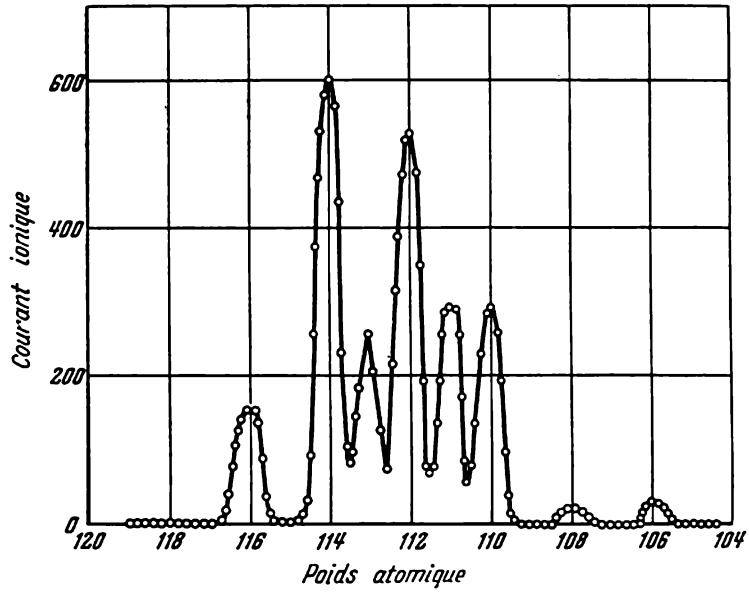


Fig. 36. Composition isotopique du cadmium

champ électrique radial et d'un champ magnétique transversal mise en œuvre dans certains spectromètres de masse (fig. 38).

La double focalisation par un champ électrique radial et un champ magnétique angulaire a été utilisée par Bainbridge et Jordan pour la construction de spectrographe de masse de grande ouverture relative et d'un pouvoir de résolution particulièrement élevé. Dans cet appareil (fig. 39) le faisceau d'ions divergent est d'abord focalisé par un champ électrique radial puis un champ magnétique angulaire (de 60°) donne sur la plaque photographique un spectre de masse plan. L'ouverture relative de cet instrument est telle que pour des raies brillantes le temps d'exposition peut être réduit jusqu'à 1 à 5 s, et, pour des raies les moins lumineuses, augmenté

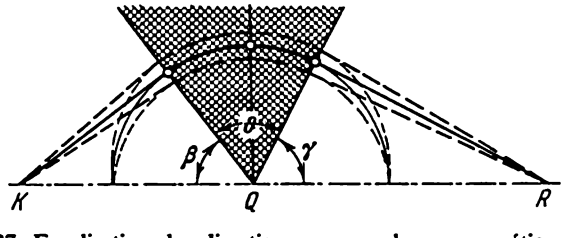


Fig. 37. Focalisation des directions par un champ magnétique limité

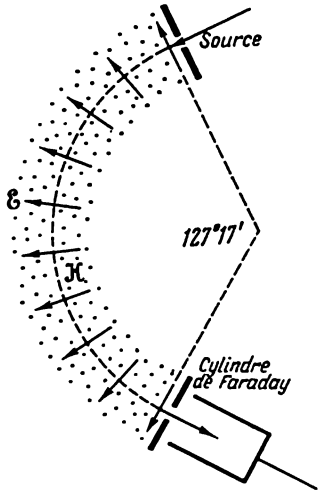


Fig. 38. Spectromètre de masse aux champs électrique et magnétique croisés

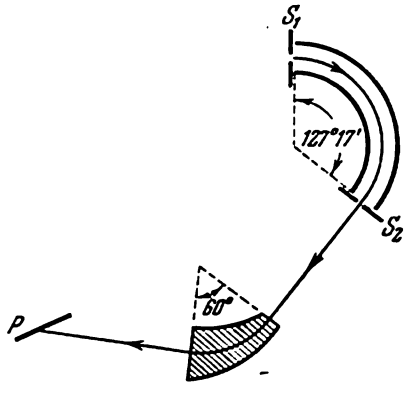


Fig. 39. Schéma du spectrographe de masse amélioré, d'après Bainbridge et Jordan

jusqu'à 180 s. Le pouvoir de résolution, c'est-à-dire le rapport de la différence de masses minimale ΔM, pour laquelle les raies sont vues séparément, à leur propre masse M varie suivant la largeur de la fente entre $^1/_{6000}$ et $^1/_{15000}$.

§ 16. Masses et pourcentage des isotopes

Au cours de l'étude des propriétés chimiques des éléments radioactifs on a découvert encore entre 1906 et 1910 qu'il existe des éléments non séparables par des procédés chimiques, mais différenciés par leur poids atomique. C'est le cas, par exemple, des couples d'éléments tels l'ionium et le thorium, le mésothorium et le radium. En se servant de sa méthode des paraboles J. J. Thomson montra en 1913 que le gaz néon non radioactif est également un mélange de deux sortes d'atomes chimiquement non séparables, c'est-à-dire d'isotopes de masse 20 et 22 (voir fig. 26, *a*), alors qu'en chimie on considère habituellement que le poids atomique du néon est 20,2. On aurait dû en conclure que ce poids atomique « chimique » de 20,2 est en réalité une moyenne des poids atomiques des deux isotopes 20 et 22. En utilisant le spectrographe de masse qu'il construisit Aston découvrit par la suite que les éléments possédant deux ou plusieurs isotopes ne constituaient en aucune sorte une exception; au contraire ce sont les éléments peu nombreux (sodium, fluor, etc.) pour lesquels on n'a pu observer d'isotopes qui font exception. Mais même dans ces cas, la découverte de la radioactivité artificielle a montré qu'en réalité ce ne sont que des isotopes *stables* (c'est-à-dire non radioactifs) qui manquent mais qu'il existe

toujours des isotopes radioactifs (^{22}Na, ^{24}Na radioactifs à côté de l'isotope stable ^{23}Na, etc.).

La détermination précise des masses atomiques des isotopes s'effectue avec des spectrographes de masse. En se servant des méthodes de photométrie photographique on peut également déterminer le pourcentage d'isotopes en fonction du degré de noircissement de la plaque photographique. Toutefois, il est plus simple, de même que plus précis, d'obtenir le pourcentage des isotopes au moyen de spectromètres de masse décrits dans le paragraphe précédent. Ces appareils permettent d'obtenir rapidement un pourcentage très précis.

Déjà les premières déterminations des masses atomiques vraies effectuées par Aston avec une incertitude de 0,001 montrèrent que la masse des atomes est toujours exprimée par des nombres quasi entiers comparés à la masse de l'oxygène prise égale à 16,000. Une exception est constituée par l'hydrogène dont la masse atomique dans les limites de précision indiquées diffère fortement de l'unité et est égale à 1,008. Les poids atomiques *chimiques* constituent des moyennes des masses de tous les isotopes de l'élément considéré et cela explique les écarts importants des nombres entiers de certains (peu nombreux) poids atomiques chimiques des éléments. Ainsi, par exemple, le magnésium a la composition suivante en isotopes :

Isotopes	24	25	26
Pourcentage	78,60	10,11	11,29

On en déduit la masse moyenne 24,33, alors que le poids atomique chimique du magnésium est égal à 24,31. Le tableau analogue pour le cadmium a été donné antérieurement.

La détermination des masses atomiques avec quatre ou cinq décimales s'effectue à l'aide de spectrographes de masse améliorés. Cette précision permet d'aboutir à des nombres qui s'écartent très peu des nombres entiers.

§ 17. Séparation des isotopes par la méthode de diffusion

Les éléments chimiques rencontrés dans la nature constituent des mélanges d'isotopes stables. De plus, à des rares exceptions, la composition de ces mélanges est strictement permanente. Il est évidemment intéressant d'obtenir certains isotopes à l'état pur. Cet objectif a actuellement une grande importance scientifique et technique. Cette importance a beaucoup augmenté ces dernières années par suite du développement de l'énergétique nucléaire.

Le problème de production d'isotopes purs ou même celui de l'enrichissement important du mélange d'isotopes par l'un d'entre eux est très ardu. En effet, pour séparer des isotopes il est indispensable d'utiliser celles de leurs propriétés qui dépendent de la masse. Mais la différence entre le pour-

centage des masses ne devient sensible que pour des isotopes d'éléments les plus légers. Par exemple, pour l'hydrogène la différence de masses entre l'isotope lourd (^{2}H ou D) et l'isotope léger (^{1}H) correspond à 100 % mais déjà pour les isotopes du carbone ^{12}C et ^{13}C cette différence est égale à 8,35 % et pour les isotopes de l'uranium ^{238}U et ^{235}U seulement 1,2 %.

Avant de passer à l'étude des méthodes de séparation des isotopes entendons-nous sur quelques termes qu'on utilisera dans la suite. Supposons qu'on entreprend la séparation d'un mélange de deux isotopes de masse différente et soit σ la part de l'un de ces isotopes avant la séparation et $\lambda=1-\sigma$ la part de l'autre isotope aussi avant la séparation; respectivement, soient Σ et $\Lambda=1-\Sigma$ les mêmes parts après la séparation. La quantité q définie par l'égalité

$$q=\frac{\Sigma/\Lambda}{\sigma/\lambda}, \tag{17.1}$$

sera appelée facteur de séparation. Par exemple le néon qu'on trouve dans la nature est composé pour 90 % d'atomes de masse 20 et pour 10 % de masse 22. Si l'on veut enrichir ce mélange en composant lourd de façon que sa part dans le mélange soit égale à 50 %, il faut que le facteur de séparation soit égal à

$$q=\frac{0{,}5/0{,}5}{0{,}1/0{,}9}=9.$$

Parmi les processus dépendant de la masse et, par conséquent, utilisables pour la séparation des isotopes on étudiera avant tout la diffusion. Soit un gaz consistant en un mélange de particules de deux sortes se différenciant par leur masse. Puisque le gaz se trouve en équilibre thermique, les énergies cinétiques moyennes des particules de deux sortes seront identiques : $\overline{m_1v_1^2}=\overline{m_2v_2^2}$ et, par conséquent, les vitesses moyennes seront inversement proportionnelles aux racines carrées des masses

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Par suite les particules plus légères devanceront au cours de la diffusion les particules plus lourdes qui par contre retarderont.

La possibilité de séparation d'un mélange de deux gaz par diffusion à travers une paroi poreuse (barrière) a été étudiée théoriquement par Rayleigh en 1896. Supposons qu'au moment initial d'un coté de la paroi on introduit un gaz constitué de deux espèces moléculaires de masses différentes alors que de l'autre coté on crée une dépression. Du fait de la diffusion le gaz s'enrichira en composant léger d'un côté de la paroi et en composant lourd de l'autre. Les conditions de la meilleure séparation selon Rayleigh sont : tout d'abord le diamètre des pores doit être sensiblement inférieur au libre parcours moyen des molécules et, en second lieu, le composant diffusé le plus lentement ne doit pas s'accumuler à la surface de la paroi poreuse.

En outre, il faut avoir en vue que la composition du mélange diffusé dépend non seulement du rapport des vitesses des molécules lourdes et

légères, mais également de la concentration relative de ces molécules dans le mélange initial. Cette remarque est très importante, car au cours de la diffusion le mélange initial s'appauvrira progressivement en molécules légères et, par suite, la composition du gaz traversant la paroi poreuse se différenciera de moins en moins de sa composition initiale.

Supposons maintenant que le gaz diffusé soit un mélange de deux isotopes de masses différentes mais très proches (comme il en est en réalité); dans ce cas, selon Rayleigh, le facteur d'enrichissement en composant lourd du gaz non diffusé s'exprime par la formule

$$q=\sqrt[\nu]{\frac{\text{volume initial}}{\text{volume final}}} \qquad (17.1')$$

où $\nu=\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}$ (m_1 et m_2 sont les masses des deux isotopes). Appliquons cette formule pour le néon. Les masses de ses isotopes sont $m_2=20$ et $m_1=22$; par suite $\nu=21$. Dans les premières expériences de séparation des isotopes du néon réalisées par Aston le rapport des volumes était probablement supérieur à 500 et inférieur à 10 000. Selon la formule (17.1') le facteur de séparation est égal à un nombre compris entre 1,3 et 1,5, c'est-à-dire de 6 à 7 fois inférieur à celui qu'il doit avoir pour que le mélange s'enrichisse en composant lourd jusqu'à 50 %. Dans le cas d'isotopes du chlore de masses 36 et 38 on soumet à la diffusion HCl; alors l'indice ν dans la formule (17.1') est déjà égal à 37 et pour une variation de volume de 10^4 fois le facteur d'enrichissement devient égal à 1,3.

Les exemples étudiés montrent qu'avec une diffusion unique on n'aboutira qu'à une petite variation du mélange des isotopes. Le résultat est tout à fait autre si l'on utilise une méthode à plusieurs étages ou à cascade, mise au point pour la première fois par G. L. Hertz. L'appareillage utilisé se composait des cellules reliées en série dont chacune séparait le gaz qui y pénétrait en deux parties se différenciant légèrement par leur composition. Pour comprendre l'idée de ce montage ainsi que son mode de fonctionnement il faut tout d'abord examiner séparément sa cellule de séparation.

Un schéma simplifié de cette cellule est représenté à la figure 40. Elle est composée d'un tube intérieur fabriqué avec une substance poreuse et placé dans un tube en verre plus large. Si à partir de la droite en A pénètre un gaz composé de deux particules de masses différentes, alors la partie de ce gaz diffusée dans le tube extérieur sera faiblement enrichie en composant léger; cette partie peut être aspirée par l'orifice B dans la cellule voisine de droite à l'aide d'une pompe, quant au résidu enrichi en composant lourd il s'écoulera à travers D dans la cellule voisine de gauche. Ainsi chaque cellule isolée séparera en fait le courant gazeux en deux parties se

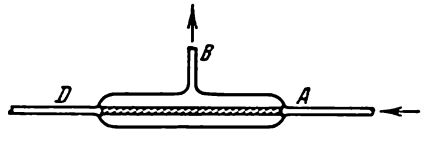


Fig. 40. Schéma simplifié de la cellule de séparation

différenciant légèrement en composition : à gauche on introduit le gaz enrichi en composant lourd et à droite, en composant léger. Le défaut de cette installation réside, toutefois, dans le fait suivant. Le gaz s'écoulant à l'intérieur du tube poreux, à mesure qu'il se déplace, s'enrichit en composant lourd. C'est pourquoi le gaz diffusé à l'extrémité gauche de la cellule (près de *D*) se différenciera très peu en composition du gaz pénétrant par *A*.

Pour y remédier Hertz a divisé chaque cellule en deux parties, comme c'est montré à la figure 41. Seule la partie du gaz diffusée à travers *R* et s'enrichissant en composant léger est aspirée par *B* dans la cellule voisine de droite. Le reste passe par *T* et puisque, comme on l'a remarqué, cette

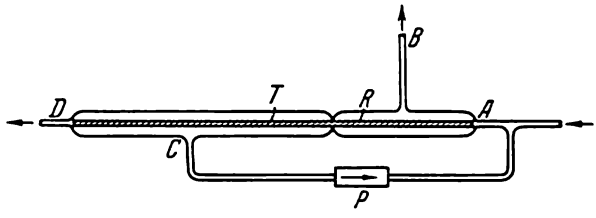


Fig. 41. Une cellule de séparation améliorée

partie après diffusion a une composition presque identique à celle du gaz pénétrant dans la cellule, elle est aspirée à l'aide de la pompe *P* par *C* et, de nouveau dirigée vers *A*, pénètre une seconde fois dans la cellule pour y subir une nouvelle diffusion et un enrichissement correspondant.

Sur la figure 42 on a représenté une cascade constituée de trois étages (trois cellules de séparation). V_l et V_s sont des ballons où s'accumule le gaz avec une légère prépondérance respectivement des composants léger et lourd. Ces ballons communiquent avec les cellules de séparation, de sorte qu'en fin de compte il s'établit un état stationnaire. Le petit tube en argile à gauche du ballon V_s ne joue pas le rôle de cellule de séparation, mais sert à régler la vitesse du gaz traversant le ballon et retournant dans la cellule de séparation voisine.

Le fonctionnement de l'installation est montré schématiquement à la figure 43. Chaque cellule y est réprésentée par un carré. Au début toute la cascade est remplie de gaz de composition normale. Après diffusion chaque

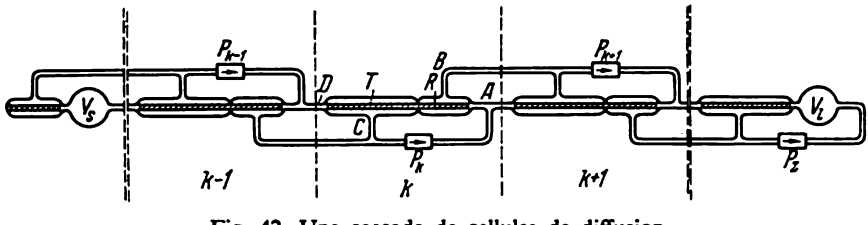


Fig. 42. Une cascade de cellules de diffusion

cellule dirigera à droite un gaz enrichi en composant léger et à gauche un gaz enrichi en composant lourd. Sur la figure 43 le courant du mélange enrichi en composant léger est indiqué en pointillé et celui enrichi en composant lourd, par un trait continu. La figure 43, *a*, représentant l'état initial, montre que par suite des séparations réalisées par les cellules il s'établit dans le système deux courants : vers la droite un courant enrichi en composant léger et vers la gauche un courant enrichi en composant lourd. Du fait de ce mouvement la composition du gaz dans les ballons V_l et V_s se modifie de façon correspondante. La variation de la composition du mélange continuera tant que ne s'établisse un état d'équilibre pour lequel la compo-

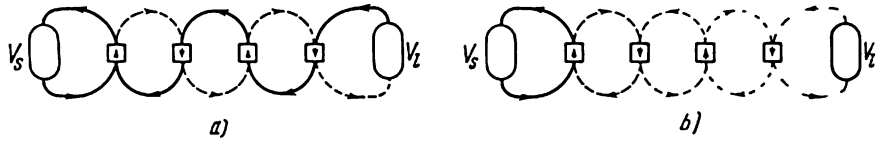


Fig. 43. Schéma du fonctionnement d'une cascade de cellules de diffusion : *a)* état initial; *b)* état d'équilibre

sition du gaz reçu par chaque cellule des cellules voisines devienne identique aux compositions des mélanges transmis par cette cellule aux deux cellules voisines. Mais comme les courants s'écoulant à droite et à gauche à partir de chaque cellule diffèrent toujours quant à leur teneur en composants léger et lourd d'un certain facteur q, à l'état stationnaire la composition du gaz circulant entre les couples de cellules successives se différenciera justement de la voisine de ce *facteur q*. C'est montré à la figure 43, *b* au moyen de traits plus ou moins espacés : à droite le mélange circulant entre la dernière cellule et le ballon V_l est le plus enrichi en composant léger et les traits sont le plus espacés; la concentration relative du composant lourd dans le mélange circulant entre la dernière et l'avant-dernière cellules de droite est q fois plus grande

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n$$

et les traits sont plus serrés; pour le couple suivant on a :

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-2} = q\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q^2\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n,$$

etc. Il est évident que pour une cascade constituée de z étages, la composition du mélange dans le ballon de gauche V_s différera de la composition dans le ballon de droite V_l d'un facteur q^z. Ainsi donc, le facteur de séparation total de toute la cascade Q sera

$$Q = q^z. \tag{17.2}$$

Pour calculer q il faut connaître la partie f du courant, traversant la cellule de séparation, qui est diffusée par le tube poreux R (fig. 41). En somme le

courant pénétrant dans la cellule de séparation est divisé en trois parties : l'une est diffusée par R et est aspirée par B dans la cellule voisine de droite, l'autre est diffusée par T et aspirée par la pompe P pour être remise en circulation dans la même cellule et la troisième passe par D dans la cellule voisine de gauche. Si R et T ont même longueur, les trois parties du courant seront égales et $f=1/3$. Si au contraire R et T sont inégaux, alors f est fonction du rapport de leurs longueurs l_R et l_T. C'est justement dans ce cas général, comme le montre un calcul simple, que

$$f=\frac{1}{2+l_R/l_T} \tag{17.3}$$

(pour $l_T=l_R$ on a toujours évidemment $f=1/3$). La formule déduite par Hertz pour le facteur de séparation d'une cellule isolée est :

$$q=\frac{f\mu}{1-(1-f)\mu}, \tag{17.4}$$

où

$$\mu=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (m_1<m_2),$$

et, par suite, le facteur de séparation total de la cascade sera selon (17.2)

$$Q=\left(\frac{f\mu}{1-(1-f)\mu}\right)^z \tag{17.5}$$

où z est le nombre d'étages de la cascade.

En guise d'illustration reprenons de nouveau l'exemple du néon. Dans la première variante de l'installation de Hertz la longueur des tubes R et T était la même, d'où $f=1/3$. Puisque $\mu=\sqrt{\frac{20}{22}}=0{,}954$, alors, selon la formule (17.4), on trouve $q=1{,}089$. Si la cascade comprend 24 étages, alors on obtient pour Q :

$$Q=(1{,}089)^{24}=7{,}73$$

et pour une cascade de 48 étages

$$Q=(1{,}089)^{48}=59{,}75.$$

On voit donc que grâce à l'utilisation d'une cascade le facteur de séparation croît suffisamment pour pouvoir procéder à une séparation très poussée des isotopes.

La méthode décrite a été utilisée dès le début à la séparation des isotopes d'une série d'éléments légers. Pour la séparation des isotopes du néon on a utilisé une cascade de 24 étages. L'équilibre s'était établi au bout de 4 heures. Mais au lieu de la composition normale $^{20}Ne:^{22}Ne=9:1$, dans le reservoir de « l'extrémité lourde » de l'installation s'était accumulé un mélange de composition $^{20}Ne:^{22}Ne=1.25:1$. La quantité de ce produit final à la pression atmosphérique a constitué 4 cm^3. Avec une cascade de 48 étages on a obtenu du ^{22}Ne pur. On a de même complètement séparé les

isotopes de l'hydrogène et enrichi en composants lourds le carbone et l'azote (en isotopes ^{13}C et ^{15}N).

Dans la bonne marche de la cascade un rôle important revient à la paroi poreuse à travers laquelle s'effectue la diffusion. Comme il a été noté, pour créer des conditions favorables à la séparation il faut choisir une paroi poreuse appropriée. Hertz s'est servi de tubes en argile spécialement fabriqués. Cependant, ils ne répondirent pas aux conditions exigées, c'est pourquoi il modifia sa méthode et utilisa pour la diffusion non pas la paroi poreuse mais un jet des vapeurs de mercure qui emportaient le gaz enrichi en composant léger. La cellule de séparation dans cette seconde méthode peut être comparée à une pompe à diffusion qui aspire essentiellement l'un des composants du mélange. Des cellules semblables composent également des cascades comprenant plusieurs dizaines d'étages (jusqu'à 50). L'avantage de cette méthode par rapport à la première est l'établissement plus rapide de l'équilibre. Cette méthode a permis à Hertz ainsi qu'à d'autres chercheurs de réaliser la séparation ou l'enrichissement d'une série d'isotopes d'éléments légers (néon, oxygène, argon et carbone).

Exercice. Calculer les facteurs de séparation totaux de l'installation de Hertz composée de 24 étages en posant $f=0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5, et tracer la courbe de variation de Q en fonction de f.

§ 18. Séparation des isotopes par la méthode de diffusion thermique

L'une des méthodes les plus efficaces de séparation des isotopes s'appuie sur un phénomène original dénommé la diffusion thermique. Pour comprendre en quoi consiste ce phénomène il faut avant tout préciser sa différence d'avec la diffusion ordinaire. L'expérience classique montrant le phénomène de diffusion peut être posée de la façon suivante. Imaginons un espace fermé dans lequel, au moment initial, on a introduit deux gaz de poids moléculaires différents et de manière que le gaz le plus lourd se dispose dans le bas et le plus léger dans le haut. Dans ce cas, du fait de la diffusion, les molécules du gaz le plus lourd monteront vers le haut (c'est-à-dire à l'encontre de l'action de la force de pesanteur) et les molécules légères descendront vers le bas. Après un certain laps de temps on obtiendra un mélange parfaitement homogène de deux gaz. Ainsi donc, l'action de la diffusion ordinaire se ramène au mélange des gaz qui à l'origine étaient séparés.

Le phénomène de la diffusion thermique produit un *effet contraire* : par suite de la diffusion thermique dans un mélange de gaz se caractérisant par un gradient de température il se produit une division partielle du mélange. Ceci peut s'expliquer au moyen de l'exemple représenté à la figure 44. Supposons un coffret contenant un mélange parfaitement homogène de molécules d'oxygène et d'azote : 50 % O_2+50 % N_2. Si maintenant on maintient la paroi du bas du coffret à une température de 0 °C et la paroi

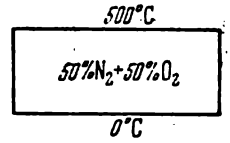


Fig. 44.

du haut à une température de 500 °C, alors, comme le prouve l'expérience, à la paroi du haut, c'est-à-dire plus chaude, on trouvera la composition 50,27 % N_2+49,73 % O_2 et à la paroi du bas, plus froide, 49,73 % N_2+ +50,27 % O_2. Ainsi, du fait de la diffusion thermique près de la paroi la plus chaude on observe un excédent de molécules légères et près de la paroi la plus froide un excédent des molécules lourdes : la diffusion thermique rompt l'homogénéité du mélange et provoque la séparation partielle des composants léger et lourd.

Désignons la concentration de l'un des composants (par exemple, le plus léger) du mélange par c. Alors, l'excédent de cette concentration près de la paroi la plus chaude est lié aux températures des deux parois T_2 et T_1 par la relation suivante :

$$\Delta c = \varkappa \ln \frac{T_2}{T_1}, \tag{18.1}$$

où le coefficient $\varkappa$ est appelé *coefficient de diffusion thermique.*

L'existence de la diffusion thermique a été prévue d'abord théoriquement puis fut démontrée par l'expérience. La théorie de ce phénomène a révélé la propriété intéressante suivante. Dans la théorie cinétique des gaz la collision entre les molécules de gaz est parfois étudiée comme un simple impact de billes parfaitement élastiques. Or cette représentation pèche évidemment par une extrême simplicité. Il est plus correct d'étudier au lieu de simples collisions les interactions entre les molécules qui se manifestent en des répulsions en cas de leur rapprochement à des distances très petites. La loi de ces interactions peut être écrite sous forme de $\text{const} \cdot r^{\nu}$, où r est la distance et ν un certain exposant. Il apparaît que la diffusion thermique donne des résultats très différents suivant la valeur de l'exposant ν. Ainsi, par exemple, pour certaines valeurs de ν la diffusion thermique peut modifier son sens et même disparaître complètement. En particulier, ce dernier cas se présente pour $\nu=5$.

Ce résultat présente un intérêt tout historique, car Maxwell en développant sa théorie cinétique des gaz s'est servi de l'hypothèse d'après laquelle la répulsion entre les molécules obéit à la loi $\text{const} \cdot r^{-5}$ et par suite il n'était pas nécessaire de tenir compte de la diffusion thermique.

Ce qu'on vient d'exposer sur le processus de la diffusion thermique montre clairement que ce phénomène peut être utilisé pour la séparation isotopique. Au cas où le champ thermique s'établit dans un coffret en forme de cube dont les parois opposées sont maintenues à des températures T_2 et T_1 on obtient pour le facteur de séparation une formule fort simple :

$$q = 1 + \frac{2}{3} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

En utilisant cette formule pour le néon ($m_1=22$, $m_2=20$) et en posant $T_1=900°$ et $T_2=300°$, on obtient

$$Q = 1{,}035.$$

Cette grandeur, de l'ordre de celle obtenue pour un étage dans la cascade de Hertz, montre que la diffusion thermique peut être utilisée pour la

séparation des isotopes. Avec une cascade de z étages on obtient comme auparavant le facteur de séparation total $Q=q^z$.

Pour accroître l'efficacité de la séparation on utilise en même temps que la diffusion thermique également la convection. Soit un coffret rectangulaire étroit (fig. 45) dont les parois sont portées à des températures différentes, comme c'est montré sur la figure. Près de la paroi la plus chaude le gaz se dilatera et montera vers le haut; près de la paroi froide il descendra vers le bas. Le même phonomène s'observe si au lieu d'un coffret rectangulaire on utilise un cylindre de rayon R_a à l'intérieur duquel on place coaxialement un second cylindre de rayon R_i chauffé à une température plus élevée (un fil chauffé par le courant électrique, fig. 46).

Ainsi la *convection* permet de créer deux courants se dirigeant dans des sens opposés. Si dans le coffret ou le tube se trouve un mélange de deux gaz de poids moléculaires différents, la diffusion thermique créera en outre un courant dirigé perpendiculairement au courant de convection, de façon que la concentration de molécules plus légères près de la paroi chaude soit supérieure à celle près de la paroi froide. L'action simultanée des deux effets conduit à ce qu'entre les deux parois, celle du haut et celle du bas, s'établit une différence de concentrations importante.

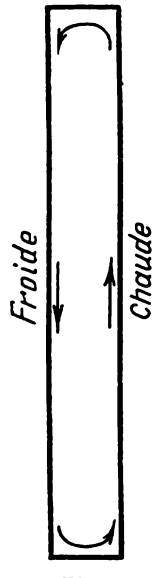


Fig. 45.

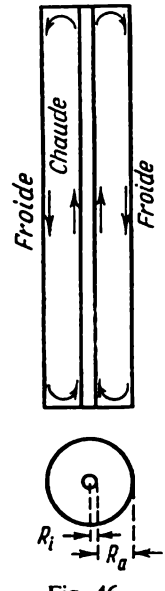


Fig. 46.

Analysons ce phénomène de façon plus détaillée. Supposons de nouveau un coffret rectangulaire (fig. 47) dont les parois opposées sont maintenues à des températures différentes ($T_2>T_1$). La disposition des axes de coordonnées étant celle de la figure 47, examinons tout d'abord le courant dû à la diffusion thermique et à la diffusion ordinaire. Si, dans le coffret, il y a un mélange de deux gaz de poids moléculaire différent et si comme auparavant c est la concentration du composant le plus léger, la diffusion thermique provoquera un déplacement de la substance dont la quantité transportée sera d'ailleurs proportionnelle à $-\frac{\partial \ln T}{\partial x}$ [voir formule

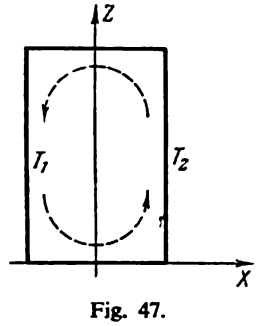


Fig. 47.

(18.1)]. L'intensité du courant de diffusion thermique, c'est-à-dire la quantité de substance transferée en unité de temps à travers une surface perpendiculaire au courant, sera égale à

$$\varrho D \varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x}, \tag{18.2}$$

où ϱ est la densité du gaz et D le coefficient de diffusion. La diffusion thermique crée donc entre les parois chaude et froide une différence de concentrations des composants lourd et léger. Cette différence de concentrations provoquera l'apparition dans la direction contraire du courant de diffusion ordinaire tendant à équilibrer la concentration dans toute la masse du gaz. L'intensité de ce dernier courant sera évidemment égale à

$$-\varrho D \frac{\partial c}{\partial x}. \tag{18.3}$$

L'intensité totale du courant J sera obtenue en tenant compte des deux processus, c'est-à-dire en utilisant les formules (18.2) et (18.3) :

$$J = \varrho D \left(\varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x} \right). \tag{18.4}$$

A l'état d'équilibre l'intensité totale du courant dû à la diffusion thermique et à la diffusion ordinaire est nulle et on obtient de (18.4)

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x}. \tag{18.5}$$

Ainsi, l'action simultanée de la diffusion thermique et de la diffusion ordinaire en présence d'un gradient de température entre les parois fait apparaître un *gradient de concentration* des composants du mélange. Supposons maintenant que dans le coffret on a créé de façon quelconque une circulation de gaz dans le sens montré sur la figure 47 par des flèches. La quantité de gaz montant vers le haut près de la paroi de droite est supposée égale à la quantité du gaz descendant vers le bas le long de la paroi gauche. Par conséquent, le flux total de la *substance* à travers une section horizontale quelconque sera nul.

Or le flux de *composants* différents du mélange gazeux sera *différent de zéro*, car selon la formule (18.5) par suite de la diffusion thermique à l'état d'équilibre il doit s'établir un gradient de concentration du composant léger, dirigé vers la paroi chaude. C'est pourquoi cette circulation fera monter une quantité plus grande de composant léger le long de la paroi chaude qu'elle n'en fera descendre près de la paroi froide. Ceci conduira progressivement à l'établissement d'un gradient *vertical* de concentration avec apparition vers le haut d'un excédent du composant léger et vers le bas, d'un excédent du composant lourd.

L'intérêt de la méthode décrite consiste dans le fait que la circulation du gaz, dont l'importance découle des éclaircissements donnés, s'établit d'elle-même sous l'influence de la pesanteur. Il est évident que tout ce qu'on vient de dire à propos d'un mélange gazeux de poids moléculaires différents

s'applique entièrement à un mélange d'isotopes de masses différentes.

Sur la figure 48 on a montré le montage d'un tube utilisé pour la séparation des isotopes du chlore. Le tube fonctionne suivant le principe de la cellule de séparation cylindrique décrite à la figure 46. Le rôle du cylindre intérieur est joué par un fil de platine chauffé épais de 0,4 mm; le diamètre du tube extérieur est égal à 8,4 mm. On a utilisé pour la séparation des isotopes du chlore 5 tubes reliés en cascade. Leur longueur était 7 m, 8 m, deux tubes de 6 m et un tube de 9 m. La longueur totale des tubes avait donc 36 m. Pour la séparation fut utilisé l'hydrogène chloré qui est un mélange de molécules $H^{35}Cl$ et $H^{37}Cl$. A l'extrémité lourde on obtenait par jour 8 cm^3 de HCl contenant 99,4 % de ^{37}Cl et à l'extrémité légère, 25 cm^3 de HCl contenant 96,6 % de ^{35}Cl. Par la suite on est arrivé à obtenir du HCl contenant 99,6 % de ^{35}Cl pour une longueur totale des tubes de 20 m.

La même méthode a été utilisée pour la séparation des isotopes du néon et on a réussi d'obtenir plusieurs litres du ^{20}Ne pur. On a de même réussi d'enrichir le carbone en fraction lourde ^{13}C jusqu'à 6,6 % (la composition normale du carbone $^{12}C:^{13}C=99,1$) avec un rendement de plusieurs mg du produit par jour.

La méthode de la diffusion thermique s'est avérée également efficace pour la séparation des mélanges liquides d'isotopes. Ainsi, par exemple, on a soumis à la diffusion thermique une solution de $ZnSO_4$ placée entre deux plaques longues de 90 cm et distantes de 0,025 cm; entre les plaques on a maintenu une différence de températures de 50°. Le rapport normal des compositions d'isotopes du zinc-64 et du zinc-68 est égal à 2,93; après diffusion thermique à l'extrémité lourde de l'installation on a recueilli $^{64}Zn:^{68}Zn=2,7$ et à l'extrémité légère $^{64}Zn:^{68}Zn=3,2$.

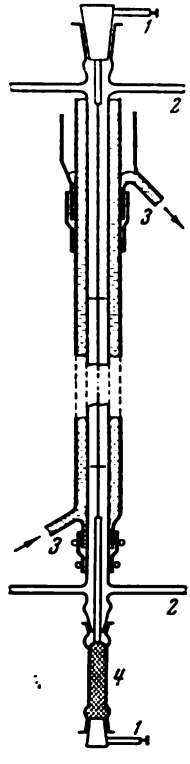


Fig. 48. Tube de séparation par diffusion thermique : *1* — amenée du courant; *2* — alimentation en gaz; *3* — système de refroidissement; *4* — mercure

L'établissement de l'équilibre pour des systèmes liquides s'effectue lentement mais pour la séparation on a besoin de colonnes de moindre longueur que pour les gaz.

Nonobstant sa simplicité l'installation décrite s'est avérée très efficace pour la séparation isotopique. A des fins de comparaison on a effectué des expériences de séparation des isotopes du gaz lourd, le xénon, par diffusion thermique avec un tube de séparation long de 2,5 m et d'un diamètre de 5 mm muni d'un fil central chauffé jusqu'à 1200-1700 °C et simultanément en utilisant une cascade comprenant 12 cellules de diffusion. Il apparut qu'un tube de 1 m de longueur a un rendement identique à 12 cellules de diffusion.

§ 19. Séparation des isotopes à l'aide des méthodes électromagnétiques

On obtient des résultats très satisfaisants en utilisant pour la séparation des isotopes des méthodes électromagnétiques. En effet, tout spectrographe de masse et en particulier un spectromètre de masse constitue un appareil convenant à la séparation complète des isotopes. Si l'on imagine qu'aux foyers rassemblant les masses recherchées (fig. 34) se trouvent des fentes derrière lesquelles se disposent des récepteurs, alors dans ces derniers s'accumuleront des isotopes purs.

Par suite de la faible intensité du courant ionique, la quantité de substance qui peut être accumulée par un tel récepteur est infime : dans les spectromètres de masse ordinaires le taux d'accumulation de la substance est de l'ordre des millièmes du microgramme (10^{-9} g) par heure.

Ainsi donc, la méthode du spectrographe de masse est une méthode idéale au cas où il ne faut obtenir qu'une petite quantité d'isotopes séparés, mais s'il faut recueillir des grandes quantités à l'aide de cette méthode deux sortes de difficultés se présentent. D'abord, puisque la substance est véhiculée dans le spectrographe de masse par le courant ionique, la production de grandes quantités d'isotopes nécessite des courants très intenses, ce qui pose le problème de construction de sources d'ions très puissantes. En second lieu, même si l'on dispose d'une source d'ions suffisamment puissante, l'accroissement de l'intensité du courant au-dessus d'une certaine valeur limite est non rationnel, car la charge spatiale créée par un fort courant ionique abaisse sensiblement le pouvoir de résolution du spectrographe de masse et l'augmentation de l'intensité du courant n'apporte pas de gain en matière d'accumulation des isotopes purs.

Examinons cette question en détail. Soit un flux constitué d'ions de deux isotopes de masses (en grammes) M_1 et M_2. Un champ magnétique transversal uniforme, comme on le sait (§ 15), fera converger chaque type d'isotopes vers son foyer dont la position est fonction du rayon de courbure de la trajectoire circulaire décrite par l'ion de l'espèce considérée. Pour le calcul de ce rayon de courbure on s'est servi au § 15 de la formule (4.9) qui découle de la condition d'égalité de la force de Lorentz $\mathcal{H}ev$ à la force d'inertie centrifuge mv^2/ϱ :

$$\frac{mv^2}{\varrho} = \mathcal{H}ev. \qquad (19.1)$$

Fig. 49. Trajectoires des ions de deux isotopes de masses peu différentes dans un séparateur électromagnétique

Voyons maintenant l'influence qu'exerce la charge spatiale sur la finesse du foyer. Représentons sur la figure 49 par des traits continus et en pointillé les trajectoires des ions de masses peu différentes dans un champ magnétique transversal uniforme. Pour faciliter les calculs on supposera que l'extension des fais-

ceaux d'ions perpendiculaires au plan du dessin est très grande. Si l'intensité totale du courant ionique par unité de longueur perpendiculairement au plan du dessin est égale à J, la quantité d'électricité correspondant à l'unité de longueur perpendiculairement au plan du dessin sera évidemment J/v, où v est la vitesse des ions. La charge spatiale ainsi créée agit de son côté sur les ions.

Examinons maintenant deux trajectoires extrêmes des ions dans chacun des faisceaux. En supposant que la courbure de la trajectoire varie faiblement d'un faisceau à l'autre et en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski on obtient pour la force qu'exerce sur les ions le long des deux trajectoires la charge spatiale l'expression suivante :

$$F=2\pi\frac{J}{v}e, \tag{19.2}$$

où e est la charge de l'ion. Cette force sera toujours dirigée vers l'extérieur par rapport au faisceau, c'est-à-dire que sur l'ion se déplaçant le long de la trajectoire supérieure agira une force dirigée du centre de la trajectoire (circulaire), tandis que sur l'ion suivant la trajectoire inférieure, une force dirigée vers le centre. C'est justement pourquoi la charge spatiale provoque l'étalement du foyer apparaissant en l'absence de la charge. Pour le calcul de la largeur du faisceau au foyer on doit remplacer la relation (19.1) par la condition de l'égalité entre la force d'inertie centrifuge et la force de Lorentz *en y ajoutant la force exercée par la charge spatiale.* En tenant compte de ce qu'on a dit sur la direction de cette force on obtient les équations suivantes pour des ions décrivant des trajectoires extrêmes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{Mv^2}{\varrho_1}&=\mathcal{H}ev+2\pi\frac{Je}{v},\\ \frac{Mv^2}{\varrho_2}&=\mathcal{H}ev-2\pi\frac{Je}{v},\end{aligned}\right\} \tag{19.3}$$

d'où il suit

$$\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{4\pi Je}{Mv^3}.$$

Désignant par ϱ le rayon de la trajectoire en l'absence de la charge spatiale et posant $\varrho_1\varrho_2\approx\varrho^2$ on obtient pour la largeur du faisceau à la distance de 180°

$$\Delta s\equiv 2(\varrho_2-\varrho_1)=\frac{8\pi e}{M}\frac{J\varrho^2}{v^3}. \tag{19.4}$$

Comme la différence de masses entre les deux isotopes considérés est faible, les foyers correspondants (fig. 49) se disposent au voisinage de B, très près l'un de l'autre. On peut donc considérer que les trajets des ions coïncident presque sur tout le parcours et par suite admettre de même que la largeur des faisceaux au voisinage de B pour les deux espèces d'ions est la même et égale à Δs.

En l'absence de la charge spatiale la distance entre les foyers des ions de masses M_1 et M_2 est

$$\Delta x = \frac{|M_2 - M_1|}{M_1} \varrho. \tag{19.5}$$

Il est évident que le rendement de l'installation servant à la production d'isotopes purs sera fonction de la relation entre Δx et Δs. On peut montrer que les conditions les plus favorables se présenteront dans le cas où $\Delta x = \Delta s$. En effet, pour accroître le taux d'accumulation de la substance il est naturel d'élever l'intensité du courant J. Mais en même temps on verra augmenter proportionnellement à J la largeur du foyer Δs. Si Δs devient plus grand que Δx, le taux d'accumulation d'isotopes *purs* par unité de largeur du faisceau dans la direction perpendiculaire au plan du dessin sera proportionnel à $\frac{\Delta x}{\Delta s} J$. Comme la largeur Δs est de son côté proportionnelle à J, il devient évident qu'on ne gagnera rien en augmentant J de façon que Δs soit supérieur à Δx. De la condition $\Delta x = \Delta s$ et à l'aide de (19.4) et (19.5) on trouve

$$J = \frac{M_1 v^3}{8\pi e \varrho} \frac{|M_2 - M_1|}{M_1}. \tag{19.6}$$

En se servant maintenant des relations $M_1 v^2/\varrho = \mathcal{H} e v/e$ (e est exprimé en unités électrostatiques) et $M_1 v^2/2 = eV$, où V est la tension accélératrice des ions, par certaines transformations on obtient pour la quantité de la substance recueillie

$$\mu \left[\frac{\text{mg}}{\text{h}}\right] = 3{,}19 \cdot 10^{-8} \eta \frac{|A_2 - A_1|}{A_1} V \mathcal{H}, \tag{19.7}$$

où η est le rapport des concentrations des isotopes dans la substance, A_2 et A_1 leurs masses atomiques arrondies jusqu'aux nombres entiers; V est donné en volts et $\mathcal{H}$ en œrsteds. En choisissant pour exemple le cas de séparation des isotopes du calcium ^{44}Ca et ^{40}Ca, où $\eta = 1/20$, on obtient même pour des valeurs très grandes de V et de $\mathcal{H}$, disons, pour $V = 50\,000$ V et $\mathcal{H} = 15\,000$ œrsteds

$$\mu = 0{,}12 \frac{\text{mg}}{\text{h}},$$

tandis que l'intensité totale du courant correspondante devient égale seulement à 1,6 mA par cm; une plus grande augmentation de l'intensité est selon les explications fournies inopportune. Il en découle que la méthode du spectrographe de masse ne peut servir à la production des isotopes purs en grande quantité qu'à condition de neutraliser la charge spatiale, qui abaisse extrêmement l'efficacité de la méthode.

Il est, toutefois, possible de neutraliser la charge spatiale. Supposons qu'à l'intérieur du faisceau ionique on introduit une certaine quantité d'électrons. Il est facile de constater que ces électrons se maintiendront à l'intérieur du faisceau et, du fait de leur charge négative, neutraliseront une partie de la charge positive des ions. En effet, la charge spatiale, on l'a

noté précédemment, crée un champ dirigé vers l'extérieur par rapport au faisceau d'ions. Les électrons négatifs seront donc soumis à une force dirigée vers l'intérieur du faisceau qui empêchera les électrons de quitter le faisceau dans le sens transversal. Les électrons ne peuvent se mouvoir que le long de l'axe du faisceau. Or les potentiels des électrodes peuvent être choisis de façon à obliger les électrons de ne pas se déplacer dans ce

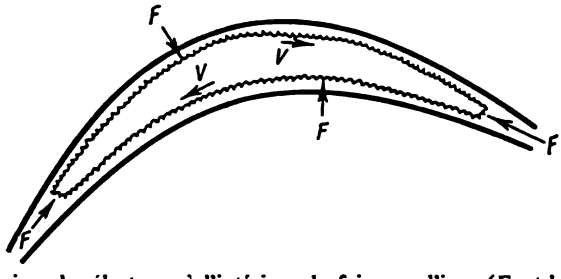


Fig. 50. Trajectoires des électrons à l'intérieur du faisceau d'ions (*F* est la force agissant sur les électrons)

sens également. Comme en outre il existe encore un champ magnétique transversal, les électrons décriront des trajectoires cycloïdales fermées, comme le montre la figure 50, en compensant de façon très efficace la charge spatiale des ions.

§ 20. Séparation des isotopes par des méthodes de distillation fractionnée et des réactions d'échange

La séparation de mélanges de deux liquides par distillation fractionnée est un procédé connu depuis longtemps et largement utilisé en laboratoire et dans l'industrie. La méthode consiste, en premier lieu, à distiller le liquide dont le point d'ébullition est inférieur (la tension de vapeur supérieure); c'est pourquoi le produit distillé s'enrichira en liquide plus volatil et le reste, en liquide ayant la tension de vapeur plus faible. En répétant cette opération plusieurs fois on arrive à séparer les deux liquides.

La tension de vapeur des isotopes est fonction de leur masse, c'est pourquoi la méthode de distillation fractionnée est en principe utilisable pour la séparation des isotopes. Toutefois la différence dans la tension de vapeur est si infime que l'utilisation de cette méthode est généralement inopportune. Dans la pratique on obtient des meilleurs résultats avec la « méthode à contre-courant » qui consiste à faire circuler à l'encontre l'un de l'autre dans la colonne de séparation : de bas en haut, la vapeur et de haut en bas, le liquide; dans ce cas on tâche que la surface de contact entre le liquide et la vapeur soit maximale. Au cours de l'échange des molécules entre le liquide et la vapeur, les molécules du liquide, présentant une tension de vapeur plus grande, tendent à se concentrer en plus grande quantité dans

la phase gazeuse. Cette méthode n'est utilisable que pour des isotopes dont les différences de températures d'ébullition ne sont pas trop petites.

La méthode des réactions d'échange est en fait assez proche de la méthode de distillation fractionnée, mais est de beaucoup plus rentable. Essayons de la décrire. Considérons un système à deux phases : un liquide et, au-dessus, un gaz. Prenons, par exemple, de l'ammoniac gazeux NH_3 et une solution d'ammoniac dans l'eau ou dans l'alcool ou enfin une solution d'azotate d'ammonium NH_4NO_3 (qui se dissocie dans la solution en NH_4^+ et NO_3^-). Dans ce cas on aura une réaction d'échange : l'azote de l'ammoniac gazeux s'échangera contre l'azote de l'ammoniac de la solution. Cette réaction peut s'effectuer dans les deux sens et conduit à l'équilibre. Si l'échange se réalise entre des isotopes de masses identiques, la réaction, en général, ne peut être observée. Mais il peut arriver que ^{14}N prenne la place de ^{15}N ou inversement, et la réaction se déroulera suivant l'équation

$$^{15}NH_3\,(\text{gaz}) + {}^{14}NH_3\,(\text{solution}) = {}^{14}NH_3\,(\text{gaz}) + {}^{15}NH_3\,(\text{solution}).$$

La théorie et l'expérience montrent que dans ce cas l'isotope léger a la tendance de se concentrer dans la phase gazeuse, tandis que l'isotope lourd se concentre dans la phase liquide. Cette tendance se manifestera dans le fait que la constante d'équilibre de la réaction définie par la loi d'action de masse

$$K = \frac{[^{14}NH_3]\ \text{gaz}\ [^{15}NH_3]\ \text{solution}}{[^{15}NH_3]\ \text{gaz}\ [^{14}NH_3]\ \text{solution}}$$

sera différente de l'unité, alors que dans le cas d'échange d'atomes de même masse elle doit être égale exactement à l'unité. Pour l'ammoniac en équilibre $K = 1{,}033$. Il est facile de s'apercevoir que c'est justement le facteur de séparation du processus considéré. En effet, K peut s'écrire sous la forme

$$K = \frac{\dfrac{[^{15}NH_3]}{[^{14}NH_3]}\ \text{solution}}{\dfrac{[^{15}NH_3]}{[^{14}NH_3]}\ \text{gaz}},$$

c'est-à-dire selon la définition $K = q$, et puisque $K > 1$, cela signifie justement que l'isotope lourd aura la tendance de se concentrer dans la phase liquide.

Il existe d'autres réactions d'échange pouvant servir à la séparation des isotopes, par exemple,

$$^{34}SO_2\,(\text{gaz}) + H^{32}SO_3\,(\text{solution}) = {}^{32}SO_2\,(\text{gaz}) + H^{34}SO_3\,(\text{solution});$$

dans cette réaction $q = K = 1{,}012$.

Comme dans le cas de la diffusion de gaz, le facteur de séparation est très faible, toutefois, ici également, il peut être sensiblement accru par l'utilisation d'une cascade : si la cascade est constituée de z étages, le facteur de séparation total sera comme dans le cas de la diffusion $Q = q^z$.

Dans la colonne utilisée pour la concentration des isotopes de l'oxygène ^{18}O et de l'azote ^{15}N il y avait 621 étages. La colonne entière était constituée

par un tube en acier d'un diamètre intérieur de 15 cm et d'une hauteur de 10,7 m. On a utilisé la méthode à contre-courant, le liquide descendant vers le bas et la vapeur montant vers le haut.

Il apparut que cette méthode pouvait assurer la concentration des isotopes ^{13}C, ^{15}N, ^{18}O, ^{34}S en quantité de l'ordre de un gramme par jour.

§ 21. Séparation des isotopes par la méthode de centrifugation

Pour la séparation des isotopes on peut utiliser le phénomène de la proportionnalité de la masse à la pesanteur. C'est pourquoi dans un gaz présentant un mélange d'isotopes à l'état d'équilibre, la concentration des atomes de masses supérieures sera relativement plus grande vers le bas. Il est vrai que l'intensité du champ de gravitation terrestre est insuffisante pour pouvoir utiliser pratiquement cette différence de masse. Toutefois on peut se servir des champs créés artificiellement dont l'intensité est de centaines de milliers de fois plus grande que celle du champ de gravitation terrestre. La force centrifuge comme la force de gravitation étant proportionnelle à la masse, les champs artificiels ou pseudo-gravitationnels recherchés s'obtiennent dans des centrifugeuses.

Cherchons la distribution des particules dans une centrifugeuse à des distances variées de l'axe. Soit ϱ la densité du gaz, r la distance de l'axe, ω la vitesse angulaire. Calculons la pression à la distance r de l'axe. L'accélération centrifuge est égale à $r\omega^2$, tandis que la masse d'une couche de gaz de section de 1 cm^2 et d'une épaisseur dr sera $\varrho\, dr$. La pression d'une couche de rayons r et $r+dr$ sera donc

$$dp = \varrho\, dr \cdot r\omega^2. \tag{21.1}$$

D'autre part, suivant la loi des gaz parfaits

$$p = \frac{RT}{M}\varrho, \tag{21.2}$$

où M est le poids moléculaire (atomique). De (21.1) et (21.2) on obtient

$$\frac{dp}{p} = \frac{M\omega^2}{RT}\, r\, dr,$$

ou en intégrant

$$p = p_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}},$$

et comme d'autre part la pression est proportionnelle au nombre de particules dans 1 cm^3, la distribution du nombre de particules à des distances différentes sera

$$n = n_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}}. \tag{21.3}$$

Supposons maintenant que le gaz soit un mélange de particules légères M_L, n_L et lourdes M_S, n_S. En cas d'équilibre la relation (21.3) s'applique

à des particules de chaque espèce et, donc, à la distance r de l'axe le rapport de nombres de particules sera

$$\frac{n_L}{n_S}=\left(\frac{n_L}{n_S}\right)_0 e^{\frac{(M_L-M_S)\omega^2 r^2}{2RT}}, \qquad (21.4)$$

où $(n_L)_0$ et $(n_S)_0$ sont les nombres de particules de chaque espèce sur l'axe. Le facteur de séparation s'exprimera par le rapport des nombres n_S/n_L à la frontière du champ ($r=r_0$) et sur l'axe ($r=0$), c'est-à-dire

$$q=\frac{(n_S/n_L)}{(n_S/n_L)}=e^{\frac{(M_S-M_L)\omega^2 r_0^2}{2RT}}. \qquad (21.5)$$

Il est remarquable qu'à la différence d'autres méthodes où le facteur de séparation est fonction de la forme du rapport des masses (par exemple, dans la méthode de diffusion il dépend de $\sqrt{\frac{M_S}{M_L}}$, dans le cas présent, il est défini par la *différence* des masses M_S-M_L. C'est un grand avantage de la méthode de la centrifugation. En premier lieu, le facteur de séparation semble conserver une valeur invariable indépendemment de la nature des composés formés par les isotopes étudiés et, par suite, on peut toujours choisir le composé qu'il est le plus facile de manier. En second lieu, au cas d'éléments lourds cette propriété agit aussi favorablement sur la valeur du facteur de séparation. C'est ainsi que lors de la séparation des isotopes de l'uranium le composé gazeux est représenté par l'hexafluorure d'uranium UF_6; la racine carrée du rapport des poids moléculaires $^{238}UF_6$ et $^{235}UF_6$ est égale à $\sqrt{\frac{352}{349}}=1{,}0043$, alors que dans la méthode de la centrifugation si la différence $M_S-M_L=3$, la vitesse linéaire à la périphérie de la centrifugeuse étant de $5\cdot10^4$ cm/s et la température de 300 °K, le facteur de séparation sera égal à 1,16.

En outre, comme on le voit de la formule (21.5), q dépend fortement de la température et croît avec l'abaissement de cette dernière. Par exemple, pour $v=5\cdot10^4$ cm/s et $M_S-M_L=3$, q prend en fonction de la température les valeurs suivantes :

T, °C	300	200	90	20
q	1,16	1,25	1,65	9,68

Beems a construit des centrifugeuses puissantes spéciales pour la séparation des isotopes. Cette centrifugeuse est constituée d'un cylindre en acier au chrome-molybdène; le diamètre extérieur du cylindre est de 10 cm, l'épaisseur des parois de 12 mm. Le cylindre est mis en rotation par de l'air comprimé. La vitesse maximale de rotation, tolérée par la solidité des matériaux, correspond à la vitesse linéaire $v=8\cdot10^4$ cm/s.

Le rendement de la centrifugeuse pour séparation isotopique peut être accru en combinant son champ pseudo-gravitationnel avec la diffusion. Dans ce but le courant de vapeur est dirigé dans la partie extérieure du cylindre vers le bas et dans sa partie axiale, vers le haut. Au contact des deux courants a lieu une diffusion continue des molécules d'un courant à l'autre. Le champ centrifuge accroît le transfert des molécules plus lourdes à la périphérie. Il s'ensuit que la concentration de l'isotope lourd à la périphérie est plus grande qu'au centre. Pour l'isotope léger la situation est inverse.

Exercice. Calculer les facteurs de séparation pour une centrifugeuse dans des conditions suivantes : la vitesse linéaire $v = 5 \cdot 10^4$ cm/s; la différence des masses des isotopes $M_S - M_L = 1, 2, 3, 4$. Les températures sont 300, 200, 90 °C (pour la différence $M_S - M_L = 3$ vérifier les chiffres donnés dans le texte).

§ 22. Production de l'isotope lourd de l'hydrogène (deutérium) et de l'eau lourde

L'isotope lourd de l'hydrogène, le deutérium (D), a un rôle si important dans la physique et la chimie moderne qu'il est nécessaire de s'y arrêter tout particulièrement. Le rôle particulier de l'isotope lourd de l'hydrogène est, par ailleurs, en rapport avec le fait que c'est le seul isotope dont la masse diffère de celle de l'isotope de base de 100 %, par suite, ces deux espèces de l'hydrogène se conduisent dans des conditions chimiques et physiques variées de façon essentiellement différente.

Dans l'hydrogène ordinaire, rencontré dans la nature, le pourcentage de l'hydrogène lourd est de 0,02 % en tout. En concentration le deutérium est obtenu sous la forme de l'*eau lourde*. Or comme l'hydrogène n'est pas le seul à avoir des isotopes, car l'oxygène en possède aussi (^{16}O; ^{17}O, ^{18}O), il se rencontre parmi les molécules d'eau des combinaisons variées d'isotopes, par exemple, $D_2{}^{16}O$, $HD^{16}O$, $H_2{}^{18}O$, $D_2{}^{18}O$, etc. Toutefois, sous la dénomination de l'eau lourde on englobe l'eau dont les molécules présentent la composition de $D_2{}^{16}O$. Les propriétés physiques de l'eau lourde diffèrent des propriétés de l'eau ordinaire ou légère, comme le montre le tableau V.

Tableau V

Quelques propriétés physiques de l'eau lourde (D_2O) et légère (H_2O)

Propriétés	D_2O	H_2O
Densité d_4^{20}	1,1059	0,9982
Point de congélation	3,82 °C	0,00 °C
Point d'ébullition	101,42 °C	100,00 °C
Maximum de densité à	11,60 °C	4,00 °C
Viscosité 10^3 C. G. S.	12,60	10,09
Tension superficielle en dyne/cm	67,8	72,75
Indice de réfraction n_D^{20}	1,328 44	1,333 00

Tableau VI

Isotopes naturels (stables) et leur abondance

Symbole	Numéro atomique	Nombre de masse	Abondance relative, %	Symbole	Numéro atomique	Nombre de masse	Abondance relative, %
H	1	1	99,986	Sc	21	45	100
D		2	0,014	Ti	22	46	7,95
T		3				47	7,75
He	2	3	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$			48	73,45
		4	100			49	5,51
Li	3	6	7,30			50	5,34
		7	92,70	V	23	51	0,23
Be	4	9	100			51	99,77
B	5	10	18,83	Cr	24	50	4,312
		11	81,17			52	83,76
C	6	12	98,892			53	9,55
		13	1,108			54	2,38
		14	10^{-10}	Mn	25	55	100
N	7	14	99,635	Fe	26	54	5,81
		15	0,365			56	91,64
O	8	16	99,759			57	2,2
		17	0,0374			58	0,34
		18	0,2036	Co	27	59	100
F	9	19	100	Ni	28	58	67,77
Ne	10	20	90,92			60	26,16
		21	0,257			61	1,25
		22	9,823			62	3,66
Na	11	23	100			64	1,16
Mg	12	24	78,98	Cu	29	63	68,94
		25	10,05			65	31,06
		26	10,97	Zn	30	64	48,89
Al	13	27	100			66	27,81
Si	14	28	92,18			67	4,07
		29	4,71			68	18,61
		30	3,12			70	0,62
P	15	31	100	Ga	31	69	60,16
S	16	32	95.018			71	39,84
		33	0,750	Ge	32	70	20,52
		34	4,215			72	27,43
		36	0,017			73	7,76
Cl	17	35	75,40			74	36,54
		37	24,60			76	7,76
Ar(A)	18	36	0,337	As	33	75	100
		38	0,063	Se	34	74	0,87
		40	99,600			76	9,02
K	19	39	93,800			77	7,58
		40	0,0119			78	23,52
		41	6,9081			80	49,82
Ca	20	40	96,92			82	9,19
		42	0,64	Br	35	79	50,53
		43	0,129			81	49,47
		44	2,13	Kr	36	78	0,354
		46	0,003			80	2,266
		48	0,178			82	11,56

Suite

Symbole	Numéro atomique	Nombre de masse	Abondance relative, %	Symbole	Numéro atomique	Nombre de masse	Abondance relative, %
		83	11,55	Sn	50	112	0,94
		84	56,90			114	0,65
		86	17,37			115	0,33
Rb	37	85	72,20			116	14,36
		87	27,80			117	7,51
Sr	38	84	0,55			118	24,21
		86	9,75			119	8,45
		87	6,96			120	33,11
		88	82,74			122	4,61
Y	39	89	100			124	5,83
Zn	40	90	51,46	Sb	51	121	57,25
		91	11,23			123	42,75
		92	17,11	Te	52	120	0,09
		94	17,40			122	2,43
		96	2,80			123	0,85
Nb	41	93	100			124	4,59
Mo	42	92	15,84			125	6,98
		94	9,04			126	18,70
		95	15,72			128	31,85
		96	16,53			130	34,58
		97	9,46	I	53	127	100
		98	23,78	Xe	54	124	0,096
		100	9,63			126	0,020
Te	43	99	—			128	1,919
Ru	44	96	5,68			129	26,44
		98	2,22			130	4,075
		99	12,81			131	21,18
		100	12,70			132	26,89
		101	16,98			134	10,44
		102	31,4			136	8,87
		104	18,27	Cs	55	133	100
Rh	45	103	100	Ba	56	130	0,102
Pd	46	102	0,80			132	0,98
		104	9,30			134	2,42
		105	22,60			135	6,59
		106	27,10			136	7,81
		108	26,70			137	11,32
		110	13,50			138	71,66
Ag	47	107	51,92	La	57	138	0,089
		109	48,08			139	99,911
Cd	48	106	1,215	Ce	58	136	0,19
		108	0,875			138	0,25
		110	12,39			140	88,49
		111	12,75			142	11,07
		112	24,07	Pr	59	141	100
		113	12,26	Nd	60	142	26,80
		114	28,86			143	12,12
		116	7,78			144	23,91
In	49	113	4,23			145	8,35
		115	95,77			146	17,35

Suite

Symbole	Numéro atomique	Nombre de masse	Abondance relative, %	Symbole	Numéro atomique	Nombre de masse	Abondance relative, %
		148	5,78	Ta	73	180	0,0123
		150	5,69			181	99,988
Pm	61	141	—	W	74	180	0,16
Sm	62	144	2,95			182	26,35
		147	14,62			183	14,32
		148	10,97			184	30,68
		149	13,56			186	28,49
		150	7,27	Re	75	185	37,07
		152	27,34			187	69,93
		154	23,29	Os	76	184	0,018
Eu	63	151	47,77			186	1,582
		153	52,23			187	1,64
Gd	64	152	0,2			188	13,27
		154	2,16			189	16,14
		155	14,68			190	26,38
		156	20,36			192	40,97
		157	15,64	Ir	77	191	38,5
		158	24,95			193	61,5
		160	22,11	Pt	78	190	0,012
Tb	65	159	100			192	0,8
Dy	66	156	0,0525			194	30,2
		158	0,0905			195	35,2
		160	2,297			196	26,6
		161	18,88			198	7,2
		162	25,53	Au	79	197	100
		163	24,97	Hg	80	196	0,15
		164	28,18			198	10,12
Ho	67	165	100			199	17,04
Er	68	162	0,154			200	23,25
		164	1,606			201	13,18
		166	33,36			202	29,54
		167	22,82			204	6,72
		168	27,02	Tl	81	203	29,46
		170	15,04			205	70,54
Tm	69	169	100	Pb	82	204	1,54
Yb	70	168	0,13			206	22,62
		170	3,03			207	22,62
		171	14,27			208	53,22
		172	21,77	Bi	83	209	100
		173	16,08	Po	84	210	—
		174	31,92	At	85	210	—
		176	12,80	Rn	86	222	—
Lu	71	175	97,40	Fr	87	223	—
		176	2,60	Ra	88	226	—
Hf	72	174	0,199	Ac	89	227	—
		176	5,23	Th	90	232	100
		177	18,55	Pa	91	231	100
		178	27,23	U	92	234	0,006
		179	13,73			235	0,720
		180	35,07			238	99,274

Après la découverte de l'hydrogène lourd on a constaté qu'au cours de l'électrolyse de solutions aqueuses l'eau s'enrichit en deutérium, tandis que l'hydrogène gazeux libéré s'enrichit en isotope léger. Sur cette base a été mise au point la méthode de production de l'eau lourde pure (contenant 99,9 % de D_2O) par électrolyse.

Actuellement l'eau lourde est produite en grande quantité par des procédés industriels en utilisant le processus combiné de l'électrolyse et des réactions d'échanges (voir § 20). Si la réaction d'échange, au cours de laquelle l'hydrogène de l'eau est échangé contre le deutérium de l'hydrogène gazeux, est réalisée en présence d'un catalysateur, alors, à l'état d'équilibre, la concentration du deutérium dans l'eau sera à peu près trois fois supérieure à celle de la phase gazeuse.

Le schéma du processus d'obtention de l'eau lourde est : à partir du haut de la colonne l'eau s'écoule vers le bas à l'encontre d'un courant de vapeur mélangée à de l'hydrogène. En présence d'un catalysateur il se produit entre l'hydrogène et la vapeur une réaction d'échange au cours de laquelle une partie du deutérium se concentre dans la vapeur, puis passe dans l'eau. Au bas de la colonne l'eau est dissociée par le courant électrique, tandis que dans l'eau non dissociée le processus de concentration du deutérium se poursuit, et l'hydrogène remonte avec la vapeur à l'encontre du courant d'eau. Ces colonnes sont disposées en cascade. La production de l'eau lourde nécessite des grandes consommations d'électricité, c'est pourquoi, les usines de l'eau lourde sont localisées près des sources d'énergie électrique bon marché (installations hydroélectriques).

En conclusion on fournit un tableau d'isotopes naturels (stables) en indiquant le pourcentage de leur abondance (tableau VI).

CHAPITRE III

STRUCTURE NUCLÉAIRE DE L'ATOME

§ 23. Section efficace de diffusion des particules

Jusque-là on a considéré l'atome comme une entité entière. Maintenant on va confronter les faits sur lesquels sont basées les conceptions modernes de l'atome, considéré comme un système composé d'un noyau lourd et des électrons qui l'entourent.

Le meilleur procédé d'investigation de la structure de l'atome consiste à le « sonder » par des particules rapides : électrons animés de grandes vitesses ou particules α des substances radio-actives. Les processus engendrés par le passage du flux de particules rapides à travers la matière sont en général très variés et compliqués. On s'intéressera dans ce paragraphe et les suivants rien qu'aux phénomènes de diffusion de particules, c'est-à-dire aux phénomènes résultant de la déviation des particules de leur trajectoire initiale. L'étude de ces phénomènes permet de juger du degré de remplissage par la matière de l'espace occupé par l'atome ainsi que de la distribution dans ce dernier de l'électricité positive et négative. Toutefois, on examinera d'abord certaines questions générales se rapportant à la diffusion des particules.

Soit une particule qui se meut parmi des boules immobiles distribuées de façon chaotique et avec lesquelles elle peut entrer en collision. Le choc d'une particule en mouvement avec une boule quelconque est un phénomène aléatoire. Il est évident, toutefois, que la probabilité de parcourir la distance x *sans collision* est une certaine fonction de cette distance $f(x)$. D'un autre côté, on peut considérer que la probabilité *d'une collision* sur un segment infiniment petit dx est proportionnelle à dx, c'est-à-dire est égale à $a\,dx$, tandis que la probabilité de parcourir sans collision ce segment est égale à $1-a\,dx$. La probabilité de parcourir sans collision la distance $x+dx$ peut être maintenant exprimée de deux manières : d'un côté, c'est une fonction $f(x+dx)$; de l'autre, on peut envisager le parcours du segment de longueur $x+dx$ comme un événement composé comprenant deux étapes : le parcours de la distance x et de la distance suivante de x à $x+dx$. La probabilité de cet événement composé est égale au produit des probabilités des deux événements, c'est-à-dire à $f(x)\,(1-a\,dx)$. On a donc

$$f(x+dx)=f(x)(1-a\,dx),$$

ou, aux infiniments petits du second ordre près,

$$f(x)+\frac{df(x)}{dx}\,dx=f(x)-af(x)\,dx,$$

d'où, après de légères transformations,

$$df/f=-a\,dx,$$

ou en intégrant

$$f=ce^{-ax}.$$

La constante d'intégration vient de la condition évidente que la probabilité de parcourir sans collision un chemin $x=0$ est une certitude, c'est-à-dire est égale à l'unité. Ceci donne $c=1$ et en définitive

$$f(x)=e^{-ax}. \tag{23.1}$$

Ainsi donc, la probabilité de traverser une couche quelconque de matière sans collision diminue exponentiellement avec l'accroissement de l'épaisseur de la couche.

Déterminons maintenant la signification physique de la constante a. Remarquons avant tout que cette quantité a la dimension de l'inverse de la longueur, car l'exposant ax doit être une grandeur sans dimension. Pour définir la signification physique de a on calculera le libre parcours moyen de la particule en utilisant la formule (23.1). Les particules subissant des collisions sur le segment entre x et $x+dx$ n'ont pas éprouvé de chocs à la traversée du segment x. La probabilité de parcourir sans collision le chemin x est d'après ce qu'on vient de dire e^{-ax} et la probabilité de collision entre x et $x+dx$ est $a\,dx$. C'est pourquoi la probabilité pour le parcours libre d'être égal à x est le produit

$$ae^{-ax}\,dx.$$

Le libre parcours moyen λ selon la formule des moyennes*) est égal à

$$\lambda\equiv\bar{x}=\int_0^\infty xae^{-ax}dx=a\int_0^\infty xe^{-ax}\,dx. \tag{23.2}$$

En intégrant par parties on trouve

$$\lambda=a\left[\left(-\frac{1}{a}xe^{-ax}\right)\Big|_0^\infty+\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\right]=\frac{1}{a}.$$

Ainsi donc, la constante a peut être interprétée comme une quantité inverse du libre parcours moyen

$$a=1/\lambda \tag{23.3}$$

et la formule (23.1) peut être récrite sous la forme

$$f(x)=e^{-\frac{x}{\lambda}}. \tag{23.4}$$

*) Voir l'Annexe I à la fin du livre.

On peut donner à la constante a encore une autre interprétation, fort intéressante pour l'exposé ultérieur. La dimension de a, comme il a été noté, est cm^{-1}; on la représente de la façon suivante :

$$[a]=cm^2/cm^3\equiv cm^{-1}.$$

Supposons que le nombre de particules diffusantes immobiles par unité de volume soit n. Remplaçons chaque particule diffusante par une cible en forme de cercle de rayon r_0 et d'aire σ, choisie de façon que chaque particule en mouvement qui traverse cette cible éprouve une déviation (« collision »). Il est facile de constater que la dimension de $n\sigma$ est cm^{-1} :

$$[n\sigma]=\frac{1}{cm^3}cm^2=cm^{-1}.$$

L'aire σ est appelée « section efficace » de diffusion et, respectivement, r_0 le rayon de la section efficace. Le produit $n\sigma$ est appelé section macroscopique; il représente la somme des sections efficaces par unité de volume. Puisque la dimension de a coïncide avec celle de $n\sigma$, on peut interpréter a comme une somme des sections efficaces par unité de volume et l'écrire sous la forme de $n\sigma$.

L'interprétation statistique de la section efficace est la suivante. Soit $N_0=1$ la densité du flux de particules diffusées, c'est-à-dire qu'à travers 1 cm^2 par seconde passe une particule. Le nombre de centres de diffusion n par unité de volume est également supposé égal à l'unité. Dans ce cas la probabilité de diffusion peut être exprimée comme le rapport de l'aire de la section efficace σ à la section du « flux », c'est-à-dire à 1 cm^2. Ainsi donc, σ est la probabilité de diffusion au cours de la traversée d'une couche d'épaisseur de 1 cm contenant une particule et $n\sigma$ la probabilité de diffusion au cas où la densité des particules dans la couche est n.

Examinons maintenant le cas d'atténuation du flux de particules lorsqu'elles traversent une couche d'épaisseur quelconque, en tenant compte de ce que chaque particule après collision (c'est-à-dire ayant traversé le cercle de rayon égal à la section efficace σ) quittera le flux parallèle et ne sera plus enregistrée par l'appareil de détection. Partageons la couche entière en des feuilles infiniment minces dx. Le nombre de particules diffusantes par chaque cm^2 sera $n\,dx$; la somme de leurs sections efficaces sera $\sigma n\,dx$.

Si la surface de notre feuille infiniment mince est frappée par un pinceau parallèle de particules de densité N, l'atténuation du flux s'exprimera par

$$-dN=N\sigma n\,dx, \tag{23.5}$$

d'où en intégrant on obtient

$$N=N_0e^{-n\sigma x}=N_0e^{-ax}=N_0e^{-\frac{x}{\lambda}},$$

où N_0 est la densité du flux de particules pénétrant dans la couche épaisse.

§ 24. Sondage des atomes par des électrons

Examinons maintenant la diffusion des électrons. Quand un faisceau d'électrons traverse une substance, il s'atténue, c'est-à-dire que le nombre d'électrons y diminue, et ceci pour deux raisons. D'abord les électrons peuvent perdre leur énergie en la dépensant à des processus différents dus au passage de l'électron rapide à travers l'atome (ionisation et excitation, voir ch. VII); en second lieu ils peuvent subir des collisions élastiques à la suite desquelles ils ne perdent pas d'énergie, mais modifient brusquement leur direction et quittent le faisceau. L'atténuation du faisceau d'électrons du fait de la diffusion a déjà été étudiée au début de la dernière décennie du siècle dernier par Lenard qui montra qu'après la traversée d'une couche de matière d'épaisseur x l'intensité du flux d'électrons faiblit avec l'accroissement de x suivant la loi exponentielle :

$$\frac{N}{N_0}=e^{-\alpha x},$$

où N_0 est l'intensité du faisceau incident, N l'intensité du faisceau émergent de la couche x, quant au coefficient α il caractérise l'atténuation du faisceau du fait de la diffusion sur l'unité de chemin parcouru.

Il est facile de voir que le coefficient α a la même signification que le coefficient a au paragraphe précédent : il peut être interprété comme la somme des sections efficaces des atomes de la substance de diffusion des électrons.

L'étude des propriétés de ce coefficient sous les conditions de l'expérience variées a révélé un fait remarquable : il apparut qu'à des vitesses déterminées de l'électron, α est indépendant des propriétés de la substance diffusante étudiée et de son état d'agrégation et est exclusivement fonction de sa densité ϱ; en outre α est proportionnel à ϱ avec une grande précision de sorte que le rapport α/ϱ pour la vitesse considérée de l'électron reste constant. Cependant α/ϱ ne reste plus constant quand varie la vitesse des électrons et diminue rapidement avec l'accroissement de cette vitesse (grossièrement est inversement proportionnel à la quatrième puissance de la vitesse).

Au tableau VII on a donné quelques chiffres illustrant ce brusque accroissement de la transparence de la substance à des électrons aux vitesses croissantes.

Tableau VII

$\beta=\frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\varrho}$ (en $g^{-1}\cdot cm^2$)	$\beta=\frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\varrho}$ (en $g^{-1}\cdot cm^2$)
0,90	6	0,40	$2{,}4\cdot10^2$
0,80	13	0,20	$360\cdot10^2$
0,70	29	0,10	$8\cdot10^5$
0,60	83	0,04	$58\cdot10^5$
0,50	$2{,}2\cdot10^2$		

En utilisant le tableau VII on peut calculer la valeur de α pour différentes vitesses des électrons. Pour $\beta=v/c=0{,}04$, c'est-à-dire pour $v=\beta c=1{,}2\cdot10^9$ cm/s, on trouve d'après le tableau $\alpha/\varrho=58\cdot10^5$. Ce rapport étant indépendant de la nature de la substance absorbante, on peut d'après la quantité α/ϱ calculer la somme des sections efficaces des molécules de l'air pour des conditions normales (0 °C et 760 mm Hg). Dans ce cas $\varrho=0{,}001\,29$ et par conséquent

$$\alpha=n\sigma=58\cdot10^5\cdot1{,}29\cdot10^{-3}=7{,}5\cdot10^3 \text{ cm}^2/\text{cm}^3.$$

Cette quantité est proche de la somme des sections des molécules gazeuses dans 1 cm^3 de gaz dans des conditions normales, calculée d'après les données de la théorie cinétique des gaz (diffusion, conductibilité thermique). En effet, le nombre de molécules du gaz dans 1 cm^3 à des conditions normales est égal à $2{,}7\cdot10^{19}$; pour $r_0=10^{-8}$ on trouve

$$n\sigma=2{,}7\cdot10^{19}\cdot3{,}14\cdot10^{-16}=8{,}5\cdot10^3 \text{ cm}^2/\text{cm}^3.$$

Si les vitesses des électrons sont élevées, α/ϱ diminue brusquement, par exemple, pour $v/c=0{,}9$, c'est-à-dire $v=2{,}7\cdot10^{10}$ cm/s, $\alpha/\varrho=6$ d'où $\varrho=6\cdot1{,}29\cdot10^{-3}=7{,}7\cdot10^{-3}$, c'est-à-dire à peu près 10^6 fois moins que dans le cas analysé ci-dessus.

Cela signifie que le vrai volume occupé par la *substance*, autrement dit par les électrons et les particules chargées positivement, dans une sphère de rayon $r_0=10^{-8}$ cm (la sphère de l'atome d'après la théorie cinétique des gaz) est tout à fait infime.

Au début de ce paragraphe on a noté que les résultats obtenus n'ont lieu qu'au cas où les électrons étudiés ne possèdent pas des vitesses trop grandes ou trop petites. Dans ces cas extrêmes intervient une série de facteurs qui modifient essentiellement la situation de la traversée de la matière par les électrons. C'est justement dans le cas d'électrons très lents (d'énergie de l'ordre de fractions de l'électron-volt) que se manifestent tout d'abord les phénomènes liés à la nature ondulatoire de l'électron que l'on étudiera au chapitre X (en particulier, l'effet Ramzauer consistant dans l'accroissement de la transparence de l'atome à des électrons lents). Au contraire dans le cas des électrons très rapides (d'énergie de l'ordre de 10^7 à 10^8 eV) le rôle prépondérant passe à une série de processus complexes liés à la structure des particules élémentaires dont est faite la matière.

§ 25. Propriétés des particules α

Des résultats encore plus précis sur le rôle de l'électricité positive dans l'atome ont été obtenus au moyen du « sondage » des atomes par des particules α. Donnons quelques faits de base se rapportant à leur nature.

Les particules α sont émises par de nombreuses substances radio-actives (par exemple le radium). Le fait qu'elles constituent des faisceaux de *particules* est directement observable sur des photographies de leurs trajectoires dans la chambre de Wilson, dont l'exemple est donné à la figure 51. Les

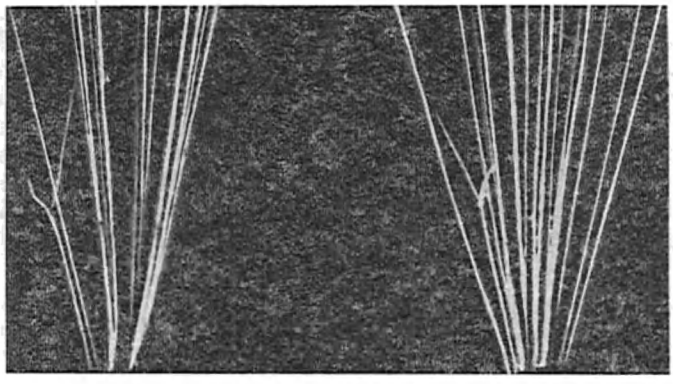


Fig. 51. Traces de particules α dans la chambre de Wilson

particules α sont déviées par des champs électriques et magnétiques d'où il résulte qu'elles portent une charge électrique. Le sens de ces déviations montre que cette charge est *positive*. Toutefois, les champs qui font dévier sensiblement les électrons n'influent guère sur la trajectoire des particules α, d'où il s'ensuit qu'elles possèdent des grandes masses en comparaison de la masse de l'électron. En effet, pour photographier la trajectoire des particules α déviées par le champ magnétique, il a fallu placer la chambre de Wilson dans un champ magnétique très intense. Pour la première fois cette expérience a été réalisée par P. Kapitsa; une des photographies qu'il a réussi de prendre avec un champ magnétique de 43 000 œrsteds est donnée à la figure 52.

Le nombre de particules α émis par des substances radio-actives fut mesuré par un calcul direct du nombre d'éclats lumineux sur l'écran fluorescent (scintillations) provoqués par le faisceau de particules α d'angle solide très faible. Le nombre total de particules α émis par 1 g de radium en 1 s est apparu égal à $Q=3{,}7\cdot10^{10}$. La charge transportée par une particule α a également été mesurée directement : les particules α d'une préparation d'intensité déterminée pénétraient dans un collecteur métallique (cage de Faraday) dont la charge était fixée à l'aide d'un électromètre. Le nombre de particules

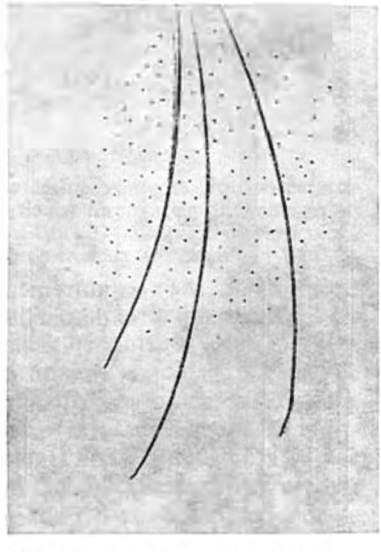


Fig. 52. Traces de particules α dans la chambre de Wilson placée dans un champ magnétique intense (d'après P. Kapitsa)

α aurait pu être déterminé en connaissant Q et la géométrie de l'expérience (distance entre la source et le diaphragme circulaire, placé devant le collecteur, les dimensions du diaphragme). Ces expériences ont montré que *la charge transportée par la particule α est égale à $+2e$*, autrement dit au double de la valeur absolue de la charge de l'électron. Enfin, des expériences avec la déviation magnétique (proportionnelle à ε/mv) et électrique (proportionnelle à ε/mv^2 où ε est la charge des particules α) ont permis de déterminer la masse et la vitesse des particules α.

Pour la vitesse des particules α du radium C on obtenait

$$v = 1{,}992 \cdot 10^9 \text{ cm/s},$$

et pour ε/m_α

$$\frac{\varepsilon}{m_\alpha} = 1{,}446 \cdot 10^{14} \text{ U. E. S. C. G. S.} \cdot g^{-1}.$$

Comparons cette quantité avec la relation $F/{}^1\text{H}$, c'est-à-dire avec le rapport de la charge de Faraday à la masse de l'atome-gramme de l'hydrogène :

$$\frac{F}{{}^1\text{H}} = 2{,}88 \cdot 10^{14} \text{ U. E. S. C. G. S.} \cdot g^{-1}.$$

D'un autre côté, en tenant compte de ce que $\varepsilon = 2e$ et en multipliant le numérateur et le dénominateur du rapport $2e/m_\alpha$ par le nombre d'Avogadro N_0 on obtient

$$\frac{\varepsilon}{m_\alpha} = \frac{2e}{m_\alpha} = \frac{2F}{M_\alpha} = 1{,}44 \cdot 10^{14} \text{ U. E. S. C. G. S.} \cdot g^{-1},$$

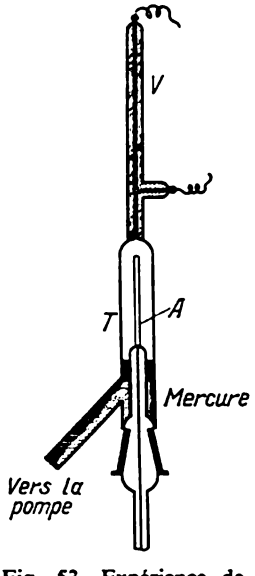


Fig. 53. Expérience de Rutherford et de Royds

où $M_\alpha = m_\alpha \cdot N_0$ est la masse de l'atome-gramme de particules α et $F = e \cdot N_0$ la charge de Faraday. On a donc

$$\frac{F}{{}^1\text{H}} : \frac{2F}{M_\alpha} = \frac{M_\alpha}{2\,{}^1\text{H}} = \frac{2{,}88 \cdot 10^{14}}{1{,}44 \cdot 10^{14}} = 2,$$

d'où

$$\frac{M_\alpha}{{}^1\text{H}} = 4,$$

autrement dit la particule α a la masse de l'atome de l'hélium.

Le fait que la nature des particules α est identique à celle de l'hélium a également été constaté au cours de l'expérience suivante réalisée par Rutherford et Royds (fig. 53).

Une grande quantité de radon radio-actif fut introduite dans un tube A, en verre très fin, dont l'épaisseur des parois est telle que la majorité des particules α les traversent. Ce tube fut enfermé dans un tube plus large T auquel on souda un tube à décharge V aux électrodes incorporées. Avant l'expérience le tube T fut soigneusement pompé.

Les particules α accumulées en *T* formèrent un gaz qui par la montée du mercure était comprimé et introduit dans le capillaire *V*. En faisant passer une décharge à travers *V* au bout de deux jours à partir du début de l'expérience, on arrivait à observer dans la lumière émise la raie jaune de l'hélium et au bout de six jours, le spectre entier de l'hélium.

Après avoir traversé une couche de matière un faisceau parallèle de particules α se trouve diffusé : les particules α modifient quelque peu leur direction. L'étude de la diffusion à l'aide de minces feuilles de métal montra que des déflexions de particules α d'un petit angle en moyenne égal à 2 ou

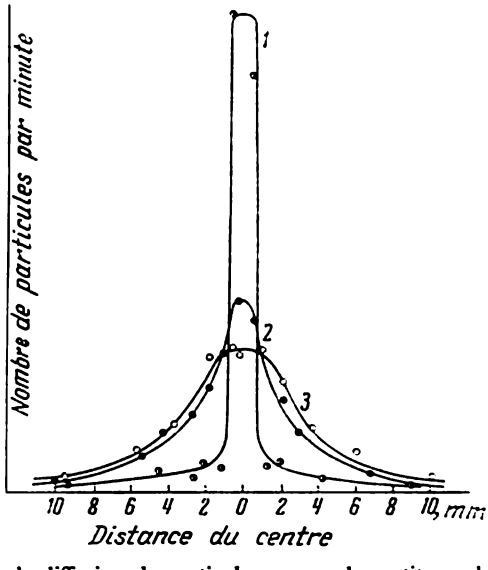


Fig. 54. Fréquence de diffusion de particules α sous des petits angles. Pour la caractéristique de la diffusion on calculait le nombre de particules frappant en différents points l'écran fluorescent : *1* — diffusion de particules α dans l'air; *2* — diffusion de particules α par une mince feuille d'or; *3* — diffusion par deux feuilles d'or

3° s'observent très souvent et que la répartition des particules α suivant les angles suit exactement la courbe statistique des phénomènes aléatoires (fig. 54). A côté de cette diffusion à des faibles angles, les collaborateurs de Rutherford, Geiger et Marsden, découvrirent que certaines particules α (à peu près 1 sur 8000) déviaient d'un angle très grand, quelquefois dépassant 90° et même atteignant en certains cas 180°. Expliquer ces grands angles de diffusion par l'accumulation de petites déflexions aléatoires s'est avéré impossible, car la courbe statistique de diffusion montre que le nombre de particules ayant pu subir de fortes déflexions serait de beaucoup inférieur à 1 sur 8000.

Les grands angles de diffusion s'observant au cours de la traversée par les particules α des feuilles métalliques ont également été décélés lors de la

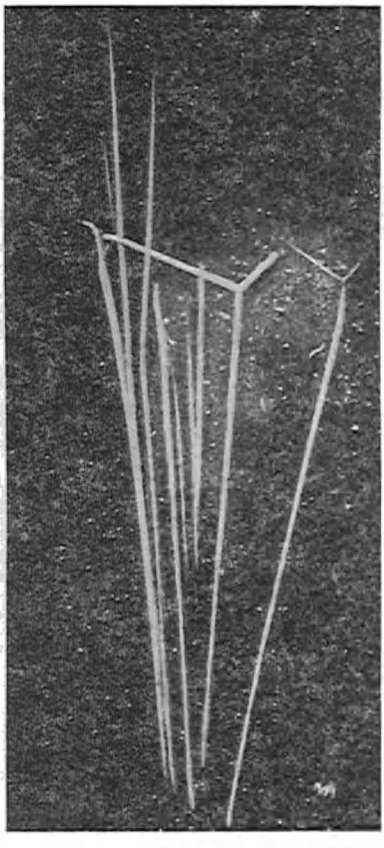


Fig. 55. Diffusion de particules α dans de l'oxygène

traversée des gaz et ils peuvent être observés sur les photographies des trajectoires de particules α prises à l'aide de la chambre de Wilson. L'une de ces photographies est donnée à la figure 55 où l'on voit la trace de la particule α dans l'oxygène : la trace courte appartient à l'atome d'oxygène ayant été mis en vitesse, la trace plus longue à la particule α déviée de sa trajectoire initiale d'un angle égal à environ 90°. Cette photographie montre clairement que les grandes déflexions ne sont pas dues à l'accumulation de petites déviations mais sont le résultat d'une seule collision.

Rutherford indique que cet événement n'est possible que si à l'intérieur de l'atome il existe un champ électrique extrêmement intense créé par une charge positive associée à une grande masse et concentrée dans un volume infime (de rayon de l'ordre de 10^{-13} cm). Ce phénomène a suggéré le modèle « nucléaire » de l'atome d'après lequel l'atome reproduit le système planétaire : un noyau chargé positivement de dimension très petite dans lequel est concentrée presque toute la masse de l'atome et des électrons négatifs gravitant autour du noyau sur des orbites fermées.

§ 26. Théorie de diffusion des particules α

Sur la base de ces conceptions Rutherford développa la théorie quantitative de diffusion des particules α.

Soit en O (fig. 56) un noyau diffusant. Il est évident que sa charge doit être égale en valeur absolue à un multiple entier de la charge de l'électron, car dans l'atome neutre la charge positive du noyau doit être compensée exactement par la somme des charges négatives des électrons.

Désignons la charge du noyau placé en O par $+Ze$, où Z est un entier, et supposons que la masse de ce noyau est si grande par rapport à celle de la particule α que dans la collision avec cette dernière on peut admettre le noyau immobile. Supposons enfin que la force d'interaction du noyau et de la particule α obéit à la loi de Coulomb, autrement dit que cette force

est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux particules. Il faut se représenter clairement que cette dernière supposition n'est d'abord qu'une hypothèse qui ne peut être vérifiée qu'ultérieurement par l'accord de la théorie avec l'expérience. En effet, on n'a aucune raison de considérer à priori que l'interaction des particules infiniment petites, s'approchant à des distances très faibles, doit être régie par la loi de Coulomb, dont la validité n'a été constatée de façon précise que pour des corps macroscopiques.

Selon la mécanique classique, toutes ces suppositions étant réalisées, la particule α doit décrire autour du noyau O une hyperbole. Désignons la

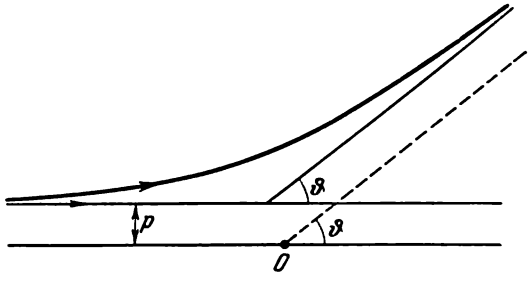


Fig. 56.

masse de la particule α par M et sa vitesse à une grande distance du noyau diffusant par v. Si la particule α n'entrait pas en interaction avec le noyau, elle passerait à la distance p (fig. 56) du noyau (dite paramètre du « choc »). Le calcul qu'on remettra jusqu'au § 53 montre que ϑ, l'angle de déflexion de la particule α repoussée par le noyau suivant la loi de Coulomb, s'exprime en fonction des paramètres considérés de la façon suivante :

$$\cot\frac{\vartheta}{2}=\frac{Mv^2p}{2Ze^2}. \tag{26.1}$$

Il serait inutile d'essayer de vérifier directement cette formule par l'expérience, car elle comprend le paramètre du choc p qu'on ne peut mesurer.

On peut, toutefois, utiliser la formule (26.1) en qualité d'élément de la théorie statistique qui nous donne l'expression de la section efficace de diffusion en fonction des paramètres que l'expérience permet de déterminer.

Soit une sphère au centre de laquelle se trouve placée la feuille de diffusion F (fig. 57). Supposons que cette feuille est frappée en une unité

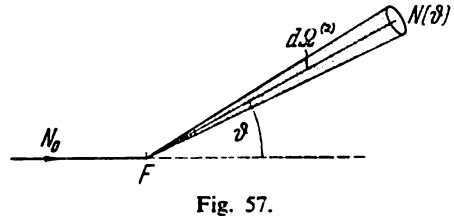


Fig. 57.

de temps par N_0 particules α. Dans une étude plus détaillée de la diffusion on détermine le nombre moyen de particules $N(\vartheta)$ diffusées à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega^{(2)}$ dans la direction définie par les angles ϑ et φ. La grandeur de l'angle solide $d\Omega^{(2)}$ est égale au rapport de l'élément de surface de la sphère au carré du rayon

$$d\Omega^{(2)}=\frac{R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{R^2}=\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \qquad (26.2)$$

Dans les expériences de Rutherford et de ses collaborateurs on étudiait le plus souvent un nombre moyen de particules diffusées dans la région comprise entre les deux angles solides caractérisés par les ouvertures ϑ et $\vartheta+d\vartheta$ (fig. 58). Il est évident que l'angle solide $d\Omega^{(1)}$ (ou simplement $d\Omega$) relatif à ce cas s'obtiendra en intégrant (26.2) sur φ entre 0 et 2π :

$$d\Omega=d\Omega^{(1)}=2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta. \qquad (26.3)$$

C'est justement la section efficace à l'intérieur de $d\Omega$ qu'on va calculer.

Supposons qu'avant la diffusion les particules α filent en un faisceau parallèle. Comme, toutes les autres conditions étant égales, l'angle de déviation des particules α selon la formule (26.1) est défini par le paramètre du choc p, il paraît que les particules α, dont le paramètre du choc se trouve entre p et $p-dp$, c'est-à-dire les particules α qui se déplacent à l'intérieur des anneaux formés par les cercles de rayons compris entre p et $p-dp$, décrits autour de chacun des centres de diffusion (fig. 59), dévieront d'un angle se trouvant entre les limites ϑ et $\vartheta+d\vartheta$. L'aire de chacun de ces anneaux est égale à $2\pi p\, dp$ et on peut affirmer que le nombre moyen de particules α déviées d'un angle entre ϑ et $\vartheta+d\vartheta$, autrement dit se déplaçant après la déviation à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega$, est proportionnel à $2\pi p\, dp$.

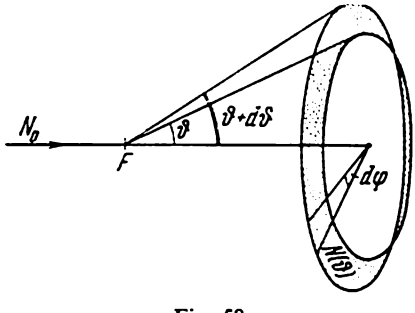


Fig. 58.

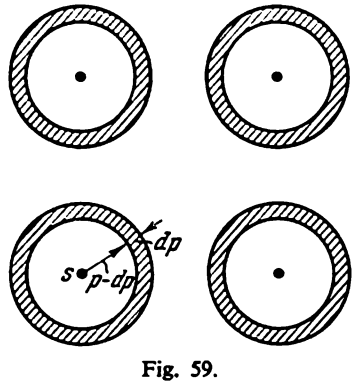


Fig. 59.

Ainsi donc, la section efficace du noyau $d\sigma$ de diffusion des particules α est égale à

$$d\sigma=2\pi p\, dp. \qquad (26.4)$$

En tirant maintenant p de (26.1) et en l'élevant au carré on obtient

$$p^2=\left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \cot^2\frac{\vartheta}{2}.$$

En dérivant on trouve l'expression suivante

$$p\,dp=-\frac{1}{2}\left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2\frac{\cot\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

et en portant dans (26.4)*) on a

$$d\sigma=2\pi\frac{1}{2}\left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2\frac{\cot\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Introduisons de même dans cette expression l'angle solide $d\Omega$ défini par la formule (26.3) :

$$d\sigma=\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \tag{26.5}$$

C'est justement la formule de Rutherford de diffusion de particules α.

A des fins de comparaison avec les résultats de l'expérience cherchons la section macroscopique Σ, c'est-à-dire la somme des sections efficaces pour tous les noyaux diffusants par cm³. Si l'on suppose que tous les noyaux sont répartis dans la feuille de façon uniforme sans se superposer, il devient évident que

$$\Sigma=n\,d\sigma,$$

où n est le nombre de noyaux diffusants par cm³. En utilisant (26.5) on obtient :

$$\Sigma=n\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \tag{26.6}$$

Si maintenant on désigne par N le nombre de particules α frappant en 1 s la surface de la feuille de diffusion, le nombre moyen de particules α diffusées d'un angle ϑ à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega$ sera évidemment

$$dN=N\Sigma=nN\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \tag{26.7}$$

Comme on le voit, le nombre de particules α dépend fortement de l'angle ϑ et croît rapidement avec la diminution de ϑ.

---

*) Le signe moins n'a qu'un sens restreint : il ne signifie qu'avec l'accroissement du paramètre du choc p l'angle ϑ diminue (et inversement). C'est pourquoi dans l'exposé ultérieur on n'utilise que la valeur absolue de $p\,dp$.

§ 27. Vérification expérimentale de la formule de Rutherford

La formule de Rutherford a été soumise à des vérifications expérimentales très minutieuses De (26.7) on tire

$$dN \cdot \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = nN \left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 d\Omega.$$

Ainsi donc, si l'on ne modifie que l'angle ϑ, toutes les autres conditions étant inchangées, on aura

$$dN \cdot \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = \text{const}.$$

Cette conclusion fut confirmée en premier lieu. Dans ce but on a utilisé le dispositif suivant (fig. 60). Un cylindre métallique B était fixé sur le cercle gradué A. Le cylindre avec le cercle pouvait tourner sur le joint rodé C. La préparation radio-active R et la feuille de diffusion F étaient placées sur un tube spécial T indépendant du cylindre; on rendait ainsi la position de R et F invariable lors de la rotation du reste du système. Un écran S (transparent) était placé devant le microscope M faisant bloc avec le cylindre B. En faisant tourner le cercle A on pouvait fixer le microscope de façon à mesurer le nombre de particules α quel que soit l'angle de diffusion. Le cylindre était fermé dans sa partie supérieure avec une lame en verre P et était pompé par le tube T afin d'éviter des diffusions supplémentaires dans l'air. Au cours de l'expérience on enregistra plus de 100 000 scintillations.

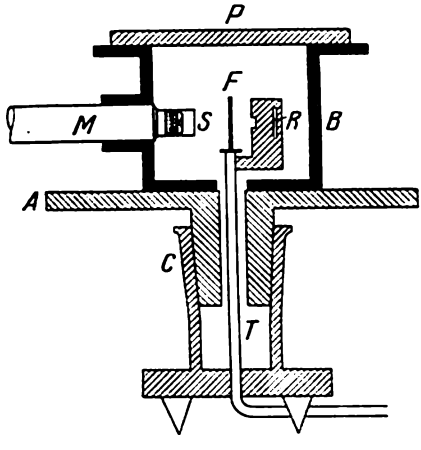


Fig. 60. Appareil servant à l'étude de la variation du nombre de particules α diffusées en fonction de l'angle de diffusion

Les résultats acquis pour la diffusion par l'or sont donnés au tableau VIII qui montre que malgré des variations dans des larges limites de $1/\sin^4(\vartheta/2)$ et du nombre de scintillations, le produit $dN \sin^4(\vartheta/2)$ restait à peu près constant, ce qui confirmait la théorie*).

De façon analogue on a étudié la variation de la diffusion en fonction de l'épaisseur des feuilles et de la vitesse des particules α. Dans tous les cas de diffusion dans des feuilles en métal lourd on constata que les résultats expérimentaux étaient en accord avec les exigences de la théorie. Cette confirmation était également une démonstration de l'application de la loi de Coulomb aux interactions des particules α et des noyaux diffusants dans

*) En effet, le tableau montre que quand $1/\sin^4(\vartheta/2)$ varie de près de 3500 fois, $dN \sin^4(\vartheta/2)$ ne varie que de 30 %.

Tableau VIII

Diffusion de particules α par des feuilles d'or

Angle de déviation en degrés	$\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$	Nombre de scintillations	$dN \sin^4(\vartheta/2)$
150	1,15	33,1	28,8
135	1,38	43,0	31,2
120	1,79	51,9	29,0
105	2,53	69,5	27,5
75	7,25	211	29,1
60	16,0	477	29,8
45	46,6	1 435	30,8
30	223	7 800	35,0
15	3445	132 000	38,4

des conditions de l'expérience, c'est-à-dire pour des noyaux lourds et des particules α pas trop rapides.

Un autre procédé de vérification expérimentale de la théorie, spécialement pour le cas de la diffusion dans les gaz, consiste à produire dans la chambre de Wilson un grand nombre de photographies de trajectoires de particules α dans le gaz en mesurant les angles de déviation et en calculant la fréquence de certains de ces angles. Cette méthode fut utilisée par Blackett essentiellement dans le but de rechercher les limites de l'application de la loi de Coulomb. Il apparut que pour l'argon à des distances de $7 \cdot 10^{-12}$ à 10^{-9} cm entre le centre des noyaux et les particules α et pour l'air, à des distances allant de $3 \cdot 10^{-12}$ à $5 \cdot 10^{-10}$ cm la loi de Coulomb était applicable.

Il n'en suit pas évidemment que la loi de Coulomb est toujours applicable aux interactions nucléaires. Au contraire, l'étude de la diffusion des particules α par des noyaux *légers* a montré que quand la distance entre les particules en interaction diminue jusqu'à 10^{-12} cm, on observe des dérogations brusques à la loi de Coulomb et à des distances inférieures à 10^{-12} cm on découvre l'action des *forces d'attraction* faiblissant rapidement avec la distance et qui dépassent les forces de répulsion de Coulomb entre des particules de même charge.

§ 28. Détermination de la charge du noyau

La formule de Rutherford permet de déterminer expérimentalement le nombre Z, c'est-à-dire le nombre de charges élémentaires positives du noyau. En effet, en calculant sur un écran phosphorescent le nombre de scintillations N provoquées par les particules α incidentes, ainsi que le nombre de scintillations dN dues aux particules α déviées d'un angle ϑ, on obtient la quantité $d\sigma = dN/N$. Dans le second membre de la formule de Rutherford, en plus de la grandeur cherchée Z, entrent soit des grandeurs connues (n, e), soit des grandeurs qui peuvent être déterminées expérimentalement (Mv^2, ϑ). Donc, pour déterminer Z il faut calculer les nombres de

scintillations N et dN. La grande difficulté de cette expérience est que ces nombres diffèrent énormément entre eux. Dans les premières expériences les nombres N et dN étaient mesurés sur des dispositifs différents, autrement dit dans des conditions variées, ce qui était une source d'erreurs sensibles.

J. Chadwick utilisa un montage dans lequel les deux nombres N et dN pouvaient être mesurés sur un même dispositif, ce qui lui permit de déterminer Z avec une plus grande précision. L'idée de l'expérience de Chadwick est la suivante. La feuille de diffusion a la forme de l'anneau AA' (fig. 61); la préparation R et l'écran S en ZnS sont placés à la même distance r

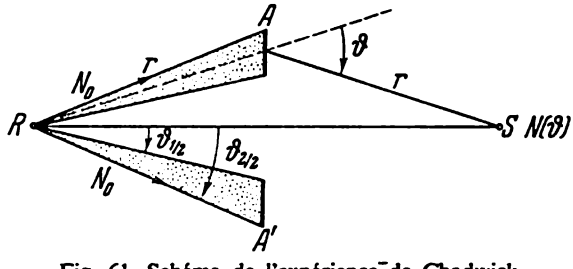


Fig. 61. Schéma de l'expérience de Chadwick

de AA'. On mesure le nombre de particules α déviées d'un angle déterminé ϑ, choisi (pour faciliter le calcul) de façon qu'il soit le double de l'angle formé par l'axe RS et la direction des rayons émanant de R vers la feuille (fig. 61). En disposant à l'intérieur de l'anneau entre R et S un écran opaque pour des particules α, on pouvait ainsi compter rien que les particules α diffusées; au contraire, en cachant par l'écran l'anneau AA' on arrivait à compter le nombre de particules N contenu dans le faisceau incident. Le nombre de ces particules étant trop grand pour pouvoir être compté directement d'après les scintillations de ces particules sur l'écran (par exemple, pour que le nombre de scintillations de particules α diffusées soit de 30 par minute, il faut que le nombre N soit égal à 20 000 par minute), on disposait devant l'écran S un disque tournant présentant une fente étroite qui permettait de réduire à volonté le nombre de scintillations.

Par cette voie Chadwick trouva les valeurs suivantes de Z pour le platine, l'argent et le cuivre : Pt(78) — 77,4; Ag(47) — 46,3; Cu(29) — 29,3. Le nombre entre parenthèses, placé près du symbole chimique de l'élément, désigne le numéro de la case occupée par cet élément dans le tableau périodique de Mendeleïev (numéro atomique). Ainsi donc, les expériences de Chadwick montrèrent que le nombre de charges positives élémentaires du noyau est égal au numéro atomique de l'élément considéré. Cette règle, confirmée par d'autres chercheurs pour toute une série d'éléments, ramène le problème de détermination de la charge du noyau au problème de la précision des numéros atomiques de tous les éléments. Le moyen de le résoudre nous est fourni par les spectres des rayons X qu'on étudiera dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

RAYONS X ET LEUR APPLICATION À LA DÉTERMINATION DES CONSTANTES ATOMIQUES

Les rayons X jouent un grand rôle dans l'étude de l'atome. On a indiqué au § 28, par exemple, que les spectres de rayons X permettent de fixer les numéros atomiques de tous les éléments, c'est-à-dire de déterminer les charges de leurs noyaux. En outre les méthodes de la spectroscopie aux rayons X ont été utilisées avec succès pour l'obtention des valeurs les plus précises du nombre d'Avogadro, de la charge de l'électron e, ainsi que de la charge massique de l'électron e/m. Dans les chapitres suivants on reviendra souvent à l'analyse de certains phénomènes liés aux rayons X. C'est pourquoi, il faut, dès le début, se faire une idée de la nature et des propriétés des rayons X.

§ 29. Rayons X

Les rayons X apparaissent sous l'action des électrons rapides. Dans des ampoules, dites de Rœntgen, en face d'une cathode se dispose une plaque de métal (dans les tubes utilisés en médecine et pour des radioscopies techniques elle est en tungstène) dont le bombardement par des électrons aboutit à la production des rayons X. L'énergie des électrons d'excitation dans des appareils techniques usuels est de l'ordre de 100 000 eV. Il existe de même des installations produisant des rayons X avec des énergies des électrons de l'ordre du million d'électrons-volts et pour les besoins de physique nucléaire on a monté ces derniers temps des accélérateurs spéciaux d'électrons capables de produire des rayons X par freinage des électrons dont l'énergie est de 100 millions d'électrons-volts.

Les rayons X invisibles pour l'œil sont susceptibles de produire une fluorescence visible et très intense de certaines substances cristallines naturelles (platinocyanure de baryum, sulfure de zinc, etc.), ainsi que des poudres spécialement préparées (luminophores). Les rayons X impressionnent la plaque photographique et provoquent l'ionisation des gaz. Tous ces phénomènes servent à reconnaître et à étudier les rayons X.

De par leur nature les rayons X sont identiques à la lumière et n'en diffèrent que par le fait que leurs longueurs d'onde sont plus petites. Comme la lumière, les rayons X possèdent des propriétés ondulatoires que révèlent les expériences d'interférence et de diffraction. Pour la première fois l'expérience d'interférences des rayons X, analogue à celle des miroirs de

Fresnel, a été réalisée par le physicien soviétique V. Linnik. A la figure 62 on a donné une photographie de la figure de diffraction obtenue après le passage des rayons X à travers une fente étroite. Ces expériences sont difficiles à réaliser, car, par suite de la faible longueur d'onde, la fente doit être très étroite et la photographie doit être de plus agrandie pour faire apparaître les franges brillantes et sombres. La photographie montrée à la figure 62 a été prise avec une fente large de 6 μm puis agrandie de 26 fois. Connaissant les conditions géométriques de l'expérience (distance de la fente à la plaque photographique) et mesurant les franges brillantes successi-

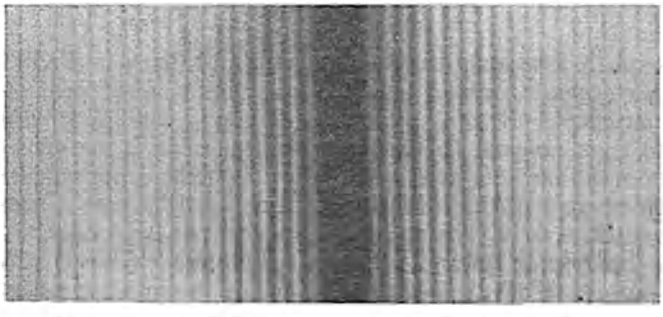


Fig. 62. Diffraction des rayons X à travers une fente étroite (large de 0,006 mm; grossissement : 26 fois)

ves on peut calculer la longueur d'onde des rayons X exactement comme cela se fait en optique*). Avec la photographie donnée sur la figure 62 on a obtenu une longueur d'onde de 8,33 Å à 0,5 % près (rappelons que la longueur d'onde des rayons ultraviolets se trouvant sur la marge des rayons visibles à l'œil est de 4000 Å). Ce sont des rayons X à grande longueur d'onde. La longueur d'onde des rayons X utilisée par la radiographie est de l'ordre de l'angström.

On distingue deux sortes de rayons X. Si l'énergie des électrons subissant un freinage sur l'anticathode ne dépasse pas une valeur déterminée, caractéristique de la substance de l'anticathode, le rayonnement obtenu est appelé *de freinage*. Il se décompose en un spectre continu analogue à celui de la lumière blanche et c'est pourquoi ce rayonnement de freinage est quelquefois appelé rayonnement X « blanc ». Le spectre continu du rayonnement de freinage présente les propriétés caractéristiques suivantes. La distribution de l'intensité en fonction de la longueur d'onde dans ce spectre est traduite par une courbe présentant un maximum pour une valeur bien déterminée de la longueur d'onde (voir fig. 178, p. 355). La décroissance de l'intensité à partir de ce maximum du côté des ondes longues et courtes s'effectue de

*) Voir, par exemple, le livre de G. Landsberg, *Optique*, Gostekhizdat, Moscou, 1957 (en russe).

façon différente : vers les ondes longues la courbe baisse doucement en tendant asymptotiquement vers zéro avec l'accroissement de la longueur d'onde, tandis que vers le côté des ondes courtes, la décroissance est brusque et le spectre s'interrompt brutalement pour une valeur déterminée de la longueur d'onde. Cette valeur critique de la longueur d'onde, ce seuil du spectre continu du côté des longueurs d'onde courtes, est fonction de la tension accélératrice des électrons. A savoir, si cette tension est égale à V kilovolts, la longueur d'onde de ce seuil exprimée en angströms est égale à

$$\lambda = \frac{12{,}345}{V} \text{ Å}. \tag{29.1}$$

Ainsi donc, pour $V = 100$ kV la longueur d'onde la plus courte du spectre continu est 0,123 Å. Il est essentiel que le caractère du spectre continu ne dépend pas de la nature de l'anticathode, et n'est fonction que de la tension accélératrice.

Comme on l'a dit, le spectre continu n'apparaît que dans les cas où l'énergie des électrons d'excitation ne dépasse pas un certain seuil critique. Si l'énergie des électrons est égale ou supérieure à ce seuil, on voit apparaître un rayonnement dit *caractéristique*, car il caractérise la substance de l'anticathode de la même façon qu'un spectre d'émission optique du gaz ou de la vapeur caractérise la substance. Le spectre de rayonnement caractéristique est un spectre de raies. Il est également remarquable que chaque élément donne un spectre qui lui est propre et ceci indépendamment du fait que les rayons X soient émis par l'élément excité lui-même ou par son composé chimique. C'est justement le trait par lequel les spectres de rayons X diffèrent essentiellement des spectres optiques, car un même élément donne des spectres optiques différents suivant qu'il se trouve à l'état atomique ou moléculaire (par exemple, les spectres optiques de l'atome O, de la molécule O_2 et de la molécule H_2O sont complètement différents et ne constituent aucunement des sommes de spectres d'atomes formant la molécule).

Sur la figure 63 on a donné un exemple intéressant des variations du spectre de rayons X avec l'apparition du rayonnement caractéristique. On y a porté sur l'axe des abscisses des longueurs d'onde et sur l'axe des ordonnées des intensités; les différentes courbes ont été tracées pour des énergies variées des électrons d'excitation. L'anticathode est chaque fois en rhodium. On voit que pour 23,2 kV le spectre est continu, mais pour 31,8 kV sur le spectre continu se superpose un spectre de raies spectrales bien nettes; pour 40,0 kV la nature du spectre ne se modifie pas, mais l'intensité des raies augmente de la sorte que la plus brillante d'entre elles n'est plus contenue entièrement dans le dessin à l'échelle choisie.

Ce spectre de raies correspond justement au rayonnement caractéristique de la substance de l'anticathode, du rhodium (Rh) dans le cas considéré.

Les raies spectrales du rayonnement caractéristique constituent des suites régulières ou des séries disposées dans les différentes parties du spectre de rayons X. Pour des raisons historiques ces séries sont désignées par les lettres K, L, M, N. La série K appartient à la plus courte des longueurs

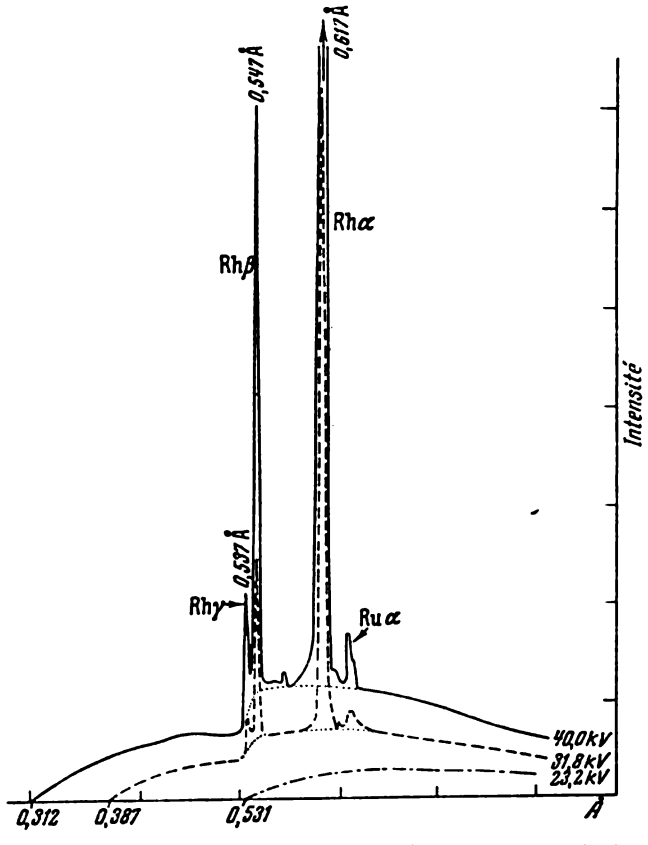


Fig. 63. Apparition de la série *K* de l'émission caractéristique de l'anticathode en rhodium. Sur l'axe des abscisses sont portées les longueurs d'onde du rayonnement X avec indication de la longueur d'onde limite de chaque spectre. (La raie α-Ru appartient au ruthénium contenu dans l'échantillon du rhodium sous forme d'impureté)

d'onde, la suivante, en direction des grandes longueurs d'onde, est la série *L*, puis viennent les séries *M* et *N* qu'on observe d'ailleurs seulement pour des éléments lourds. Ces séries seront étudiées en plus de détails au § 35.

§ 30. Absorption des rayons X

Au nombre des propriétés remarquables des rayons X appartient l'aptitude singulière d'absorption qu'ils possèdent. Il apparaît tout d'abord que l'absorption des rayons X par une substance est complètement indépendante de ses propriétés optiques. Ainsi, par exemple, le verre au plomb, incolore et transparent à la lumière, absorbe complètement les rayons X et est, par suite, utilisé pour la protection du personnel travaillant avec les appareils

à rayons X. Au contraire, une mince feuille d'aluminium, opaque à la lumière, absorbe très peu les rayons X et pour des rayons émis par des tubes Rœntgen des appareils industriels (pour des tensions de l'ordre de 100 kV) est presque absolument transparente.

L'application des rayons X à des radioscopies médicales ou techniques est basée sur les lois d'absorption des rayons X, dont on abordera maintenant l'étude. Si un pinceau parallèle de rayons X traverse une couche de substance, ce pinceau est atténué, c'est-à-dire que son intensité diminue. Cette atténuation est le résultat de deux processus : 1) une diffusion et 2) une absorption. Ces deux processus sont essentiellement différents :

1. L'atténuation par diffusion s'explique par le fait qu'une partie des rayons est déviée (fig. 64) et est ainsi séparée du pinceau parallèle. Ce phénomène est tout à fait analogue à la diffusion qu'éprouve la lumière traversant un milieu trouble. La différence ne consiste qu'en ce que la turbidité du milieu pour la lumière est due à la présence en état de suspension de particules suffisamment grandes dont l'indice de réfraction diffère de l'indice de réfraction du milieu. Pour des rayons X, par suite de leur faible longueur d'onde, tout milieu transparent à la lumière est un milieu « trouble ». Dans ce cas le rôle de centres de diffusion est tenu par les atomes et les molécules de la substance. Une diffusion moléculaire analogue s'observe également pour la lumière. Mais elle ne produit dans le cas de la lumière qu'un effet très faible. A titre de comparaison on peut donner les chiffres suivants. Par suite de la diffusion un pinceau parallèle *de lumière* est atténué de e ($\approx 2{,}7$) fois par une couche d'eau pure épaisse de 1 km; un pinceau de *rayons* X est atténué le même nombre de fois par suite d'une seule diffusion (c'est-à-dire en faisant abstraction de l'absorption) par une couche d'eau de 5 cm. Pour que la diffusion moléculaire de la lumière soit facilement discernable, il faut que dans le milieu apparaissent de nombreuses zones de compression et de détente (les fluctuations de densité), comme c'est le cas, par exemple, de toute substance au voisinage de sa température critique (ce qu'on appelle « opalescence critique »).

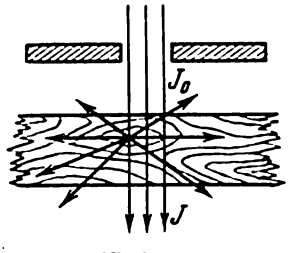


Fig. 64. Diffusion des rayons X traversant une substance

2. L'atténuation par absorption s'explique par le fait qu'une partie de l'énergie des rayons X éprouve une véritable absorption par la substance, c'est-à-dire en fin de compte se transforme en chaleur.

Si un pinceau parallèle de rayons X est monochromatique, c'est-à-dire est composé de rayons d'une seule longueur d'onde, son atténuation par une couche de substance infiniment mince d'épaisseur dx obéit à la loi simple

$$-dJ=\mu J\,dx,$$

où J est l'intensité du pinceau frappant la couche et μ le coefficient carac-

térisant l'atténuation. En intégrant cette équation (voir une équation analogue au § 23), on obtient la loi d'atténuation des rayons X par une couche d'épaisseur finie d :

$$J=J_0e^{-\mu d}, \tag{30.1}$$

où J_0 est l'intensité du pinceau parallèle pour $d=0$. La dimension du coefficient d'absorption μ est [cm^{-1}], car l'exposant μd doit être une grandeur sans dimension.

Comme l'atténuation du pinceau se produit aux dépens de l'absorption proprement dite et de la diffusion, le coefficient d'atténuation μ est une somme de deux coefficients : le coefficient d'absorption vraie τ et le coefficient de diffusion σ :

$$\mu=\tau+\sigma. \tag{30.2}$$

Les deux coefficients τ et σ et par suite μ sont proportionnels à la masse de la substance. Alors il est plus commode d'utiliser les coefficients dits massiques, c'est-à-dire les rapports μ/ϱ, τ/ϱ et σ/ϱ, où ϱ est la densité de la substance. Il est évident que la formule (30.1) peut être mise sous la forme

$$J=J_0e^{-\frac{\mu}{\varrho}\varrho d}. \tag{30.3}$$

Le produit ϱd est la masse de la substance contenue dans une colonne de section 1 cm^2 et d'épaisseur d; μ/ϱ a la dimension [g^{-1} cm^2].

Si $\varrho d=1$, alors $J=J_0e^{-\frac{\mu}{\varrho}}$; il s'ensuit que μ/ϱ caractérise l'atténuation des rayons X par une couche contenant 1 g de substance par centimètre carré.

Pour des calculs théoriques il est encore plus commode d'utiliser des *coefficients* dits *atomiques* μ_a, τ_a, σ_a, qu'on obtient des valeurs de μ/ϱ, τ/ϱ et σ/ϱ pour l'élément considéré en les multipliant par la masse absolue de l'atome, c'est-à-dire par le rapport de l'atome-gramme de l'élément A au nombre d'Avogadro N :

$$\mu_a=\frac{\mu}{\varrho}\frac{A}{N}, \quad \tau_a=\frac{\tau}{\varrho}\frac{A}{N}, \quad \sigma_a=\frac{\sigma}{\varrho}\frac{A}{N}. \tag{30.4}$$

Ainsi donc, par exemple, μ_a caractérise l'atténuation dans la couche contenant 1 atome par cm^2. Il faut noter de même que la dimension des coefficients atomiques μ_a, τ_a et σ_a, comme il est facile de se convaincre, est [cm^2]. Ils peuvent donc être assimilés à des sections efficaces de l'atome, respectivement de l'atténuation, de l'absorption ou de la diffusion des rayons X.

On a obtenu empiriquement la relation suivante qui, d'ailleurs, est confirmée assez souvent :

$$\tau_a=cZ^4\lambda^3, \tag{30.5}$$

où c est une constante, Z le numéro atomique de la substance et λ la longueur

d'onde. A l'aide des définitions (30.4) on en tire pour le coefficient d'absorption massique

$$\frac{\tau}{\varrho}=\frac{\tau_a N}{A}=\frac{cN}{A}Z^4\lambda^3, \tag{30.6}$$

soit

$$\frac{\tau}{\varrho}=\frac{c'}{A}Z^4\lambda^3 \quad (c'=cN). \tag{30.6'}$$

Ces formules montrent que l'absorption de rayons d'une certaine longueur d'onde s'accroît rapidement avec l'augmentation du numéro atomique (proportionnellement à la *quatrième* puissance de Z).

La seconde propriété remarquable de l'absorption des rayons X est que ce phénomène est de nature exclusivement atomique : c'est pourquoi le *coefficient moléculaire* d'absorption s'obtient par addition des coefficients atomiques des éléments formant la molécule. Grâce à quoi pour le calcul des coefficients moléculaires de toute la variété infinie des composés chimiques il suffit de connaître les coefficients d'absorption atomiques des éléments.

Les formules (30.6) et (30.6') et la règle de l'effet cumulatif de l'absorption des rayons X se trouvent à la base de leurs applications dans la radioscopie. Comparons, par exemple, les coefficients d'absorption des os et des tissus du corps humain. La substance des os est un calcium phosphorique $Ca_3(PO_4)_2$; l'absorption des tissus est essentiellement due à l'eau (H_2O) entrant dans leur composition. Puisque les numéros atomiques de Ca, P, O et H sont respectivement égaux à 20, 15, 8 et 1, on trouve que le rapport des coefficients atomiques d'absorption des deux substances est

$$\frac{3\cdot 20^4+2\cdot 15^4+8\cdot 8^4}{2+8^4}\approx 3\left(\frac{5}{2}\right)^4+2\left(\frac{15}{8}\right)^4+8,$$

c'est-à-dire que le coefficient d'absorption du $Ca_3(PO_4)_2$ est à peu près 150 fois supérieur au coefficient atomique d'absorption de l'eau (des tissus). Pour des objectifs pratiques il est, toutefois, plus important de posséder le rapport des coefficients *massiques*. Si on applique la formule (30.6) au cas qui nous intéresse, le rapport sera à peu près égal à 68, ce qui explique pourquoi sur les radiogrammes l'ombre des os est si nette.

Les formules (30.5) et (30.6) montrent également que l'absorption des rayons X croît rapidement avec l'augmentation de la longueur d'onde. Et, au contraire, plus la longueur d'onde est faible, plus le pouvoir de pénétration des rayons X est grand et plus la radiation est dure. Si l'on porte en abscisses les longueurs d'onde et en ordonnées les $\sqrt[3]{\tau/\varrho}$, alors conformément aux formules (30.5) et (30.6) la courbe traduisant l'absorption de l'élément considéré en fonction de λ sera une droite (fig. 65). Toutefois, pour une longueur d'onde déterminée l'absorption subit une brusque variation, puis, de nouveau, varie linéairement. Comme on le voit sur la figure 65, pour le cuivre cette variation s'observe avec $\lambda=1{,}3785$ Å, pour l'argent avec $\lambda=0{,}485$ Å. Ces longueurs d'onde critiques ont la signification suivante.

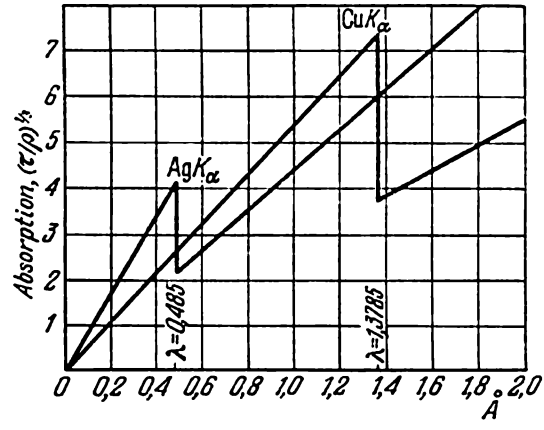


Fig. 65. Variation de l'absorption des rayons X en fonction de la longueur d'onde (raie K_α de l'argent et du cuivre)

Si l'on éclaire un élément quelconque (par exemple Cu ou Ag) par des rayons X monochromatiques de longueur d'onde décroissante, alors, à partir d'une longueur d'onde bien déterminée des rayons X d'excitation, l'élément commence et, si la longueur d'onde continue à diminuer, poursuit à émettre son propre rayonnement caractéristique sous forme de *radiation de fluorescence*. Les longueurs d'onde critiques pour lesquelles s'observe un saut d'absorption correspondent justement aux longueurs d'onde critiques provoquant l'excitation du rayonnement de fluorescence caractéristique de longueur d'onde considérée. L'apparition du saut d'absorption est traduite dans les formules (30.5) et (30.6) par le fait que le coefficient c y a des valeurs différentes de chaque côté de la longueur d'onde critique.

Exercices : 1. L'atténuation des rayons X à la traversée d'une substance est souvent caractérisée par l'épaisseur de la couche de la substance atténuant les rayons X de moitié (l'épaisseur de la demi-absorption est $d_{1/2}$). Démontrer que $d_{1/2}$ s'exprime en fonction de μ/ϱ par la formule

$$d_{1/2}=\frac{0{,}693}{(\mu/\varrho)\varrho}.$$

2. Les coefficients d'absorption massiques pour l'aluminium, l'argent et le plomb sont donnés pour certaines longueurs d'onde dans le tableau.

λ (Å)	μ/ϱ		
	Al	Ag	Pb
0,1	0,16	1,4	3,8
0,5	2,0	11	54
1,0	15	73	—

Calculer les sections efficaces des atomes pour l'absorption de longueurs d'onde données et l'épaisseur des couches d'une demi-absorption.

§ 31. Diffusion des rayons X

La diffusion des rayons X obéit à des règles différentes de celles de la lumière dans le domaine optique du spectre (c'est-à-dire dans le domaine des rayons visibles ou ultraviolets). Comme on sait dans la partie visible du spectre où la longueur d'onde est de l'ordre de 10^{-5} cm, c'est-à-dire de beaucoup supérieure aux dimensions de l'atome (de l'ordre de 1 Å= $=10^{-8}$ cm), la diffusion est inversement proportionnelle à la quatrième puissance de la longueur d'onde (règle de Rayleigh expliquant la couleur bleue du ciel). Dans le domaine des rayons X la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que les dimensions de l'atome. Il apparaît de même que la règle de diffusion y est aussi différente. A savoir, *la diffusion des rayons X est indépendante de la longueur d'onde.* En étudiant la diffusion sous l'angle des oscillations forcées des électrons sous l'action du champ électromagnétique du rayonnement X incident, J. J. Thomson, déjà au cours des premières recherches sur les rayons X, a déduit la formule suivante pour le coefficient de diffusion atomique

$$\sigma_a=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}Z, \tag{31.1}$$

où e et m sont la charge et la masse de l'électron, c la vitesse de la lumière. Le numéro atomique de l'élément Z entrant dans cette formule est égal au nombre d'électrons dans l'atome neutre. D'autre part σ_a, comme il a été déjà noté, a la dimension de l'aire. Ainsi donc, $\frac{\sigma_a}{Z}=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}$ peut être assimilé à la section efficace de l'électron de diffusion des rayons X. En y introduisant les valeurs connues

$$e=4{,}80\cdot10^{-10},\quad \frac{e}{mc}=1{,}759\cdot10^{7},$$

$$c=2{,}997\cdot10^{10},$$

on obtient la section efficace de l'électron

$$\sigma_a=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}=6{,}57\cdot10^{-25}\text{ cm}. \tag{31.2}$$

Le rayon de cette section efficace est

$$r_0=4{,}57\cdot10^{-13}\text{ cm}. \tag{31.3}$$

Cette grandeur est du même ordre que le rayon dit « classique » de l'électron.

Thomson se servit de la formule (31.1) pour déterminer le nombre d'électrons dans l'atome (égal à la charge du noyau Z) d'une façon très intéressante.

Comme d'après la définition des coefficients atomiques (30.4)

$$\sigma_a=\frac{\sigma}{\varrho}\frac{A}{N},$$

pour le coefficient de diffusion massique la formule (31.1) donne

$$\frac{\sigma}{\varrho}=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}\frac{NZ}{A}; \tag{31.4}$$

en utilisant les résultats (31.2) on a

$$\frac{\sigma}{\varrho}=6{,}57\cdot10^{-25}\cdot6{,}02\cdot10^{23}\cdot\frac{Z}{A}\approx0{,}40\cdot\frac{Z}{A}. \tag{31.5}$$

La vérification expérimentale de la formule de Thomson a montré que pour des éléments légers elle se confirme de façon satisfaisante. La quantité σ/ϱ obtenue expérimentalement ne dépend pas, en effet, de la longueur d'onde et est égale à 0,20. En portant cette valeur dans (31.5) on obtient

$$0{,}20=0{,}40\cdot\frac{Z}{A}$$

ou

$$\frac{Z}{A}=\frac{1}{2}, \tag{31.6}$$

c'est-à-dire que pour des éléments légers (excepté l'hydrogène) le numéro atomique doit être égal à la moitié du poids atomique. Cette relation est approximativement vérifiée pour des éléments du début du tableau périodique [He($Z=2$, $A=4$), Li($Z=3$, $A=7$), C($Z=6$, $A=12$), etc.]. Les causes physiques de la relation (31.6) sont liées à la nature des forces nucléaires. On reviendra par la suite aux §§ 123 et 124 à l'étude des propriétés essentielles et fort intéressantes de la diffusion du rayonnement X.

Exercice. En se servant de la formule (31.1) et de la valeur expérimentale de σ/ϱ calculer le nombre d'électrons contenu dans 1 atome-gramme.

A l'aide de ce nombre déterminer ensuite le nombre d'électrons dans 1 atome d'oxygène, d'azote et de carbone.

§ 32. Diffraction des rayons X par un réseau cristallin

Au § 31 on a vu qu'on pouvait réaliser avec des rayons X les mêmes phénomènes de diffraction qu'avec la lumière. Or le procédé le plus simple et le plus pratique d'obtenir la diffraction des rayons X est basé sur l'utilisation du cristal en qualité de réseau de diffraction. En effet, il est facile de réaliser la diffraction des rayons X sur les cristaux, car les distances interatomiques dans les cristaux sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde des rayons X (1 Å). Comme on le sait, c'est justement en faisant passer les rayons X à travers un cristal qu'on observa pour la première fois la diffraction des rayons X (Laue, 1912), ce qui démontra finalement l'identité de leur nature avec celle de la lumière.

Le cristal est un ensemble d'atomes, de groupes d'atomes ou d'ions régulièrement répartis dans l'espace (« réseau spatial », par exemple, celui de la figure 66 où est représenté un réseau cristallin élémentaire). Pour

trouver les conditions de diffraction sur ces structures régulières à trois dimensions on examinera successivement le réseau à une dimension (linéaire), à deux dimensions et à trois dimensions.

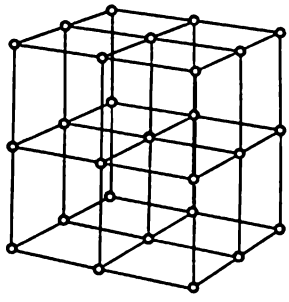


Fig. 66. Réseau cubique

Soit une série de centres de diffusion *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5* (atomes) disposés sur une même droite (fig. 67). Supposons que l'on fasse tomber sur ce réseau linéaire une onde plane sous un angle α_0. Chacun des centres de diffusion *0*, *1*, *2*, *3*, ... est une source d'une nouvelle onde sphérique et ces ondes sphériques cohérentes se propagent dans toutes les directions. Examinons une direction quelconque choisie arbitrairement caractérisée par l'angle α. Comme on le voit sur la figure 67, la différence de marche de deux rayons passant par chaque paire d'atomes voisins (*0*, *1*; *1*, *2*; ...) est égale à $a\ (\cos\alpha - \cos\alpha_0)$. Pour obtenir un maximum de diffraction dans la direction α il faut remplir la condition

$$a\ (\cos\alpha - \cos\alpha_0) = h\lambda, \tag{32.1}$$

où h est un nombre entier. De (32.1) il vient

$$\cos\alpha = \cos\alpha_0 + h\frac{\lambda}{a}. \tag{32.2}$$

Ceci montre que le réseau linéaire est à la manière d'un spectroscope, car à chaque longueur d'onde λ correspond une valeur déterminée de l'angle α. Pour $h=1$ on obtient ainsi le spectre du premier ordre, pour $h=2$, le spectre

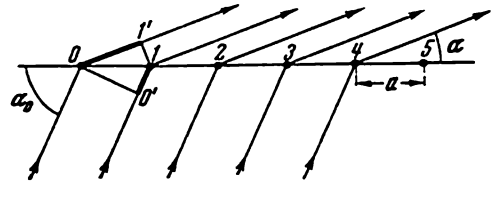


Fig. 67. Diffraction par un réseau linéaire

du second ordre, etc. Dans des directions symétriques pour $h=-1$, -2, etc., on obtient également des spectres du -1^{er}, -2^{e}, etc., ordre. Leur ensemble constitue ainsi une multiplicité linéaire.

Si maintenant on tient compte de ce que chaque centre de diffusion est une source d'onde *sphérique*, on voit que les directions correspondant au maximum d'interférence d'un ordre donné (par exemple du premier ordre) pour la longueur d'onde considérée formeront dans *l'espace* des génératrices d'un cône d'angle au sommet α. Par la lettre L on a désigné sur la figure

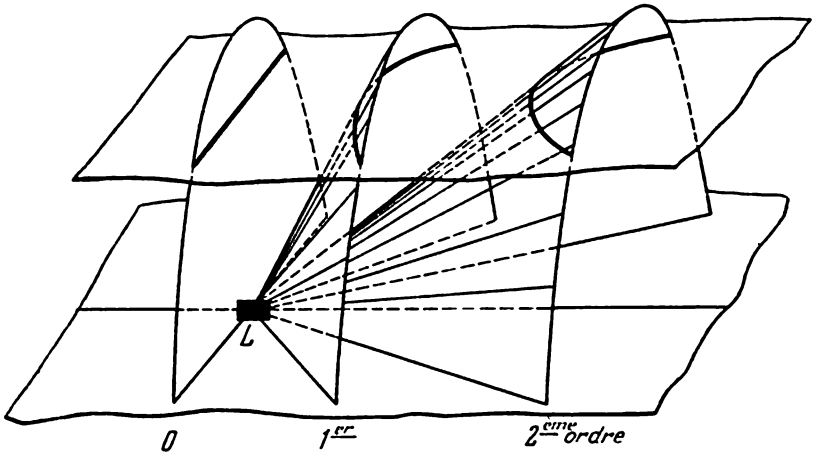


Fig. 68. Franges d'interférence d'un réseau linéaire

68 le réseau linéaire. Il est évident que si l'on place un écran fluorescent ou une plaque photographique à une certaine distance du réseau, les traces de ces cônes d'interférence donneront sur cet écran des hyperboles, lieux géométriques des maximums d'interférence de longueur d'onde déterminée.

Considérons maintenant un réseau plan ou à deux dimensions (fig. 69). Il est clair que ce réseau peut être envisagé comme une double multiplicité de réseaux linéaires disposés parallèlement aux axes x et y. Supposons maintenant que ce réseau est attaqué par une onde plane la normale à laquelle forme avec les axes x et y les angles α_0 et β_0. En assimilant comme auparavant chaque centre du réseau à une source d'onde sphérique on voit que les directions de maximums d'interférence se caractériseront par les angles α et β répondant à deux conditions :

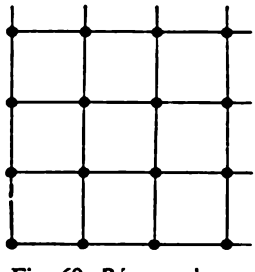


Fig. 69. Réseau plan

$$\left.\begin{aligned} a(\cos\alpha-\cos\alpha_0)&=h_1\lambda,\\ a(\cos\beta-\cos\beta_0)&=h_2\lambda,\end{aligned}\right\} \qquad (32.3)$$

où h_1 et h_2 sont des nombres entiers. La première de ces conditions est la condition du maximum d'interférence pour des réseaux linéaires parallèles à l'axe x, la seconde est la condition identique pour des réseaux parallèles à l'axe y. Si l'on dispose à une certaine distance du réseau plan un écran fluorescent, chacun des systèmes de réseaux linéaires dont on a formé le réseau plan donnera sur l'écran son système d'hyperboles et les deux conditions (32.3) seront évidemment remplies pour des points se trouvant

à l'intersection de ces hyperboles (fig. 70). En tirant de (32.3) $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ on trouve

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos\alpha_0+h_1\frac{\lambda}{a},\\ \cos\beta&=\cos\beta_0+h_2\frac{\lambda}{a}.\end{aligned}\right\} \tag{32.4}$$

Il en découle qu'à chaque longueur d'onde λ correspondent les valeurs déterminées de α et β, c'est-à-dire que le réseau plan décompose également le rayonnement en un spectre. Mais de plus, à la différence d'un réseau linéaire on obtient non pas une seule mais une *double* multiplicité de spectres. En effet, le spectre donné est caractérisé par un *couple* de nombres (h_1, h_2). On obtient ainsi, par exemple, des spectres d'ordres $(+1, +1)$, $(+1, +2)$, ... de même que d'ordres $(+1, -1)$, $(+1, -2)$, etc. C'est bien visible sur la figure 70.

Examinons enfin un réseau *spatial*. Il peut être envisagé comme composé de trois systèmes de réseaux linéaires parallèles aux axes x, y et z. Les maximums d'interférence apparaissent dans ce cas dans des directions caractérisées par les angles α, β, γ, qui doivent répondre simultanément à trois conditions :

$$\left.\begin{aligned}a(\cos\alpha-\cos\alpha_0)&=h_1\lambda,\\ a(\cos\beta-\cos\beta_0)&=h_2\lambda,\\ a(\cos\gamma-\cos\gamma_0)&=h_3\lambda.\end{aligned}\right\} \tag{32.5}$$

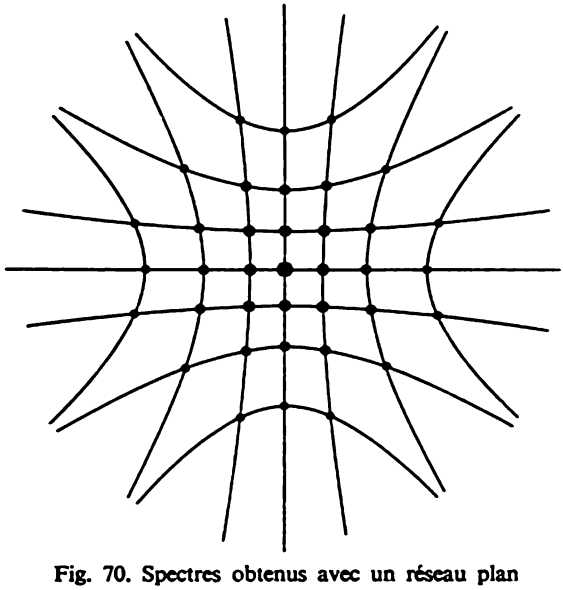


Fig. 70. Spectres obtenus avec un réseau plan

Déterminons d'après ces conditions les cosinus directeurs pour les maximums d'interférence

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos\alpha_0+h_1\frac{\lambda}{a},\\ \cos\beta&=\cos\beta_0+h_2\frac{\lambda}{a},\\ \cos\gamma&=\cos\gamma_0+h_3\frac{\lambda}{a}.\end{aligned}\right\}\tag{32.6}$$

Ici, comme on le voit, l'ordre d'interférence est déterminé par trois nombres (h_1, h_2, h_3). En même temps on découvre une autre particularité consistant en ce que les maximums d'interférence ne sont plus réalisables pour toutes longueurs d'ondes, mais seulement pour certaines bien déterminées. En effet, à côté des conditions (32.5) pour *toute* direction dans l'espace on doit encore automatiquement satisfaire aux conditions

$$\cos^2\alpha_0+\cos^2\beta_0+\cos^2\gamma_0=1,\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.\tag{32.7}$$

Pour cette raison (32.5) définit non seulement les cosinus directeurs du maximum d'interférence, mais également les *longueurs d'onde* pour lesquelles ces interférences ont lieu. En effet, en élevant au carré les égalités (32.6), en les additionnant et en tenant compte des formules (32.7), on trouve

$$1=1+\frac{\lambda^2}{a^2}(h_1^2+h_2^2+h_3^2)+2\frac{\lambda}{a}(h_1\cos\alpha_0+h_2\cos\beta_0+h_3\cos\gamma_0),$$

d'où

$$\lambda=-2a\frac{h_1\cos\alpha_0+h_2\cos\beta_0+h_3\cos\gamma_0}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}.\tag{32.8}$$

Cela signifie justement que pour la direction donnée de l'onde incidente plane (pour des α_0, β_0, γ_0 fixés) le maximum d'interférence d'un ordre donné (h_1, h_2, h_3) ne s'obtient que pour la longueur d'onde satisfaisant à l'égalité (32.8).

L'image géométrique utilisée pour l'analyse des réseaux linéaire et plan permet de comprendre aisément la cause de cette restriction. Supposons pour simplifier que la normale à l'onde incidente plane est dirigée suivant l'axe z et que l'écran est disposé normalement à l'axe z. Dans ce cas, les directions des maximums d'interférence du réseau linéaire parallèle à l'axe z sont les génératrices des cônes donnant sur l'écran un système de cercles*) (fig. 71), chaque cercle correspondant à une longueur d'onde déterminée λ et à un ordre d'interférence déterminé $h_3=\text{const}$. D'un autre côté, chacun des réseaux plans parallèles au plan xy donne pour la longueur d'onde considérée un ensemble de maximums d'interférence situés à l'intersection

*) Si la direction des mailles ne se confondait pas avec l'axe z ou si l'écran était placé sous un angle quelconque par rapport à cet axe, on obtiendrait au lieu de cercles des ellipses, mais le raisonnement reste en vigueur dans ce cas également.

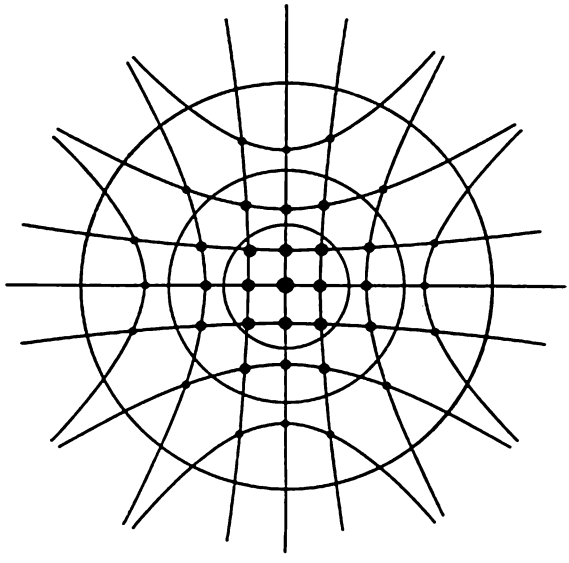


Fig. 71. Illustration géométrique de la condition d'interférences dans un réseau spatial

de deux systèmes d'hyperboles (voir fig. 70). Pour que pour $\lambda = \text{const}$ les trois conditions (32.6) soient remplies, il faut que les cercles de la figure 71 passent par les points d'intersection des hyperboles, ce qui est très peu probable au cas d'une seule longueur d'onde. Ainsi donc, en éclairant un réseau spatial par un rayonnement monochromatique ou par un rayonnement à spectre de raies la chance de l'apparition des interférences est minime. Au contraire, en illuminant le réseau par un rayonnement à spectre continu il se trouvera toujours une longueur d'onde satisfaisant à toutes les conditions d'interférence. Par suite, après la traversée du réseau spatial, l'onde possédant un spectre continu se divise en un système de rayons monochromatiques interférants donnant sur l'écran (plaque photographique) un ensemble de taches d'interférence se disposant symétriquement et, si une vision directe en serait possible, on les verrait colorées en de teintes différentes.

Notons en conclusion que les raisonnements précédents conviennent pour toute longueur d'onde et pour tout réseau aux distances réticulaires quelconques soumis à des restrictions suivantes : la longueur d'onde λ doit être inférieure au pas du réseau a, car pour $\lambda > a$ on a $h\frac{\lambda}{a} > 1$ et les conditions (32.2), (32.7) et (32.6) ne peuvent être satisfaites pour aucune longueur d'onde (le cosinus ne peut pas être plus grand que 1 !). D'un autre côté, si $\lambda \ll a$, les conditions d'interférence seront satisfaites, mais les angles α, β, γ deviennent trop faibles et l'observation des interférences se trouve gênée. C'est justement pourquoi l'interférence des rayons X dans un *cristal* est une coïncidence particulièrement remarquable, car la longueur d'onde

des rayons X est de l'ordre de grandeur des distances interatomiques dans le cristal.

Pour obtenir le réseau spatial de pas a convenant à la diffraction de la lumière visible on utilise les ondes ultra-sonores. Les ondes ultra-sonores dans des liquides et des corps solides peuvent être obtenues avec des longueurs d'ondes de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-5} cm proches des longueurs d'ondes du spectre visible ($7 \cdot 10^{-5}$ à $4 \cdot 10^{-5}$ cm). C'est pourquoi en produisant des ondes stationnaires planes ultra-sonores dans un liquide ou un corps solide on crée un système de compression et de détente qui constitue un excellent

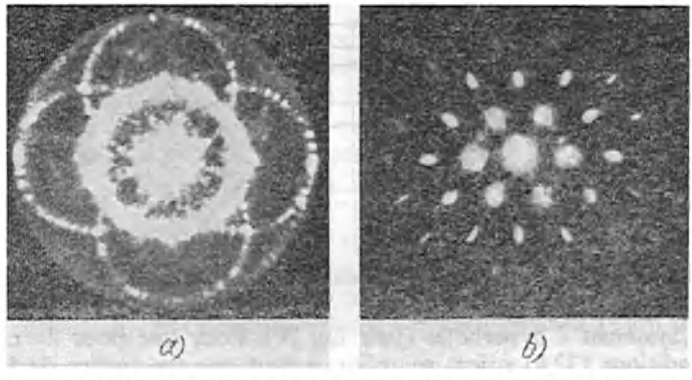


Fig. 72. Diffraction de la lumière par un réseau spatial formé dans le xylène par trois ondes ultra-sonores dirigées sous un angle de 90° (*a*) et de 120° (*b*)

réseau de diffraction pour la lumière. Il est naturel de s'attendre à ce que trois ondes ultra-sonores dirigées suivant des directions perpendiculaires ou faisant entre elles des angles quelconques produiront un réseau spatial de pas convenable pour la diffraction de la lumière visible. Cette hypothèse se réalise en effet. La figure 72 donne deux photographies obtenues par le passage de la lumière à travers un liquide (xylène) dans lequel furent excitées trois ondes ultra-sonores de même période. Les taches de diffraction s'y observent avec netteté. En comparant avec la figure 74 (voir plus bas) représentant le diagramme de diffraction de Laue obtenu en faisant passer des rayons X à travers un cristal de quartz on voit que la diffraction de la lumière par un réseau spatial artificiel d'un cristal (a est de l'ordre de 10^{-8} cm, c'est-à-dire de l'ordre de la longueur d'onde des rayons X) aboutit à des figures absolument analogues.

§ 33. Réalisation expérimentale de la diffraction des rayons X

Au paragraphe précédent on a analysé la diffraction des rayons X par la méthode de Laue. L'appareillage expérimental servant à l'observation de la diffraction par cette méthode est très rudimentaire. Un pinceau de rayons X sortant d'un orifice circulaire percé dans un épais écran en plomb B

(fig. 73) traverse le cristal *K*. Les faisceaux diffractés obtenus ainsi sont fixés sous forme de taches sur une pellicule photographique *P* placée perpendiculairement au pinceau de rayons. Des exemples de photographies obtenues par cette méthode sont donnés à la figure 74 représentant la diffraction par un cristal de quartz. Comme on Ta noté au paragraphe précédent, pour obtenir le diagramme de Lauc il faut sc servir d'un rayonnement X de freinage possédant un spectre continu.

Fig. 73. Schéma de la diffraction des rayons X suivant la méthode de Laue

W. H. Bragg et W. L. Bragg (père et fils) et indépendamment d'eux le physicien cristallographie russe Y. Wulff ont conçu une autre méthode d'étude et de calcul de la diffraction des rayons X. Sommairement parlant cette méthode consiste à envisager chaque tache du diagramme de Laue comme le résultat de *Yinterférence en réflexion* des rayons X. Prenons le cas le plus simple du réseau cristallin cubique représenté à la figure 76.

Dirigeons les axes de coordonnées jc, v, *z* le long des arctes du cube: alors la disposition des atomes dans le plan *xy* sera celle de la figure 75. Tout plan coupant le cristal perpendiculairement à *xy* laissera sur ce dernier

Fig. 74. Diffraction des rayons X dans un cristal de quartz

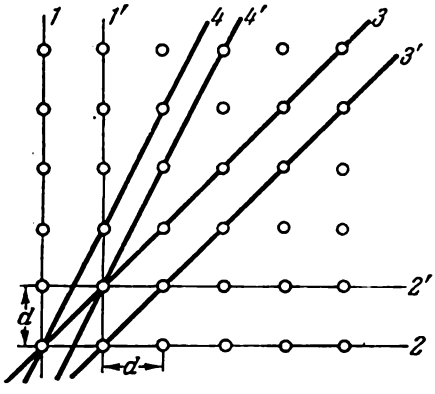


Fig. 75. Plans réticulaires

une trace sous forme d'une droite (par exemple *1* ou *1'*, *2* ou *2'*). Il devient évident qu'on peut diviser tout le cristal en une série de plans *1*, *1'*, ... ou *2*, *2'*, ..., parallèles à ses faces naturelles. Ces plans seront uniformément couverts d'atomes et se disposeront à la même distance *d* l'un de l'autre égale à l'arête de la maille cubique élémentaire. Or, le même dessin montre qu'une division analogue peut être réalisée par de multiples procédés. Tels sont, par exemple, les plans *3*, *3'*, ...; *4*, *4'* ...; ils ne diffèrent des plans *1*, *1'*, ... et *2*, *2'*, ... que par la densité de la concentration des atomes et par la distance des plans réticulaires.

Examinons maintenant l'un des systèmes de ces plans, par exemple, les plans parallèles à la face naturelle (c'est-à-dire *1*, *1'*, ... ou *2*, *2'*, ...). Supposons que ces plans sont attaqués par un faisceau de rayons monochromatiques parallèles de longueur d'onde λ. En prenant les atomes pour des centres de nouvelles ondes élémentaires cohérentes on obtient pour chaque plan une réflexion d'ordre zéro sous un angle égal à l'angle d'incidence. Or cette réflexion, quelle que soit la longueur d'onde, se réalisera de la même façon sur un seul plan, car les longueurs des trajets de tous les rayons sont égales entre elles et, par suite, la différence de marche est toujours nulle. Passons maintenant au cas où la réflexion s'effectue non pas par un seul plan, mais par un système de plans équidistants. Alors la situation se complique par les interférences des rayons cohérents réfléchis par des plans *différents* et on aura une réflexion non pas pour toute longueur d'onde, mais seulement pour certaines d'entre elles bien déterminées. En effet, les rayons *1* et *2* (fig. 76) réfléchis par les plans *I* et *II* possèdent une différence

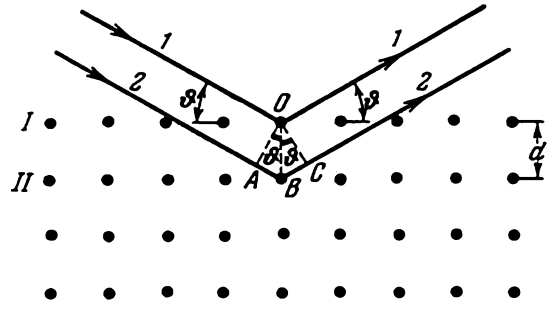


Fig. 76. Déduction de l'équation de Wulff-Bragg

de marche égale, comme il est facile de voir d'après le dessin, à $2d \sin \vartheta$, où ϑ est l'angle de glissement, c'est-à-dire le complément de l'angle d'incidence. C'est pourquoi la réflexion ne se produira que pour les ondes dont la différence de marche est égale à un nombre entier de longueurs d'onde. Ainsi donc, pour l'interférence en réflexion des rayons X, il faut que se réalise la condition

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{33.1}$$

C'est justement la *formule de Wulff-Bragg* se trouvant à la base de toute la spectroscopie par rayons X.

En fait, la réflexion s'effectue sur de nombreux plans, c'est-à-dire qu'il y a interférences non pas entre deux pinceaux, mais entre un grand nombre de pinceaux. Toutefois, ces réflexions multiples n'influent pas sur les conditions du maximum d'interférence et, exactement comme en optique*), se manifestent uniquement dans l'apparition de raies étroites au lieu de larges franges d'interférence, autrement dit facilitent l'utilisation de la méthode dans la spectroscopie par rayons X. Quant à la condition (33.1), elle reste sans changement en ce qui concerne la réflexion.

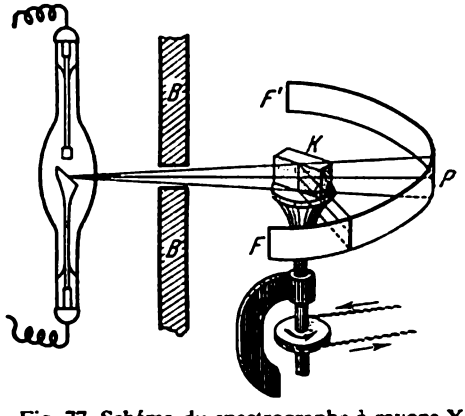


Fig. 77. Schéma du spectrographe à rayons X

On a examiné jusqu'à présent la réflexion par un système de plans parallèles à la face naturelle du cristal. Rien n'empêche toutefois d'étudier avec les mêmes résultats les réflexions par d'autres systèmes de plans tels que *3*, *3'*, ...; *4*, *4'*, ..., etc. On peut montrer de façon absolument rigoureuse**) que chaque tache du radiogramme de Laue est le résultat d'interférence en réflexion sur un système déterminé de plans réticulaires. Ainsi donc, la méthode de Wulff-Bragg est un procédé d'étude équivalent à la méthode de Laue. Cependant, la méthode de Wulff-Bragg possède une importance par elle-même, car, comme on l'a déjà noté, elle constitue la base de la spectroscopie par rayons X, de même qu'une méthode des plus fructueuses de l'analyse cristallochimique.

Un schéma élémentaire du spectrographe à rayons X est représenté à la figure 77. Un pinceau de rayons X parallèles attaque le cristal *K* placé sur un plateau tournant; *FPF'* est la pellicule photographique. Au lieu d'une

*) Voir, par exemple, la théorie de l'interféromètre de Fabry et Pérot ou de la lame de Lummer dans le livre de G. Landsberg, *Optique*, Moscou, 1957 (en russe).

**) La démonstration est donnée dans les cours d'analyse aux rayons X (voir, par exemple, G. Boïki, M. Poray-Kochits, *Analyse aux rayons X*, Moscou, 1964 (en russe).

pellicule photographique on utilise quelquefois une chambre d'ionisation pouvant tourner en même temps que le cristal d'un angle double (expliquez pourquoi!). L'intensité du courant d'ionisation produit dans la chambre sous l'effet des rayons X sert de mesure d'intensité de ces rayons. Si le rayonnement possède un spectre de raies et est composé de plusieurs longueurs d'onde λ_1, λ_2, ..., chaque longueur d'onde se réfléchira sous son propre angle ϑ déterminé par la formule de Wulff-Bragg. Par suite, la courbe d'intensité des rayons X en fonction de l'angle de révolution du cristal aura une série de maximums qui se répéteront pour des réflexions d'ordres différents. Sur la figure 78 on a donné un exemple de cette courbe obtenue par réflexion sur le cristal de NaCl d'un rayonnement du tube à rayons X muni d'une anticathode en platine. Trois maximums bien nets de cette

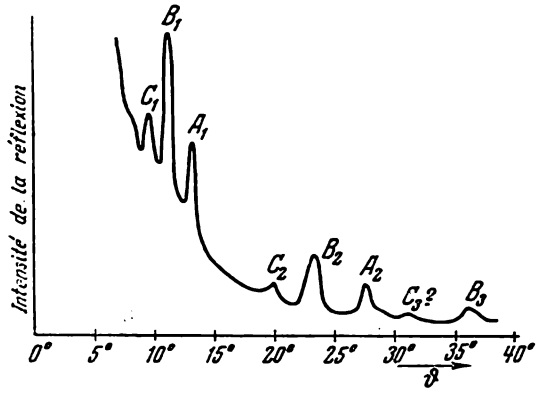


Fig. 78. Courbe de réflexion des rayons X par un cristal de NaCl

courbe A_1, B_1, C_1, se répétant successivement dans trois ordres de réflexion, correspondent à trois raies spectrales du platine K_α, K_β et K_γ. Le fait que l'intensité de réflexion n'est pas nulle en dehors des raies, mais augmente systématiquement avec la diminution de l'angle de réflexion s'explique de façon simple : en bombardant une anticathode en platine par des électrons on produit à côté du rayonnement caractéristique un rayonnement de freinage qui possède un spectre continu. C'est pourquoi les raies spectrales du platine se superposent à un fond continu. Des exemples de photographies de spectres de rayons X sont donnés plus bas sur les figures 84 et 85.

A côté des deux méthodes analysées de production de rayons X diffractés il existe une troisième méthode, dite méthode des poudres, qui a reçu de larges applications dans le sondage de la structure de corps solides par des rayons X. Dans cette méthode proposée par Debye et Scherrer, au lieu de grands monocristaux qui se sont avérés nécessaires lors de l'utilisation des méthodes de Laue et de Wulff-Bragg on recourt à une poudre de cristaux broyés, puis compressée en bâtonnet cylindrique (K sur la fig. 79). Si on fait passer à travers un tel bâtonnet un rayonnement X monochromatique, alors,

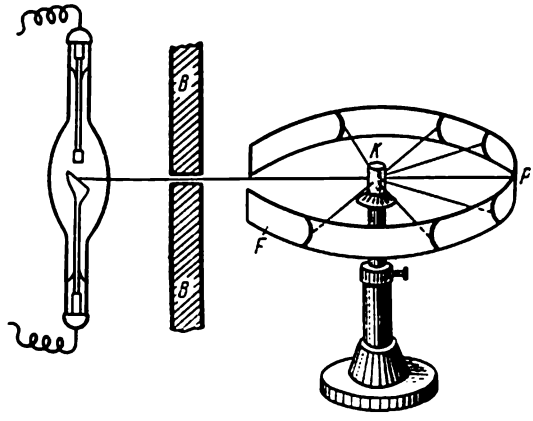


Fig. 79. Schéma de la diffraction des rayons X par la méthode des poudres

par suite d'un complet désordre dans l'orientation des microcristaux de la poudre, il se trouvera toujours dans le bâtonnet des petits cristaux disposés par rapport aux rayons sous un angle répondant à la condition de Wulff-Bragg pour la longueur d'onde considérée. Dans ce cas, les rayons réfléchis suivent la surface d'un cône d'angle au sommet égal à 2ϑ (fig. 80). Si l'on enroule autour du bâtonnet une pellicule photographique, comme c'est montré à la figure 79, ces cônes laisseront sur la pellicule des traces en forme de lignes courbes dont chacune correspond à une longueur d'onde et à un ordre de réflexion déterminés. Un exemple de telle photographie obtenue par la méthode des poudres est donné à la figure 81.

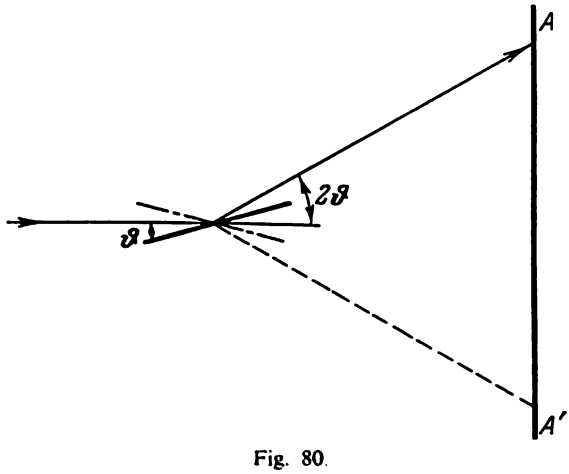


Fig. 80.

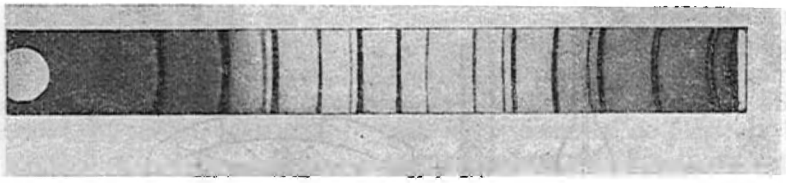


Fig. 81. Diffraction des rayons X par une poudre de NaCl

Le grand avantage de la méthode des poudres consiste dans le fait qu'elle n'exige pas de grands cristaux de qualité parfaite. Seules de rares substances se rencontrent dans la nature sous forme de tels cristaux, quant à la culture des cristaux elle ne réussit pas toujours.

Exercice. La réflexion du premier ordre de la raie spectrale du cuivre de longueur d'onde 1,542 Å (raie K_α du cuivre) par la face naturelle du cristal du sel gemme est obtenue pour un angle de glissement de 15° 15′. Déterminer la valeur de d pour NaCl.

§ 34. Détermination de la longueur d'onde des raies spectrales de rayons X

L'équation de Wulff-Bragg (33.1) permet de déterminer la longueur d'onde des rayons X pour un angle de réflexion ϑ si l'on connaît la grandeur d qui est la distance entre des plans réticulaires voisins d'un cristal. Cette grandeur peut être calculée indépendamment de la façon suivante. Soit un cristal du système régulier, c'est-à-dire pour lequel la maille élémentaire a la forme d'un cube. Un exemple de ce cristal nous est donné par le sel gemme (NaCl). Une molécule-gramme de NaCl a pour masse $M=58{,}454$ g et elle comprend un nombre de molécules de NaCl égal au nombre d'Avogadro N; le nombre d'ions Na^+ et Cl^- y sera donc égal à $2N$.

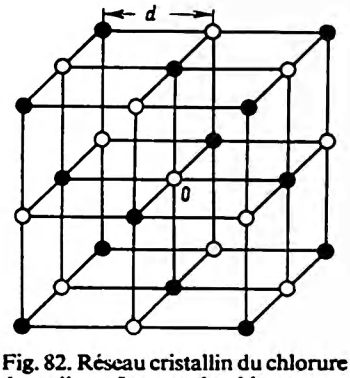


Fig. 82. Réseau cristallin du chlorure de sodium. Les cercles blancs sont ceux des ions chlore (Cl^-); les cercles noirs, ceux des ions sodium (Na^+)

Considérons une maille élémentaire du cristal de NaCl. L'étude de la structure de ce cristal a montré qu'aux sommets du cube élémentaire se disposent non pas des molécules de NaCl, mais des ions Na^+ et Cl^- (fig. 82). Ainsi donc, aux huits sommets de la maille cubique se disposent huit ions, mais comme chaque sommet est commun aux huit mailles voisines (ce qui se voit très bien sur la figure 82 pour l'ion central O), il en résulte qu'à chaque maille correspond un ion. Si la longueur de l'arête de la maille est égale à d, son volume sera d^3 et le volume total d'une molécule-gramme contenant $2N$ ions sera

$2N d^3$. D'autre part, le même volume est égal au rapport de la masse M à la densité de cristal ϱ et on obtient $2N d^3 = \frac{M}{\varrho}$ ou

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{N\varrho}}. \tag{34.1}$$

Cette formule montre que la détermination exacte de d et, par suite, de λ dépend essentiellement du bien-fondé de la valeur du nombre d'Avogadro. Cette question est d'une grande importance pour la physique atomique et on y reviendra encore au § 38. Pour l'instant notons que si l'on prend pour d_{NaCl} sa valeur standard

$$d = 2{,}814\,00 \text{ Å},$$

la longueur d'onde de la raie $K_{\alpha 1}$ du cuivre sera

$$\lambda = (1{,}537302 \pm 0{,}000031) \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Comme on le voit, la précision est si grande que 1 Å ($= 10^{-8}$ cm) apparaît comme une unité très incommode, car le nombre de chiffres décimaux de valeur certaine est trop grand*). C'est pourquoi dans la spectroscopie des rayons X on utilise la plupart du temps une autre unité appelée unité X :

$$1 \text{ XU} = 10^{-3} \text{ Å} = 10^{-11} \text{ cm}. \tag{34.2}$$

Dans ces unités la longueur d'onde donnée plus haut s'écrira

$$\lambda = (1537{,}302 \pm 0{,}031) \text{ XU}.$$

§ 35. Spectres de rayons X

Sur la figure 83 on a donné un schéma des spectres de rayons X des éléments allant de l'oxygène à l'uranium. Un bref regard sur le dessin révèle déjà une particularité remarquable des spectres de rayons X, à savoir leurs simplicité et uniformité. A la différence des spectres optiques qui sont en général très compliqués et comprennent quelquefois des centaines et même des milliers de raies (tel est le spectre du fer) les spectres de rayons X se caractérisent par un nombre limité de raies. En passant d'un élément à l'autre les spectres optiques se modifient fortement et révèlent une périodicité de structure parallèle à la périodicité des autres propriétés des éléments: au contraire, les spectres de rayons X sont structurés de façon absolument identique et ne présentent pas de périodicité; le seul changement qu'on y observe en passant des éléments légers aux éléments lourds est un déplacement monotone des raies vers les ondes courtes. Enfin, comme il a été montré au § 29, les spectres de rayons X sont une caractéristique purement

*) Il faut, toutefois, noter que ce nombre est entaché d'une erreur systématique dont on parlera au § 37. La longueur d'onde de la raie K_α du cuivre n'est donnée ici que dans le but d'indiquer le nombre de chiffres avec lequel peut être donnée la longueur d'onde en spectroscopie par rayons X.

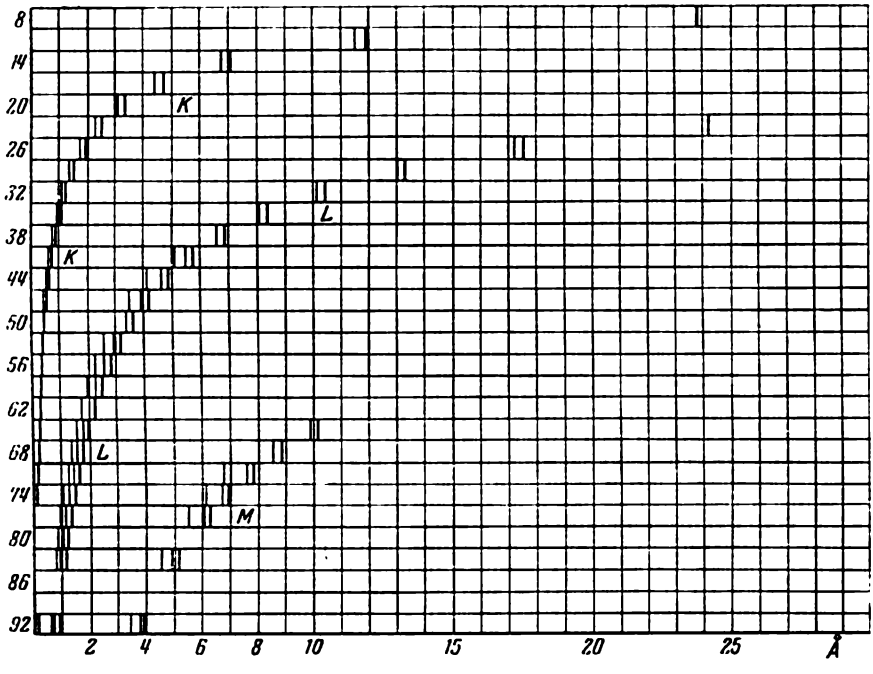


Fig. 83. Schéma des spectres X pour quelques éléments. (On a porté en ordonnées les numéros atomiques des éléments.)

atomique et en première approximation ne varient pas quand l'atome entre dans une combinaison quelconque.

Comme on le verra plus loin, cette différence marquée dans la nature des spectres optiques et des rayons X s'explique par le fait que les deux spectres sont formés par des parties différentes de l'atome : les spectres optiques sont fonction des mouvements d'électrons périphériques, tandis que les spectres de rayons X se forment dans les parties intérieures de l'atome.

La figure 83 montre également que les raies des spectres de rayons X forment plusieurs groupes ou séries. La série des plus courtes longueurs d'ondes est appelée série K, la suivante, en se dirigeant vers les plus grandes ondes, est la série L, puis suivent les séries M et N qui d'ailleurs ne s'observent que pour des éléments lourds. Il apparaît en réalité que toutes ces séries possèdent un prolongement naturel dans la partie optique du spectre, toutefois, les raies correspondantes ne sont excitées que dans des conditions particulières. De toutes les séries des spectres de rayons X, la structure la plus simple s'observe dans la série K. Elle comprend trois raies qu'on désigne conventionnellement par K_α, K_β et K_γ. La raie K_α est celle de la longueur d'onde la plus grande et en même temps elle est la plus brillante. C'est un

doublet se distinguant particulièrement bien et présentant deux composantes α_1 et α_2. La raie K_β est la raie de la longueur d'onde suivante; sa brillance est également de second ordre. C'est aussi un doublet mais aux raies très serrées qu'on ne distingue pas toujours. La raie K_γ est celle de la plus courte longueur d'onde.

Un exemple typique de la série K peut être fourni par le spectre du rhodium, représenté à la figure 63. On y voit que cette série comprend trois raies K_α, K_β, K_γ. Comme on l'a déjà dit, la raie K_α constitue un doublet, c'est-à-dire qu'elle est composée de deux raies très voisines et régulièrement liées l'une à l'autre. Toutefois, sur la figure 63 cette « fine structure » des raies n'est pas discernable par suite du faible pouvoir de résolution de l'appareil. Sur la figure 84 on a donné plusieurs photographies de la série K pour divers éléments. Sur la figure 85 on a donné, à titre d'exemple, la photographie de la série L du tungstène. On voit que cette série est beaucoup plus structurée que la série K mais elle ne comprend toujours qu'un nombre restreint de raies.

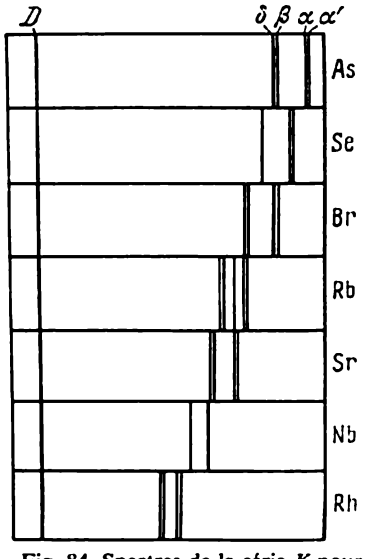


Fig. 84. Spectres de la série K pour quelques éléments

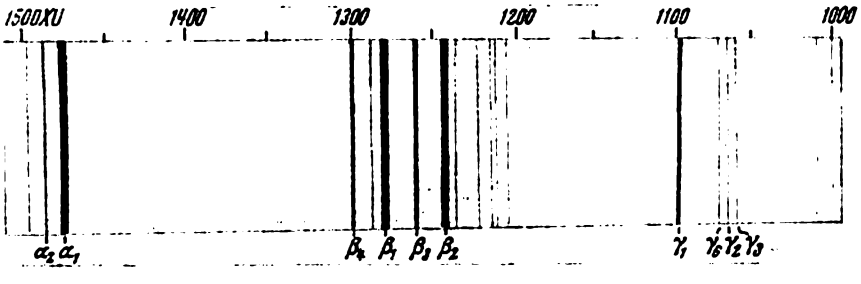


Fig. 85. Photographie du spectre de la série L du tungstène

§ 36. Loi de Moseley

En étudiant les spectres de rayons X des éléments, Moseley (1913-1914) a établi une loi très simple liant la fréquence des raies spectrales au numéro atomique de l'élément qui les émet.

Cette loi vient aussitôt à l'esprit quand on regarde la figure 83. Les spectres y sont disposés suivant l'échelle des longueurs d'onde portées sur

l'axe horizontal, tandis que sur l'axe vertical sont portés les numéros atomiques. Comme tous les spectres sont absolument du même type, on peut suivre les déplacements d'une raie quelconque (par exemple, de l'une des raies de la série K) à mesure que s'accroît le numéro atomique. Il est alors facile de constater que la courbe de variation de la longueur d'onde en fonction du numéro atomique est une parabole. La relation se simplifie si au lieu de la longueur d'onde on considère la fréquence c/λ ou simplement l'inverse de la longueur d'onde $1/\lambda$. Il apparaît alors que la racine carrée de l'inverse de la longueur d'onde $\sqrt{1/\lambda}$ est liée au numéro atomique par une relation linéaire. Cette loi devient particulièrement intéressante et prend une importance de principe quand on introduit la constante universelle figurant dans toutes les lois spectrales, dite constante de Rydberg R, égale à 109 737,42 cm^{-1} (voir ch. VIII). Moseley montra que pour la raie K_α, par exemple, le nombre Q_{K_α} construit de la façon suivante :

$$Q_{K_\alpha}=\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{3/4R}}, \tag{36.1}$$

où $\nu_{K_\alpha}=\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}}$ est inférieur d'une unité au numéro atomique

$$Q_{K_\alpha}=Z-1. \tag{36.2}$$

Ceci se voit sur le tableau IX.

Tableau IX

Elément	$\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{3/4\,R}}$	Z	Elément	$\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{3/4\,R}}$	Z
Ca	19,00	20	Fe	24,99	26
Ti	20,99	22	Co	26,00	27
V	21,96	23	Ni	27,04	28
Cr	22,98	24	Cu	28,01	29
Mn	23,99	25	Zn	29,01	30

De (36.1) et (36.2) on obtient $\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{3/4R}}=Z-1$, ce qui peut être écrit sous la forme

$$\nu_{K_\alpha}=R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right). \tag{36.3}$$

Des relations analogues apparaissent pour des raies d'autres séries du spectre de rayons X. Par exemple, pour la série L la relation de Moseley a la forme

$$\nu_L=R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right), \tag{36.4}$$

où σ est un certain nombre constant.

Rien que la forme symétrique des formules (36.3) et (36.4) montre qu'on a affaire à une régularité de principe. On verra par la suite que ces formules sont des cas particuliers des formules plus générales s'appliquant aux séries spectrales dont l'interprétation théorique est évidente. Il est important de noter ici que la loi de Moseley établit pour toutes les séries du spectre de rayons X une liaison linéaire entre la racine carrée de l'inverse de la longueur d'onde des raies spectrales et le numéro atomique (fig. 86). Cette relation autorise, d'après la longueur d'onde mesurée, d'établir exactement le numéro atomique de l'élément considéré et, par suite, la charge de son noyau.

L'importance de cette loi apparaît primordiale si l'on se rappelle que la place des éléments dans le tableau périodique, s'appuyant sur les poids atomiques et les propriétés chimiques des éléments, n'a pas toujours été établie de façon concluante. En différents endroits du tableau périodique il existait des cases vides correspondant à des éléments inconnus; de même l'espace allant de $Z=58$ à $Z=71$ (au temps de Moseley on considérait qu'il allait jusqu'à $Z=72$) est occupé par des éléments de terres rares dont les propriétés chimiques se différencient très peu et les poids atomiques sont souvent si incertains que l'ordre de leur disposition soulevait de grandes incertitudes. La loi de Moseley a permis de lever toutes ces difficultés. Elle montra de façon nette qu'entre l'hydrogène et l'uranium on doit trouver

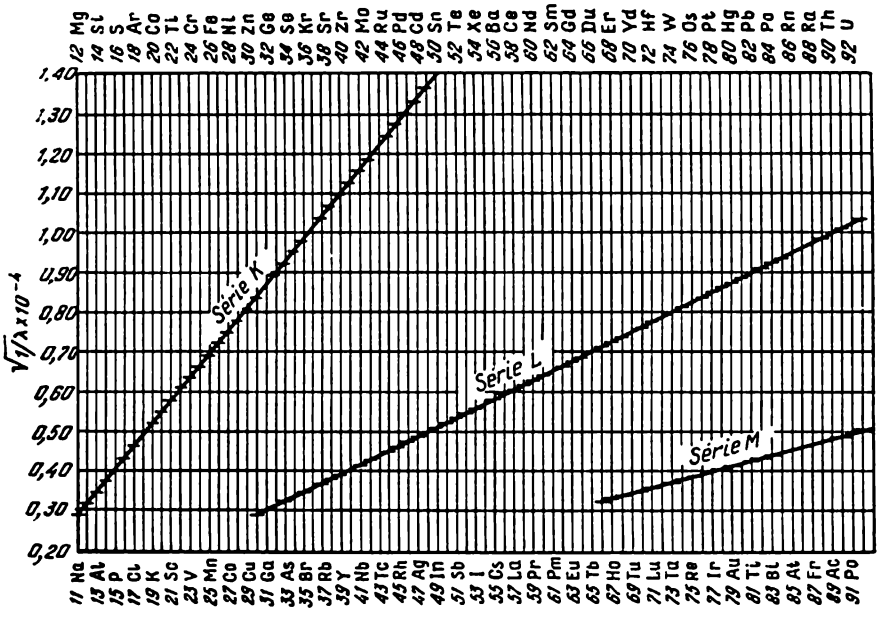


Fig. 86. Le diagramme de Moseley

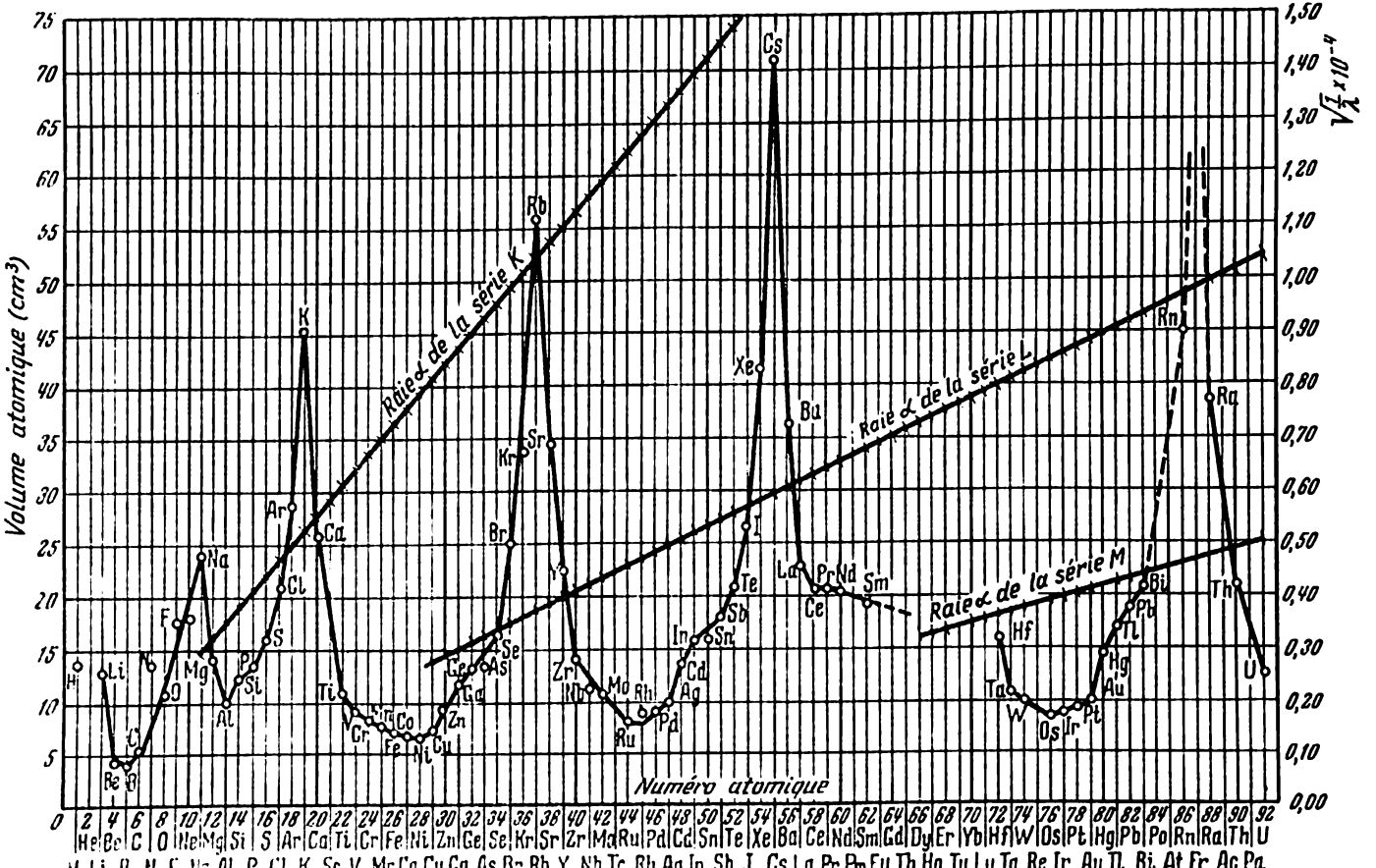


Fig. 87. Confrontation du diagramme de Moseley avec la courbe des volumes atomiques

exactement 92 types d'atomes aux différents numéros atomiques et fixa ainsi le nombre exact d'éléments encore non découverts. De plus, il leva toutes les hésitations sur la régularité de classification des éléments disposés par Mendeleïev dans l'ordre contredisant la valeur de leurs poids atomiques (Co — Ni, Ar — K, Te — I). D'autre part, cette loi montra, pour la première fois, que ce n'est pas le poids atomique mais le numéro atomique qui est égal à la charge du noyau, qui détermine la spécificité chimique de l'atome. Cette conclusion a reçu une remarquable confirmation dans la découverte des isotopes.

Remarquons enfin que cette loi exprime une singularité importante des rayons X : le spectre de rayons X se modifie de façon *monotone* avec la variation du numéro atomique Z. Ceci peut être confronté avec le fait que de nombreuses propriétés de l'atome comme la valence chimique, le volume spécifique et beaucoup d'autres propriétés énumérées au § 12 varient de *façon périodique* avec l'accroissement de Z.

A la figure 87 où sur un même graphique on a tracé les droites exprimant la loi de Moseley et la courbe des volumes atomiques présentant des maximums et des minimums nettement marqués cette singularité des rayons X est bien soulignée.

L'explicitation de cette différence réside dans le fait que les spectres de rayons X, comme on le verra dans le second tome, se forment dans les parties intérieures de l'atome, ce qui montre que ces régions internes voisines du noyau de l'atome possèdent une structure qui reste la *même* quel que soit l'atome, tandis que dans les parties périphériques, extérieures de l'atome la structure se répète périodiquement.

§ 37. Détermination de la longueur d'onde absolue des rayons X

L'indice de réfraction des rayons X diffère très peu de l'unité. On a même pensé pendant longtemps que les rayons X ne subissaient pas de réfraction. Toutefois, on a remarqué que pour des rayons X de grandes longueurs d'onde (2 à 3 Å) on peut observer systématiquement des dérogations à la formule de Wulff-Bragg, qui furent interprétées comme dues à des réfractions des rayons X dans le cristal (lors de l'établissement de la formule de Wulff-Bragg on supposa l'indice de réfraction égal à l'unité!). La nature de ces dérogations montra que l'indice de réfraction des rayons X passant de l'air dans le cristal était *inférieur* à 1. Il en découlait que les rayons X passant de l'air dans un corps solide pouvaient subir une *réflexion totale* absolument analogue à celle de la lumière qui lors de son passage du verre dans l'air sous des angles d'incidence supérieurs à la valeur critique subit une réflexion totale dite encore intérieure. A. Compton montra en 1923 que la réflexion totale des rayons X passant de l'air dans un corps solide s'observait effectivement et en déterminant l'angle critique arriva à mesurer l'indice de réfraction. Pour une longueur d'onde de 1,279 Å l'angle critique, dans le cas du crown-glass de densité 2,52, fut égal à 11′, ce qui correspond à un indice de réfraction inférieur à 1 de $5 \cdot 10^{-6}$ (c'est-à-dire $\mu = 0{,}999\,995$).

Cette découverte a montré qu'il est possible d'obtenir le spectre de rayons X avec un réseau de diffraction ordinaire à condition de s'en servir à la façon d'un réseau par réflexion et pour des angles d'incidence supérieurs à la valeur critique, autrement dit pour des angles de glissement très petits. Comme l'angle maximal de la réflexion totale pour des longueurs d'ondes différentes et des substances différentes varie dans les limites allant de 10′ à 3°, le réseau de diffraction convenant aux rayons X doit être plus grossier que le réseau utilisé habituellement en optique. Ceci peut paraître à première vue paradoxale, or il faut tenir compte du fait que pour des faibles angles de glissement ϑ un réseau de pas d agit comme un réseau de pas $d \sin \vartheta$ pour des rayons d'incidence normale*). Comme sin 10′ est égal

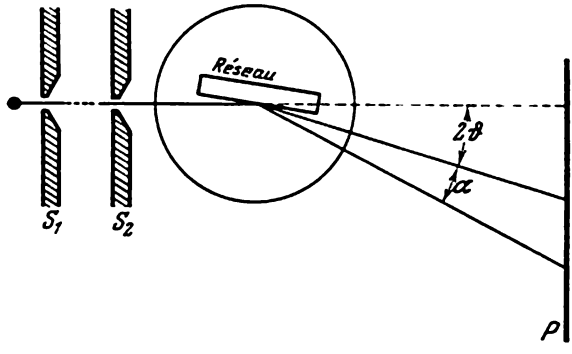


Fig. 88. Représentation schématique de l'expérience d'obtention de spectres de rayons X sur un réseau de diffraction. (La largeur des fentes S_1 et S_2 est de 0,01 mm, la distance entre les fentes de 42 cm)

à $3 \cdot 19^{-3}$, le pas efficace, même pour un réseau très grossier et des angles de glissement de ce type, devient si petit qu'il autorise l'observation de la diffraction des rayons X. Ainsi, par exemple, avec un tel angle le réseau à 50 traits par mm est équivalent à un réseau à 17 000 traits par mm, or les meilleurs réseaux actuellement fabriqués possèdent 1200 traits par mm!

Sur la figure 88 on a représenté le schéma de l'expérience permettant d'obtenir un spectre de diffraction au moyen d'un réseau optique et sur la figure 89 on a donné des photographies des spectres de série K du cuivre (longueurs d'onde de 1,392 Å et 1,542 Å) et du chrome (longueurs d'onde de 2,084 Å et 2,291 Å) obtenus avec des réseaux dont le nombre de traits est indiqué dans l'explication sous la figure (le nombre maximal de traits est de 287 par mm). Les chiffres 1, 2, 3, ... désignent l'ordre du spectre.

*) Voir, par exemple, G. Landsberg, *Optique*, Moscou, 1957 (en russe).

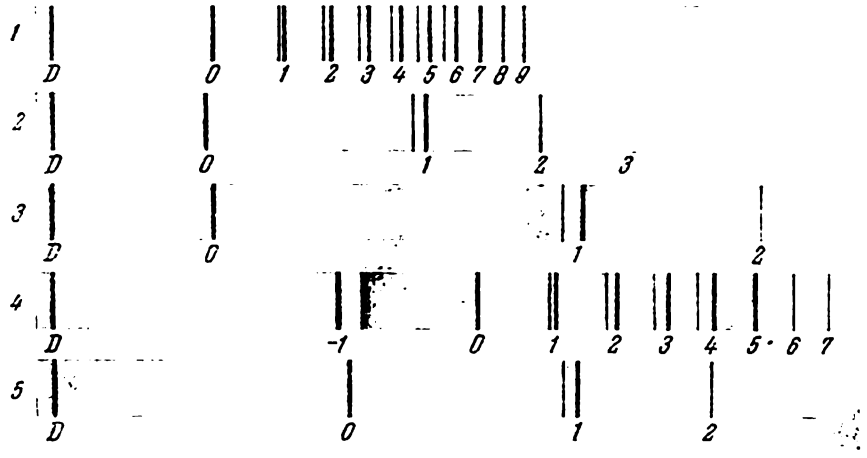


Fig. 89. Spectres de rayons X typiques obtenus avec un réseau de diffraction (grossissement : à peu près de 2 fois) : *D* — rayon droit; *0* — ordre zéro (rayon subissant une réflexion totale). Les photographies 1—4 — spectres de rayons X de la série *K* du cuivre obtenus avec des réseaux à 50; 287; 60 et 143 traits par mm. Photographie 5 — série *K* du chrome; réseau à 387 traits par mm

Pour déterminer d'après ces spectres les longueurs d'onde on utilise l'équation du réseau de diffraction pour une incidence oblique des rayons*)

$$d(\sin i - \sin r) = n\lambda,$$

où i est l'angle d'incidence et r l'angle de diffraction. En remplaçant les angles i et r par les angles de glissement ϑ et α montrés sur la figure 88 on obtient l'équation du réseau sous la forme utilisable dans la spectroscopie des rayons X :

$$d[\cos\vartheta - \cos(\vartheta+\alpha)] = n\lambda, \tag{37.1}$$

ou

$$2d \sin\frac{2\vartheta+\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} = n\lambda. \tag{37.1'}$$

Cette équation permet d'effectuer la détermination de la longueur d'onde absolue des rayons X, c'est-à-dire de la déterminer indépendamment de la connaissance des diverses constantes obtenues de façon indirecte (cf. § 34). En effet, la constante du réseau de diffraction d peut être soit mesurée directement au moyen d'un comparateur, soit déterminée par des méthodes habituelles de l'optique, c'est-à-dire au moyen de l'étalonnage du réseau en se référant à un standard spectroscopique, quant aux angles ϑ et α ils sont mesurés directement avec une grande précision. Dans la pratique pour

*) G. Landsberg, *Optique*, Moscou, 1957 (en russe).

la détermination de d on se basait sur la raie verte du spectre des vapeurs de cuivre $\lambda = 5153{,}25$ Å. L'approximation de ces mesures des longueurs d'onde absolues des rayons X était estimée à 0,002-0,004 %.

Au grand étonnement des chercheurs il apparut que pour les mêmes raies spectrales les longueurs d'onde mesurées à l'aide des cristaux différaient en moyenne des longueurs d'onde mesurées de façon absolue, et ceci toujours dans le même sens, de 0,15 %, c'est-à-dire d'une grandeur dépassant l'erreur de mesure presque de 100 fois!

Après de longues tentatives infructueuses de rechercher la source des erreurs dans les mesures des longueurs d'onde par la méthode des cristaux, les spécialistes en spectroscopie des rayons X ont abouti à la conclusion que la cause de ces erreurs résidait non pas dans les mesures mais dans la valeur du nombre d'Avogadro adoptée à cette époque (1931—1935) et dont la connaissance est nécessaire au calcul de la constante du cristal d suivant la formule (34.1). Il est donc essentiel d'étudier les méthodes de détermination du nombre d'Avogadro, problème qu'on abordera au paragraphe suivant.

§ 38. Détermination du nombre d'Avogadro et de la charge de l'électron

Le méthode directe de détermination du nombre d'Avogadro N est basée sur l'étude du mouvement brownien. Dans ce cas habituellement ou bien on recherchait la répartition d'après la hauteur des particules microscopiques de l'émulsion, ou bien on mesurait le carré moyen du déplacement de la particule accomplissant le mouvement de Brown dans des liquides ou des gaz (ces déterminations ont été effectuées avec des gouttelettes d'huile dans le condensateur de Millikan). Cependant, la précision de ces déterminations est faible : la valeur de N obtenue dans les travaux classiques de Perrin se différencie de la valeur standard actuelle de 25 %. Des résultats beaucoup plus précis ont été obtenus par l'étude de la rotation brownienne. Si l'on suspend un miroir très léger par un fil en quartz très fin, puis si l'on observe sur une échelle graduée et suffisamment éloignée l'image du rayon de lumière réfléchi par le miroir (fig. 90), on constate que cette image ne reste pas en place, mais effectue des oscillations irrégulières autour de la position d'équilibre. Cette « inconstance du zéro » du système suspendu est le résultat de la rotation brownienne sous l'effet de chocs des molécules de l'air. Ainsi, par exemple, avec un miroir de dimension de $0{,}8 \times 1{,}6$ mm suspendu par un fil en quartz d'une épaisseur de quelques dixièmes de micron on observe sur

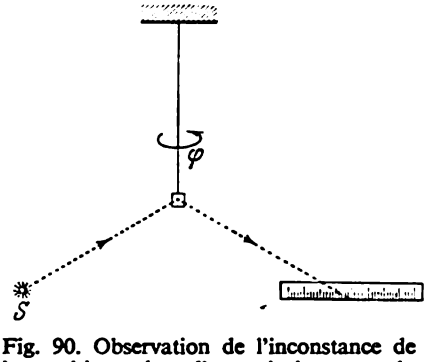


Fig. 90. Observation de l'inconstance de la position zéro d'un miroir suspendu occasionnée par le mouvement brownien

une échelle graduée éloignée du miroir de 1,5 m des déplacements du spot de quelques centimètres.

Suivant l'un des théorèmes les plus importants de la mécanique statistique classique, dit théorème de l'équipartition de l'énergie selon les divers degrés de liberté (voir § 85), l'énergie cinétique moyenne attachée à un degré de liberté est égale à $1/2\ kT$, où k est la constante de Boltzmann égale à la constante universelle de gaz R divisée par le nombre d'Avogadro N :

$$k=R/N. \tag{38.1}$$

Or il est absolument indifférent quelle est la nature de ce degré de liberté : pour une molécule gazeuse monoatomique en mouvement de translation les degrés de liberté sont les coordonnées cartésiennes du centre de gravité de la molécule et pour un système capable d'accomplir des oscillations giratoires autour d'un axe fixe le seul degré de liberté possible est caractérisé par l'angle de torsion φ. Dans un équilibre thermique à la température T, l'énergie cinétique moyenne du mouvement de translation d'une molécule d'air par degré de liberté et l'énergie moyenne des oscillations de rotations browniennes du miroir suspendu dans l'air sont les mêmes et égales à $1/2\ kT$. L'énergie cinétique de ces oscillations giratoires est égale à $1/2\ J\dot{\varphi}^2$, où J est le moment d'inertie. Pour une torsion du fil d'un angle φ on voit apparaître une énergie potentielle égale à $1/2\ A\varphi^2$, où A est une certaine constante de torsion du fil. Pour des petites oscillations l'énergie cinétique moyenne est égale à l'énergie potentielle moyenne (voir § 46), de sorte que

$$1/2J\overline{\dot{\varphi}^2}=1/2A\overline{\varphi^2}. \tag{38.2}$$

Selon le théorème de l'équipartition de l'énergie

$$1/2A\overline{\varphi^2}=1/2kT. \tag{38.3}$$

Ainsi donc, en connaissant la constante de torsion A et la valeur moyenne de $\overline{\varphi^2}$ on peut calculer directement k et, de là, suivant (38.1) calculer N.

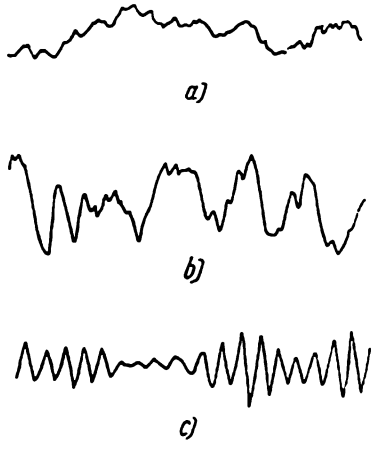


Fig. 91. Oscillations browniennes d'un miroir suspendu : *a)* à la pression atmosphérique; *b)* à la pression de $4\cdot10^{-3}$ mm; *c)* à la pression de 10^{-4} mm

Les expériences avec les rotations browiennes à des fins de détermination de N furent réalisées avec grand soin par Kappler. Les oscillations du miroir ont été enregistrées au moyen des photographies sur un film en mouvement. Des exemples de ces courbes obtenues dans des conditions différentes sont donnés à la figure 91. Il est intéressant de noter que pour une pression atmosphérique (courbe 91, *a*) les oscillations du miroir sont désordonnées, mais à mesure que la pression baissait (courbes 91, *b* et 91, *c*) ces oscillations

s'approchaient de plus en plus des mouvements sinusoïdaux de période correspondant aux oscillations propres du pendule de torsion représenté par le miroir. Il est essentiel, toutefois, que dans tous les cas la valeur moyenne de $\bar{\varphi}^2$ reste inchangée.

En enregistrant de cette façon les oscillations du miroir pendant 101 heures à la température de 287 °K, Kappler trouva que $\bar{\varphi}^2$ dans ces conditions est égal à $4{,}178 \cdot 10^{-6}$ radians. La constante de torsion du fil A fut déterminée dans une expérience séparée à $\pm 0{,}2$ % près. De cette façon on a obtenu pour N la valeur $N = 6{,}059 \cdot 10^{23}$ avec une approximation estimée à ± 1 %.

Cette précision, toutefois, n'est plus au niveau élevé qu'on exige actuellement des principales constantes universelles. Une valeur standard plus exacte de N est obtenue, toutefois, de façon indirecte. La charge de l'électron peut être exprimée comme le quotient de la charge de Faraday F par le nombre d'Avogadro N (voir § 1) :

$$e = \frac{F}{N}.$$

Or on considérait que les expériences de Millikan permettaient de mesurer la charge e avec une précision suffisante, par suite, on obtenait N à partir de e et de F :

$$N = \frac{F}{e}.$$

Ainsi donc, la précision de détermination de N dépendait de la précision avec laquelle était connue la charge de l'électron. Les différences systématiques entre les valeurs de λ trouvées au moyen du réseau de diffraction et par la méthode du cristal donnèrent une impulsion aux opérations de vérification des résultats de Millikan, car la formule (34.1), à l'aide de laquelle on calculait la constante du cristal d comprend le nombre N. On constata donc, comme on l'a noté au § 3, que les résultats de Millikan étaient faussés par des valeurs insuffisamment précises de la viscosité de l'air η utilisées dans ses calculs.

La seule solution permettant de surmonter la difficulté consistait à calculer la constante du cristal d de façon expérimentale d'après la valeur absolue de la longueur d'onde, comme on a opéré lors de l'étalonnage du réseau de diffraction.

En effet, si la valeur absolue de la longueur d'onde λ est connue et trouvée au moyen du réseau par réflexion et si, d'autre part, on détermine en utilisant le radiospectrographe à cristal l'angle φ pour lequel est obtenue la réflexion du premier ordre de cette longueur d'onde, alors d'après la formule de Wulff-Bragg

$$\lambda = 2d \sin \varphi$$

on peut déterminer la constante du cristal d. Ce mode de détermination de la constante du réseau de calcite ($CaCO_3$), habituellement utilisé dans la radiospectroscopie, après introduction de corrections nécessaires (y

compris les corrections se rapportant à l'indice de réfraction des rayons X) a donné pour d à 18 °C :

$$d=3{,}03560\cdot10^{-8}\text{ cm.}$$

En connaissant cette grandeur on peut trouver le nombre d'Avogadro de la façon suivante : de la formule (34.1) il suit que pour un cristal de système régulier (NaCl)

$$N=\frac{M}{2d^3\varrho}. \tag{38.4}$$

Dans le cas de la calcite pour laquelle la maille élémentaire n'est pas un cube mais un rhomboèdre, la formule (38.4) doit être quelque peu modifiée. Si β est l'angle obtus entre les arêtes du rhomboèdre, $\beta\approx101°\,54'$, le volume de la maille élémentaire sera $d^3\Phi(\beta)$, où

$$\Phi(\beta)=\frac{(1+\cos\beta)^2}{\sin\beta(1+2\cos\beta)},$$

et la formule (38.4) prend la forme

$$N=\frac{M}{2d^3\Phi(\beta)\varrho}. \tag{38.5}$$

Si l'on y porte les données exactes pour toutes les grandeurs : $M=100{,}090$ (d'après l'échelle chimique); $d_{18°}=3{,}0356\cdot10^{-8}$ cm; $\varrho_{20°}=2{,}710\,25$ et $\Phi(\beta)=1{,}005\,95$, on obtient pour N :

$$N=(6{,}0228\pm0{,}0011)\cdot10^{23} \tag{38.6}$$

qui est une grandeur différant sensiblement de la valeur acceptée autrefois comme standard ($6{,}06\cdot10^{23}$).

Le nombre d'Avogadro étant connu, on peut aussi calculer la charge de l'électron suivant la formule $e=F/N$. La charge de Faraday, autrement dit la quantité d'électricité transportée au cours de l'électrolyse par un équivalent-gramme d'ions quelconques, d'après les déterminations les plus précises est égale à (suivant l'échelle chimique) :

$$F=(2{,}89247\pm0{,}00030)\cdot10^{14}\text{ U. E. S. C. G. S.·éq-g}^{-1}.$$

En combinant ce nombre avec la valeur de N (39,6) on obtient la valeur exacte de la charge de l'électron

$$e=(4{,}8025\pm0{,}0010)\cdot10^{-10}\text{ U. E. S. C. G. S.}$$

§ 39. Charge massique de l'électron

L'étude des spectres de rayons X fournit également de nouvelles possibilités à la détermination précise de la charge massique de l'électron e/m. La théorie électronique de la dispersion conduit à l'expression suivante de

l'indice de réfraction dans le cas d'électrons faiblement liés et pour des rayons X suffisamment durs :

$$\mu = 1 - \frac{ne^2}{2\pi m \nu^2}, \tag{39.1}$$

où n est le nombre d'électrons par cm^3 et ν la fréquence des rayons X. Le nombre d'électrons n peut être exprimé de la façon suivante : le nombre d'électrons dans une mole de la substance de numéro atomique Z est égal à NZ, et dans 1 cm^3

$$n = \frac{NZ}{M}\varrho, \tag{39.2}$$

où M est le poids atomique. Si e est exprimé en unités électrostatiques et F en unités électromagnétiques, alors $Ne = Fc$; en remplaçant ν par c/λ on tire de (39.1) et de (39.2)

$$\mu = 1 - \frac{FZ\varrho\lambda^2}{2\pi M} \cdot \frac{e}{mc},$$

d'où en notant $\delta = 1 - \mu$ on trouve

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi M}{FZ\varrho} \cdot \frac{\delta}{\lambda^2} \text{ U. E. M. C. G. S. } \cdot g^{-1} \tag{39.3}$$

Il en découle que pour déterminer e/m (c'est-à-dire la charge massique en unités électromagnétiques) il suffit de déterminer avec exactitude δ et la longueur absolue de l'onde des rayons X. Dans ce but on a utilisé un spectre de rayons X obtenu avec un prisme dont le rôle a été joué par un grand diamant (d'un poids de 13 carats). Sur la figure 92 on a donné un spectre

Fig. 92. Spectre prismatique de la série K du cuivre

d'émission de la série K du cuivre obtenu avec ce prisme. La détermination des longueurs d'onde suivant ce spectre a donné des résultats qui concordent bien avec ceux obtenus par la mesure avec le réseau de diffraction. En déterminant de même, de façon précise, la densité du diamant [on a obtenu ainsi

$$\varrho = (3{,}5154 \pm 0{,}0001)\ g \cdot cm^{-3}]$$

et en utilisant la formule (39.3), Bardeen a trouvé pour e/m

$$\frac{e}{m} = (1{,}7601 \pm 0{,}0003) \cdot 10^7 \text{ U. E. M. C. G. S.} \cdot g^{-1}$$

qui est un nombre proche de celui obtenu au moyen des déterminations directes (voir §§ 7, 8).

CHAPITRE V

STRUCTURE DE L'ATOME ET PHYSIQUE CLASSIQUE

A. MÉCANIQUE CLASSIQUE ET STRUCTURE DE L'ATOME

§ 40. Modèles d'atomes

Dans les chapitres précédents on a fourni des preuves que l'atome représente un système complexe constitué d'électricité positive et de Z électrons. Aux premiers stades du développement de la théorie de la structure de l'atome on prétendait que tout ce système se trouvait à l'état statique. Pour représenter les électrons comme des particules en équilibre il a fallu supposer que l'électricité positive était répartie de façon uniforme et qu'elle occupait une sphère de rayon de l'ordre du rayon de l'atome tout entier, c'est-à-dire de 10^{-8} cm; quant aux électrons, on prétendait qu'ils évoluaient dans ce « nuage » d'électricité positive. L'émission de lumière par l'atome était expliquée par des faibles oscillations des électrons autour de leur position d'équilibre (modèle de J. J. Thomson). Or les expériences avec la diffusion des particules α pour l'explication desquelles il a fallu faire l'hypothèse qu'il existait un noyau positif très petit (de l'ordre de 10^{-12} à 10^{-13} cm) où se concentrait presque toute la masse de l'atome, obligèrent d'abandonner complètement le modèle statique et d'adopter le modèle planétaire, autrement dit d'imaginer les électrons sous forme de particules gravitant autour du noyau sur des orbites bien définies.

Dans ce chapitre on examinera l'outillage formel mis en œuvre par la physique classique, et tout particulièrement par la mécanique classique et l'électrodynamique, dans le but d'étudier les problèmes théoriques de la structure de l'atome, de plus on y passera en revue les principales conclusions auxquelles a abouti la physique classique. Pour cela au lieu d'étudier les systèmes atomiques dans toute leur complexité on utilisera des modèles mécaniques très simples. L'image du système en oscillation sera celle d'une particule oscillant sur une droite qui préfigure l'*oscillateur linéaire*; l'image du système dans lequel s'effectue la révolution autour d'un centre immobile sera représentée par un électron gravitant autour du noyau positif.

§ 41. Loi de conservation de l'énergie en mécanique

Les fondements de la mécanique classique sont les « axiomes de Newton ou lois du mouvement ». La formulation mathématique, sous forme d'équations du mouvement découle, comme il est connu, du principe fondamental d'après lequel la dérivée par rapport au temps de la quantité

de mouvement est égale à la force appliquée. Pour une particule ce principe donne trois équations différentielles

$$\frac{dp_x}{dt}=X, \quad \frac{dp_y}{dt}=Y, \quad \frac{dp_z}{dt}=Z, \tag{41.1}$$

où X, Y et Z sont des projections de la force sur les axes de coordonnées. Ces trois équations scalaires peuvent être remplacées par une équation vectorielle

$$\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{F} \tag{41.2}$$

(la dérivée par rapport au temps sera représentée par un point).

L'équation du mouvement écrite sous la forme (41.2), comportant la dérivée de la *quantité du mouvement* dans le premier membre s'applique aussi bien dans le cas de faibles vitesses (par rapport à la vitesse de la lumière) que dans le cas de grandes vitesses ($v/c\sim 1$). Mais c'est seulement dans le cas où $v/c\ll 1$ que la masse peut être considérée comme indépendante de la vitesse, la dérivée $\dot{\mathbf{p}}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$ étant dans ce cas simplement $m\dot{\mathbf{v}}$ ou $m\ddot{\mathbf{r}}$, où $\mathbf{r}$ est un rayon vecteur définissant la position de la particule. A cette condition pour de petites vitesses les trois équations scalaires (41.1) peuvent être écrites sous la forme usuelle

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z, \tag{41.1'}$$

quant à l'équation vectorielle (41.2), elle prend la forme

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}. \tag{41.2'}$$

Formons le produit *scalaire* de l'équation (41.2') par la vitesse $\dot{\mathbf{r}}$:

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}. \tag{41.3}$$

Le premier membre de l'égalité obtenue se transforme ainsi :

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

La grandeur

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \tag{41.4}$$

porte le nom d'*énergie cinétique*. Ainsi donc, dans le premier membre de (41.3) on a la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}=\frac{dT}{dt}. \tag{41.5}$$

De (41.3) et de (41.5) il suit

$$dT=\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}\,dt=\mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \tag{41.6}$$

Mais $\mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ est le travail accompli par la force sur un déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$, par suite, le travail accompli par la force est égal à l'accroissement de l'énergie cinétique.

Dans nombre de cas les composantes de la force peuvent être exprimées sous forme de dérivées partielles affectées du signe moins par rapport aux coordonnées d'une certaine fonction des coordonnées U*):

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$Z=-\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{41.7}$$

ou, sous une forme vectorielle

$$\mathbf{F}=-\operatorname{grad} U. \tag{41.7'}$$

Dans ce cas

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right). \tag{41.8}$$

Si U est une fonction des seules coordonnées, alors dans le second membre de (41.8) on a une différentielle totale

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}=-\frac{dU}{dt}. \tag{41.9}$$

Le travail de la force sur un déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$ sera alors

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}\,dt=-\frac{dU}{dt}\,dt=-dU,$$

et le travail de la force sur le chemin fini du point A au point B est

$$\int_A^B \mathbf{F}\,d\mathbf{r}=-\int_A^B dU=U_A-U_B.$$

Si d'autre part U est une fonction univalente, alors le travail de la force ne dépend manifestement pas du chemin parcouru et est égal à la différence des valeurs de U aux points initial et final du trajet. La fonction U jouissant de la propriété exprimée par les égalités (41.7) est appelée d'ordinaire fonction potentielle. Si elle ne dépend pas explicitement du temps et est une fonction univalente des coordonnées, elle est alors dénommée énergie potentielle.

---

*) L'exemple le plus simple est fourni par la force de la pesanteur égale à mg. Dans ce cas $U=-mgz$ et ses composantes seront

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-\frac{\partial U}{\partial z}=mg.$$

De (41.3), (41.5) et (41.9) il suit

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{dU}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(T+U)=0, \tag{41.10}$$

d'où

$$T+U=\text{const}\equiv E. \tag{41.11}$$

C'est justement l'expression de la loi mécanique de la conservation de l'énergie : la somme des énergies potentielle et cinétique est une grandeur constante. Le champ de forces de potentiel U ne dépendant pas explicitement du temps est dit conservatif.

Il se présente, toutefois, des cas quand la fonction U possédant la propriété (41.7) existe, mais dépend du temps*). Examinons, par exemple, le mouvement d'une particule chargée à l'intérieur d'un condensateur entre les armatures duquel on a une différence de potentiel V variant périodiquement par rapport au temps, par exemple suivant la loi du cosinus $V=V_0\cos\omega t$. Le produit de la charge e par V

$$U=eV=eV_0\cos\omega t$$

se caractérise par le fait que la force exercée par le champ sur la particule à chaque instant est grad U :

$$\mathbf{F}=-\text{grad}\,U,$$

mais la fonction U et avec elle la force $\mathbf{F}$ dépendent explicitement du temps. Dans ce cas la somme $T+U$ n'a pas de valeur constante. En effet,

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right).$$

Par conséquent (41.8) donne maintenant

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}=-\frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t},$$

et au lieu de (41.10) on obtient

$$\frac{d}{dt}(T+U)=-\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Ceci montre que le système est « non fermé », c'est-à-dire qu'il constitue une partie d'un système plus grand pour lequel la loi de conservation de l'énergie est dans l'ensemble applicable.

Il se présente des cas quand les forces dépendent de la vitesse. Un exemple nous est fourni par la résistance du milieu au mouvement des corps : telle est la force de résistance de l'air de Stokes $F=6\pi\eta av$ rencontrée au § 2 lors de l'étude de la chute des gouttelettes d'huile. Désignant par k le coefficient associé à v et considérant que la force de résistance R est toujours dirigée à l'encontre de la vitesse on peut, en général, écrire

$$R=-kv.$$

*) Sur la possibilité d'utilisation du potentiel dépendant du temps qu'il est plus rationnel d'appeler « potentiel généralisé » voir l'ouvrage de G. Goldstein, *Mécanique classique*, Gostekhizdat, 1957 (en russe).

L'équation du mouvement de la particule déclenché par la force **F** dans un milieu de résistance **R** sera

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}+\mathbf{R}.$$

En multipliant les deux membres par $\dot{\mathbf{r}}\equiv\mathbf{v}$ on a

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{R}\dot{\mathbf{r}}.$$

En s'appuyant sur les formules (41.1) et (41.2) et tenant compte de ce que $\mathbf{R}\dot{\mathbf{r}}=-kv^2$, on obtient $\frac{d}{dt}(T+U)=-kv^2$.

On voit que, comme dans le cas précédent, la somme $T+U$ ne reste pas constante; puis comme v^2 est toujours >0, il en résulte que $-kv^2<0$ et, par conséquent, $T+U$ décroît avec le temps : les forces de frottement sont donc non conservatives.

Un cas important de forces dépendant de la vitesse est constitué par la force qu'exerce le champ magnétique sur une particule chargée mobile. Cette force s'exprimant par le produit vectoriel

$$\mathbf{F}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathcal{H})$$

est *perpendiculaire* à la vitesse et par suite *ne produit aucun travail.*

En conclusion rappelons que puisque le potentiel est défini par ses dérivées [formules (41.7)], seule la différence de potentiel possède une valeur déterminée. Quant à la valeur absolue du potentiel, elle comprend une constante arbitraire et, par suite, on peut choisir arbitrairement le zéro du potentiel.

§ 42. Diagrammes de potentiel

La loi de conservation de l'énergie fournit la relation existant entre les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps, qui peut être utilisée pour la solution des problèmes mécaniques. Il est particulièrement commode d'utiliser cette relation dans le cas d'un mouvement unidimensionnel de la particule quand sa seule connaissance est suffisante. Supposons que la particule se déplace suivant une droite. Si l'on pose que cette droite est l'axe x, alors l'énergie potentielle sera une fonction d'une seule coordonnée $U=U(x)$. La loi de conservation de l'énergie donne dans ce cas

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)=E,$$

d'où

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)},$$

$$t=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}+t_0, \tag{42.1}$$

où t_0 est une constante arbitraire.

Connaissant l'expression explicite de l'énergie potentielle, on peut à l'aide de la formule (42.1) trouver la loi du mouvement. Posons, par exemple, que $U=1/2fx^2$, où f est une constante positive. Alors la formule (42.1) donne

$$t-t_0=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{1}{2}fx^2\right)}}=\sqrt{\frac{m}{f}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{f}-x^2}}. \qquad (42.1')$$

Le nombre positif $2E/f$ peut être désigné par a^2 (il est facile de voir que a a la dimension de la longueur) et alors

$$t-t_0=\sqrt{\frac{m}{f}}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{m}{f}}\arcsin\frac{x}{a},$$

d'où

$$x=a\sin\left(\sqrt{\frac{f}{m}}t-\sqrt{\frac{f}{m}}t_0\right),$$

où, en désignant la constante $\sqrt{\frac{f}{m}}t_0$ par δ,

$$x=a\sin\left(\sqrt{\frac{f}{m}}t-\delta\right).$$

Ainsi donc, pour $U=fx^2/2$ le mouvement est une oscillation harmonique.

L'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement unidimensionnel étant connue, on peut établir la nature qualitative du mouvement sans recourir aux procédés analytiques. Il suffit pour cela de tracer un diagramme représentant l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée. Ces diagrammes portent le nom de diagrammes de potentiel.

Soit, par exemple, un diagramme de potentiel de la forme représentée à la figure 93. On peut alors sans calculer l'intégrale figurant dans le second membre de (42.1) (et même sans connaître l'expression analytique exacte de l'énergie potentielle) déterminer certaines singularités importantes du mouvement. Prenons une valeur quelconque de l'énergie totale, par exemple E_1, et menons sur le dessin une droite parallèle à l'axe des abscisses à la distance E_1 de celui-ci. Cette droite coupe le diagramme de potentiel en des points B, C, D d'abscisses x_1, x_2, x_3. Il est évident que la formule (42.1) possède un contenu physique (du point de vue de la mécanique classique) seulement au cas où la racine $\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}$ est réelle, c'est-

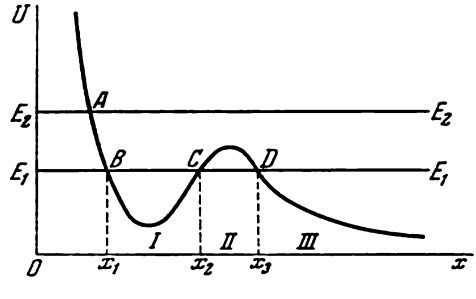


Fig. 93. Exemple de diagramme de potentiel

-à-dire quand $E \geqslant U$. D'après le dessin on voit que ce cas se réalise sous la condition que

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{I}$$

ou sous la condition que

$$x \geqslant x_3. \tag{II}$$

Ainsi donc, quand la particule se trouve dans le domaine *I*, son mouvement est tel qu'elle ne peut sortir des limites de ce domaine. En effet, son abscisse ne peut être ni inférieure à x_1 ni supérieure à x_2, sinon son énergie potentielle serait supérieure à l'énergie totale et la vitesse $\dot{x}$ deviendrait une grandeur imaginaire. Il en découle que le mouvement de la particule dans le domaine *I* est une oscillation. Les positions extrêmes sont atteintes pour $x=x_1$ et $x=x_2$ quand U devient égal à E. La *période* d'oscillation est évidemment égale à

$$T=2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}.$$

La particule ne peut pénétrer dans le domaine *II*. Mais si elle possède une énergie totale E_1 et se trouve au point $x=x_3$, son abscisse peut alors croître jusqu'à l'infini, car pour toutes valeurs de $x \geqslant x_3$ l'énergie potentielle est inférieure à l'énergie totale.

Supposons maintenant que la particule possède une réserve d'énergie $E_2 > E_1$. En menant comme précédemment une droite au niveau de E_2 on constate qu'à droite de *A* la particule peut se mouvoir jusqu'à l'infini, car son énergie totale y est partout supérieure à l'énergie potentielle. Par contre, à gauche de *A* le mouvement de la particule est gêné par une barrière insurmontable (domaine où $E < U$).

La nature qualitative du mouvement peut être déterminée au moyen du diagramme de potentiel en s'aidant de l'image parlante suivante. Soit une piste parfaitement lisse tracée de façon que son profil coïncide avec le diagramme de potentiel. Dans le cas du diagramme de la figure 93 ce sera une pente descendante interrompue par une faible montée puis se poursuivant de nouveau. Posons sur cette piste au niveau E une lourde bille et abandonnons-la à elle-même. La bille roulera vers le bas et son mouvement reproduira presque exactement le mouvement de la particule qui nous intéresse. Si on l'élève à la hauteur E_1, elle accomplira un mouvement de va-et-vient dans la dépression *I* et n'arrivera pas à dépasser la crête *II*; si on l'élève jusqu'au niveau E_2, elle franchira facilement la crête *II* et roulera à l'infini.

La cause permettant d'utiliser cette image réside dans le fait que l'énergie potentielle de la lourde bille est proportionnelle à la hauteur. Cette image est entachée d'une petite imprécision, car une partie de l'énergie de la bille est dépensée à entretenir sa rotation.

§ 43. Loi de conservation de l'impulsion

Jusque-là on a étudié le mouvement d'une particule dans un champ de forces quelconques. Etudions maintenant un système élémentaire composé de deux particules et supposons que ces particules ne sont soumises qu'à des forces agissant entre elles. Ces forces sont dites intérieures à la différence des forces agissant sur les particules du système de l'extérieur et, par suite, appelées extérieures. Notons les paramètres associés aux particules respectivement par des indices *1* et *2*. La position de la première particule par rapport à un centre *O* choisi arbitrairement est caractérisée par le rayon vecteur $\mathbf{r}_1$ et la position de la seconde particule, par le rayon vecteur $\mathbf{r}_2$ (fig. 94). Les équations du mouvement des deux particules seront

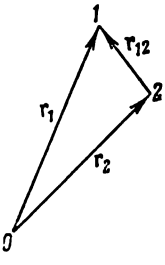


Fig. 94.

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1=\mathbf{F}_{12}, \tag{43.1}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2=\mathbf{F}_{21}, \tag{43.2}$$

où le vecteur $\mathbf{F}_{12}$ désigne la force s'exerçant sur la première particule de la part de la seconde et $\mathbf{F}_{21}$ la force s'exerçant sur la seconde particule de la part de la première. Suivant le principe de l'action et de la réaction ces forces sont égales en grandeur et de sens opposé, de sorte que

$$\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}=0. \tag{43.3}$$

En sommant (43.1) et (43.2) et en tenant compte de (43.3) on obtient

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1+m_2\ddot{\mathbf{r}}_2=0,$$

soit

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\dot{\mathbf{r}}_2)=0.$$

Il en découle que

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\dot{\mathbf{r}}_2=\text{const}, \tag{43.4}$$

ou, ce qui revient au même,

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=\text{const}.$$

La grandeur vectorielle $m_i\dot{\mathbf{r}}_i=m_i\mathbf{v}_i$ est appelée *impulsion* ou *quantité de mouvement de la particule*.

L'égalité (43.4) exprime la loi de conservation de l'impulsion ayant lieu dans un système de deux particules soumises à l'action de forces intérieures quelconques. Il est facile de généraliser cette loi à un système de n particules soumises uniquement à l'action de forces intérieures. L'équation du mouvement de la k-ième particule est

$$m_k\ddot{\mathbf{r}}_k=\sum_i{}'\mathbf{F}_{ki}, \tag{43.5}$$

où le second membre est la somme des forces s'exerçant sur la k-ième particule de la part des autres particules du système. Le signe prime

affectant le symbole de la somme signifie que la sommation se fait sur toutes les valeurs de l à l'exception de $l=k$. Ecrivant les équations du mouvement pour toutes les particules du système et en les sommant on obtient, en représentant le premier membre sous forme de la dérivée première par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{i,j}{}' \mathbf{F}_{ij}.$$

Il est facile de voir, toutefois, que le second membre est nul. En effet, dans le second membre à chaque terme $\mathbf{F}_{kl}$ on peut faire correspondre $\mathbf{F}_{lk}$. Suivant le principe de l'action et de la réaction pour chaque couple on a

$$\mathbf{F}_{kl}+\mathbf{F}_{lk}=0$$

et par suite

$$\frac{d}{dt}m_i\dot{\mathbf{r}}_i=0,$$

soit

$$\sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i=\text{const}, \tag{43.6}$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 44. Collisions

Appliquons les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie à la solution du problème du choc de deux particules. Soient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vitesses de deux particules de masses m_1 et m_2 avant la collision et $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ après la collision.

On a vu plus haut que la loi de conservation de l'impulsion devait s'appliquer quelle que soit la nature des forces d'interaction. Selon cette loi l'impulsion totale du système se conserve, c'est-à-dire que la somme des impulsion de deux particules avant la collision est égale à la somme de leurs impulsions après la collision.

En désignant les impulsions des particules avant la collision par $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ et après la collision respectivement par $\mathbf{p}_1'$ et $\mathbf{p}_2'$ on a

$$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'. \tag{44.1}$$

En ce qui concerne la loi de conservation de l'énergie mécanique, elle ne joue que dans le cas où après collision il n'y a ni libération, ni absorption d'énergie, plus précisément, si après le choc l'énergie interne des particules reste invariable.

Cette condition est souvent mise en défaut. Par exemple, au cours des collisions de noyaux atomiques, conduisant à des réactions nucléaires, il se dégage habituellement (plus rarement, est absorbée) une grande quantité d'énergie; dans des chocs d'électrons avec les atomes sous certaines conditions (voir § 91 et suiv.) une partie, ou bien toute l'énergie cinétique du mouvement relatif des deux particules, peut se transformer en énergie

d'excitation de l'atome, c'est-à-dire qu'on se trouve en présence d'une absorption d'énergie. Dans ce paragraphe on n'examinera que les collisions élastiques, c'est-à-dire les collisions pour lesquelles il y a conservation de l'énergie mécanique. Ceci permet d'ajouter à l'équation vectorielle (44.1) une équation scalaire qu'on écrira en exprimant les énergies cinétiques au moyen des impulsions :

$$\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}=\frac{p_1'^2}{2m_1}+\frac{p_2'^2}{2m_2}. \qquad (44.1')$$

Supposons que la particule *2* se trouve avant la collision au repos, soit $\mathbf{p}_2=0$. Dans la plupart des cas cette condition est satisfaite avec une précision suffisante dans les expériences réalisées en physique atomique. Par exemple, lors de l'étude de la collision entre électrons et atomes on bombarde habituellement les atomes par un faisceau d'électrons accélérés par une tension. Or la vitesse des électrons est de beaucoup supérieure aux vitesses cinétiques dont sont animés les atomes gazeux bombardés, de sorte que ces dernières peuvent être supposées nulles. Le même phénomène, mais plus accentué, se présente au cours de l'étude de la diffusion des particules nucléaires ou dans des réactions nucléaires.

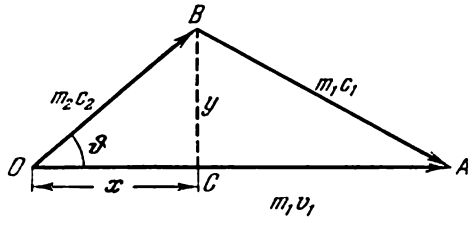


Fig. 95.

Pour $\mathbf{p}_2=0$ l'équation (44.1) se transforme en une égalité vectorielle

$$\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'. \qquad (44.2)$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, les trois vecteurs $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_1'$ et $\mathbf{p}_2'$ doivent former le triangle fermé *OBA* (fig. 95). Montrons maintenant que quelle que soit la direction du mouvement de la particule *2* après collision, le point *B*, extrémité du vecteur impulsion de cette particule $\mathbf{p}_2'$ se trouve après collision sur un cercle. Les coordonnées du point *B* par rapport au repère d'origine *O* répondent à l'équation

$$x^2+y^2=p_2'^2. \qquad (44.3)$$

Ensuite du triangle *BCA* on tire

$$(p_1-x)^2+y^2=p_1'^2. \qquad (44.4)$$

La loi de conservation de l'énergie exige que pour $p_2=0$

$$\frac{p_1^2}{m_1}=\frac{p_1'^2}{m_1}+\frac{p_2'^2}{m_2}. \qquad (44.5)$$

Portant dans (44.4) l'expression de $p_1'^2$ tirée de (44.5) et utilisant (44.3) on a après de simples transformations algébriques

$$x^2+y^2-2\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1x=0. \qquad (44.6)$$

Cette équation se réduit facilement à la forme

$$\left(x-\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1\right)^2+y^2=\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1\right)^2. \qquad (44.6')$$

Mais c'est l'équation du cercle passant par le point B et ayant pour rayon

$$r=\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1=\frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}}p_1. \qquad (44.7)$$

Considérons maintenant quelques cas particuliers intéressants. Soit $m_1=m_2$, ce qui se réalise dans la collision de la particule α avec le noyau d'hélium ou de proton avec le noyau de l'hydrogène léger. De (44.7) on a $r=1/2\,p_1$ pour $m_1=m_2$.

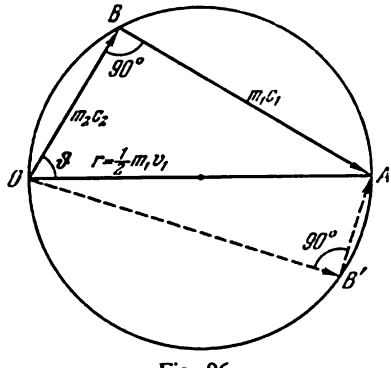


Fig. 96.

Dans ce cas le diamètre du cercle est égal à l'impulsion de la particule incidente, c'est-à-dire que le cercle passe non seulement par le point B mais également par le point A. Il en découle (fig. 96) qu'après collision les particules prennent les directions faisant un angle droit entre elles. Sur la figure 97 on a donné une photographie stéréoscopique du choc de la particule α avec le noyau de l'hélium. On voit qu'après la collision les deux particules s'écartent l'une de l'autre d'un angle droit. Le cas où $p_1'=0$ (« choc frontal ») constitue une exception. Dans ce cas de la loi de conservation de l'impulsion en écrivant les expressions explicites des impulsions on obtient :

$$m_1v_1=m_2c_2,$$

ce qui donne (pour $m_1=m_2$) $c_2=v_1$. Cela signifie qu'en cas de choc frontal la particule incidente s'arrête et transmet son impulsion à la particule bombardée.

Dans un second exemple examinons le cas où $m_2/m_1=4$. Ce cas se réalise dans la collision du proton avec le noyau de l'hélium ou de la particule α avec le noyau de l'oxygène.

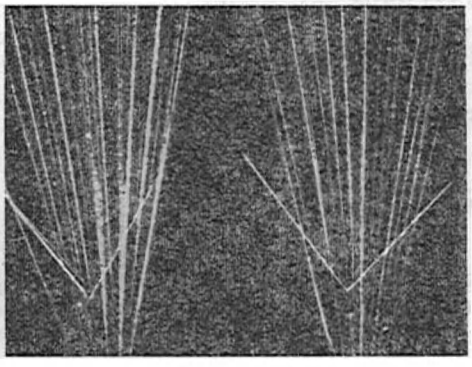


Fig. 97.

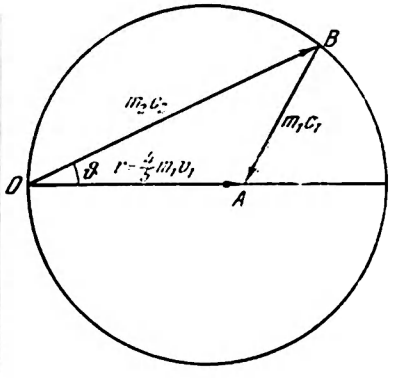


Fig. 98.

De (44.7) on tire

$$r=4/5\,p_1.$$

La figure 98 fournit le moyen de calculer les angles de déviation des deux particules après le choc au cas où est connue la valeur de l'impulsion de la particule incidente après collision.

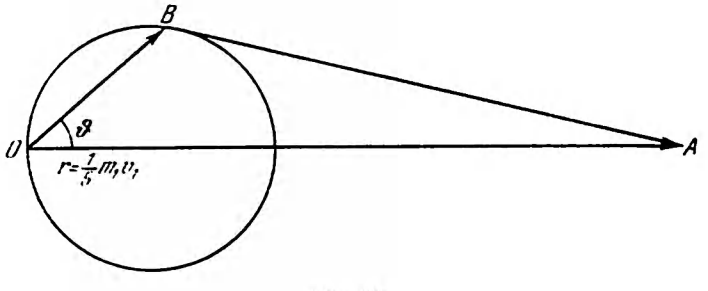


Fig. 99.

Il est également intéressant d'envisager le cas de l'inverse du rapport des masses $m_2/m_1=1/4$ (par exemple, collision de la particule α avec le proton). Dans ce cas d'après (44.7) on a

$$r=1/5\,p_1.$$

Comme il se dégage de la figure 99 dans ce cas p_2' est toujours de beaucoup inférieur à p_1.

§ 45. Centre de masse (d'inertie)

Dans tout système de deux particules il existe un point remarquable appelé *centre de masse (d'inertie)*. Son rayon vecteur se détermine de la façon suivante (fig. 100):

$$\mathbf{r}_C=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}. \tag{45.1}$$

Il est facile de montrer que dans un système de deux particules le centre de masse se trouve sur la droite joignant les deux particules et divise cette droite en raison inverse du rapport des masses. En effet, de (45.1) il suit que

$$m_1(\mathbf{r}_C-\mathbf{r}_1)=m_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_C), \tag{45.2}$$

mais cela signifie que les vecteurs $\mathbf{r}_C-\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_C-\mathbf{r}_2$ sont parallèles, et comme ils ont un point commun C les trois points m_1, C et m_2 appartiennent à une même droite. Ainsi la première partie de notre assertion se trouve démontrée. La seconde partie découle immédiatement de l'égalité (45.2) qui peut être récrite sous la forme

$$\frac{|\mathbf{r}_C-\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_C|}=\frac{m_2}{m_1}. \tag{45.3}$$

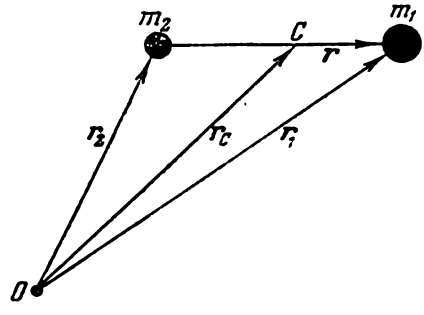


Fig. 100.

Etudions maintenant les propriétés du centre de masse. La loi de conservation de l'impulsion pour un système de deux particules s'exprime sous la forme vectorielle par l'égalité

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\dot{\mathbf{r}}_2=\text{const}. \tag{45.4}$$

Cherchons la dérivée par rapport au temps du rayon vecteur du centre de masse

$$\dot{\mathbf{r}}_C=\frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{m_1+m_2}.$$

Comparant cette expression avec (45.4) on voit que

$$\dot{\mathbf{r}}_C=\text{const}. \tag{45.4'}$$

Ainsi donc, dans un système de deux particules non soumis à l'action de forces extérieures le centre de masse est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Le système de coordonnées utilisé dans lequel on a (45.4') est habituellement appelé en physique atomique « du laboratoire », parce que dans ce cas les axes de coordonnées cartésiennes sont, par exemple, définis par l'intersection des plans des deux murs du laboratoire avec le plan du plancher. On peut cependant choisir pour système de coordonnées un référentiel

dont l'origine est le centre de masse. Ce système de coordonnées s'appelle *système du centre de masse* et présente, comme on le verra, une série d'avantages.

La vitesse du centre de masse dans un système de coordonnées du laboratoire est égale à

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2},$$

où $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses des deux particules, de même, par rapport au système de coordonnées du laboratoire. Pour trouver les vitesses des particules dans le système du centre de masse il faut soustraire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ la vitesse du centre de masse $\mathbf{v}_C$. Ainsi,

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \tag{45.5}$$

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_2 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \tag{45.6}$$

L'impulsion totale dans le système du centre de masse sera

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'$$

et en tenant compte de (45.5) et (45.6) on voit que

$$\mathbf{P} = 0.$$

Ainsi donc, dans le système de coordonnées du centre de masse l'impulsion totale d'un système de particules est non seulement constante mais est égale à zéro. Le passage au système de coordonnées du centre de masse est dans nombre de cas très avantageux, car ces coordonnées permettent d'étudier les mouvements relatifs au sein du système des particules en négligeant le mouvement du système dans son ensemble. Toutefois, au cours de calculs énergétiques on ne doit pas oublier, comme on le verra, le mouvement du centre de masse.

En effet, calculons l'énergie cinétique totale d'un système de deux particules. Pour le faire il faut évidemment rapporter les vitesses des particules au système de coordonnées du laboratoire. Ainsi,

$$E_{\text{lab}} = 1/2\ m_1 v_1^2 + 1/2\ m_2 v_2^2 = 1/2\ m_1(\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_C)^2 + 1/2\ m_2(\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_C)^2 =$$
$$= 1/2\ m_1 v_1'^2 + 1/2\ m_2 v_2'^2 + 1/2\ (m_1+m_2)v_C^2 + (m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2')\mathbf{v}_C.$$

Le dernier terme est nul d'après (45.5) et (45.6); on a donc

$$E_{\text{lab}} = E_{\text{c. m}} + 1/2\ (m_1+m_2)v_C^2. \tag{45.7}$$

Cette formule est très importante. Etudions un phénomène quelconque résultant d'une collision inélastique de deux particules. Cela peut être, par exemple, une ionisation de l'atome ou une dissociation moléculaire sous l'effet d'une collision avec un électron ou bien une réaction nucléaire déclenchée par des particules rapides ou un autre processus analogue.

L'énergie critique nécessaire pour amorcer ce phénomène (énergie d'ionisation, énergie de dissociation, etc.) est évidemment égale à $E_{c.m}$. Or la formule (45.7) montre que l'énergie de la particule incidente (électron, proton, etc.) doit être supérieure à $E_{c.m}$ de la valeur de l'énergie cinétique du centre de masse où est concentrée toute la masse du système.

Le calcul de E_{lab} est particulièrement simple quand on peut poser $v_2=0$, qui est la vitesse de la particule bombardée (cible). Dans ce cas

$$E_{lab}=1/2\ m_1v_1^2,\quad E_{c.m}=1/2\ m_1v_1'^2+1/2\ m_2v_2'^2=1/2\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_1^2,$$

car $v_2=0$. Il s'ensuit

$$\frac{E_{lab}}{E_{c.m}}=\frac{m_1+m_2}{m_2},\quad E_{lab}=E_{c.m}\frac{m_1+m_2}{m_2}.$$

Il en découle que $E_{lab}=E_{c.m}$ uniquement dans le cas où $m_2\gg m_1$.

Exercice. L'énergie de la réaction nucléaire $^{14}N+{}^4He\rightarrow{}^{17}O+{}^1H$ est égale à 1,13 MeV (1 MeV$=10^6$ eV). Quelle doit être l'énergie minimale de la particule α pour que la réaction puisse avoir lieu? (*Réponse :* 1,45 MeV.)

§ 46. Oscillateur linéaire harmonique

Soit une particule de masse m qui se meut sur une droite sous l'action d'une force proportionnelle à l'écartement de la particule de sa position d'équilibre et constamment dirigée vers la position d'équilibre. Ce système oscillant est appelé oscillateur linéaire harmonique. Un exemple de ce mouvement nous est fourni par une bille lourde accrochée à un ressort élastique (fig. 101). Un électron accomplissant des oscillations sous l'influence d'un champ électrique est également un oscillateur linéaire harmonique à condition que la force s'exerçant sur l'électron de la part du champ soit proportionnelle à la première puissance de son écartement de la position d'équilibre et soit dirigée vers cette position. Par analogie avec la force élastique toutes les forces répondant aux exigences indiquées plus haut sont appelées *quasi élastiques*.

Comme le mouvement de la particule dans un oscillateur linéaire s'effectue suivant une droite, on peut toujours choisir cette droite pour axe de coordonnées. Supposons qu'il s'agit de l'axe x et que l'origine des coordonnées coïncide avec la position d'équilibre de la particule (fig. 102). L'équation du mouvement est dans ce cas

$$m\ddot{x}=-fx, \tag{46.1}$$

où f est un coefficient de proportionnalité constant égal à la force produisant une élongation $x=1$; il est appelé « constante de la force quasi élastique ». Récrivons l'équation (46.1) de la façon suivante :

$$\ddot{x}+\frac{f}{m}x=0, \tag{46.2}$$

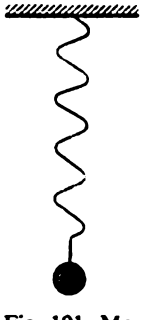


Fig. 101. Modèle de l'oscillateur linéaire harmonique

ou en tenant compte de ce que $f/m>0$ et introduisant la notation

$$f/m=\omega^2, \tag{46.3}$$

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0. \tag{46.4}$$

Les solutions particulières de l'équation (46.4) seront

$$x_1=\cos \omega t, \quad x_2=\sin \omega t, \tag{46.5}$$

ce que l'on vérifie en portant ces expressions dans (46.4).

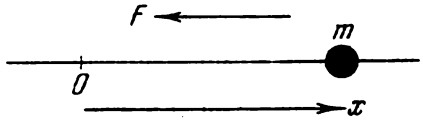


Fig. 102.

D'après la propriété connue des équations différentielles linéaires la solution générale sera obtenue par la combinaison linéaire des solutions particulières de (46.5)

$$x=c_1 \cos \omega t+c_2 \sin \omega t, \tag{46.6}$$

avec deux constantes arbitraires c_1 et c_2. Ces constantes peuvent être trouvées à partir des conditions initiales : si, par exemple, pour $t=0$ on a $x=x_0$, $\dot{x}=v_0$, alors, comme il est facile de se convaincre, $c_1=x_0$, $c_2=v_0/\omega$ et, par suite, (46.6) prend la forme

$$x=x_0 \cos \omega t+\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \tag{46.7}$$

Pour atteindre l'objectif visé il est préférable de représenter la solution générale (46.6) sous une forme modifiée. Récrivons (46.6) en mettant c_1 en facteur :

$$x=c_1\left(\cos \omega t+\frac{c_2}{c_1} \sin \omega t\right).$$

Posant $c_2/c_1=\operatorname{tg} \delta$ on a

$$x=c_1(\cos \omega t+\operatorname{tg} \delta \cdot \sin \omega t)=\frac{c_1}{\cos \delta} \cos (\omega t-\delta)=\sqrt{c_1^2+c_2^2} \cdot \cos (\omega t-\delta),$$

ou, en utilisant la notation $\sqrt{c_1^2+c_2^2}=a$, on a en définitive

$$x=a \cos (\omega t-\delta), \tag{46.8}$$

où a et δ sont des nouvelles constantes arbitraires.

Le mouvement décrit par la formule (46.8) sera évidemment périodique, car le temps y entre par l'office d'une fonction périodique. Cela signifie qu'il existe un intervalle de temps T tel que

$$\cos (\omega t-\delta)=\cos [\omega(t+T)-\delta].$$

Il en découle que

$$\omega T=2\pi, \quad \omega=2\pi/T;$$

ω est appelé fréquence angulaire ou pulsation et l'inverse de la période T fréquence ν :

$$\nu=1/T=\omega/2\pi.$$

Selon (46.3)

$$\omega=\sqrt{\frac{f}{m}}, \tag{46.9}$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}}. \tag{46.10}$$

Calculons maintenant l'*énergie de l'oscillateur*. L'énergie cinétique est égale à $E_c=\frac{m}{2}\dot{x}^2$, ou puisque $\dot{x}=-a\omega\sin(\omega t-\delta)$

$$E_c=\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t-\delta). \tag{46.11}$$

Si pour la valeur nulle de l'énergie potentielle on prend la valeur atteinte au moment où la particule se trouve en position d'équilibre, alors l'énergie potentielle d'une certaine position ayant pour coordonnée x sera

$$E_p=-\int_0^x F\,dx=f\int_0^x x\,dx=\frac{fx^2}{2}. \tag{46.12}$$

En y portant x tiré de (46.8) et tenant compte de ce que d'après (46.9) $f=m\omega^2$, on trouve

$$E_p=1/2\,ma^2\omega^2\cos^2(\omega t-\delta). \tag{46.13}$$

A l'aide de (46.11) et (46.13) on trouve l'énergie totale :

$$E=E_c+E_p=1/2\,ma^2\omega^2[\sin^2(\omega t-\delta)+\cos^2(\omega t-\delta)]=1/2\,ma^2\omega^2. \tag{46.14}$$

Les formules (46.11) et (46.13) montrent que les énergies cinétique et potentielle varient avec le temps comme les carrés du sinus et du cosinus. C'est pourquoi pour trouver les valeurs moyennes de l'énergie pour une période entière il suffit de calculer les moyennes des carrés du cosinus et du sinus. Dans ce cas l'existence de la constante de phase δ indépendante du temps ne joue évidemment aucun rôle. D'après la définition de la valeur moyenne pour la période T on a

$$\overline{\cos^2\omega t}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos^2\omega t\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\frac{1+\cos^2\omega t}{2}\,dt=\frac{1}{2}, \tag{46.15}$$

$$\overline{\sin^2\omega t}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\sin^2\omega t\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\frac{1-\cos^2\omega t}{2}\,dt=\frac{1}{2}. \tag{46.16}$$

Notons en outre que les valeurs moyennes de $\cos^2\omega t$ et de $\sin^2\omega t$ pendant un intervalle de temps très grand par rapport à la période sont aussi égales à la moitié. Soit t_1 un tel intervalle de temps : $t_1\gg T$. On a

$$\overline{\cos^2\omega t}=\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{4\omega t_1}\sin 2\omega t.$$

Or $\omega t_1 = 2\pi \frac{t_1}{T}$ et si $t_1 \gg T$, alors ωt_1 est un très grand nombre et, par suite, le second terme est très petit et on peut le négliger. Ainsi, pour un intervalle de temps suffisamment grand

$$\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2.$$

De même

$$\overline{\sin^2 \omega t} = 1/2.$$

Ainsi donc, de (46.11) et (46.15) on tire pour l'énergie cinétique moyenne au bout d'une période ou d'un intervalle de temps suffisamment grand par rapport à la période :

$$\bar{E}_c = \frac{1}{4} a^2 m\omega^2 \qquad (46.17)$$

et pour l'énergie potentielle moyenne

$$\bar{E}_p = \frac{1}{4} a^2 m\omega^2. \qquad (46.18)$$

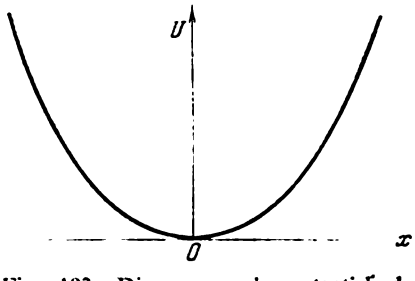


Fig. 103. Diagramme de potentiel de l'oscillateur harmonique

La comparaison de (46.17), (46.18) et (46.14) donne

$$\bar{E}_c = \bar{E}_p = 1/2E, \qquad (46.19)$$

autrement dit, pour le cas d'un oscillateur linéaire harmonique l'énergie cinétique moyenne au bout d'un intervalle de temps suffisamment grand est égale à l'énergie potentielle moyenne et ces deux énergies sont égales à la moitié de l'énergie totale.

Puisque l'énergie potentielle U est proportionnelle au carré de l'élongation $U = fx^2/2$, le diagramme de potentiel de l'oscillateur harmonique est une parabole (fig. 103)

§ 47. Représentation des oscillations sous forme complexe

La solution générale de l'équation des vibrations d'un oscillateur harmonique

$$x = a \cos(\omega t - \delta) \qquad (46.8)$$

peut être écrite sous une forme quelque peu modifiée présentant du point de vue formel de grands avantages. Pour ce faire rappelons que suivant un théorème connue d'analyse tout nombre complexe

$$u = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \qquad (47.1)$$

peut être représenté sous forme d'une fonction exponentielle d'exposant imaginaire

$$u = re^{i\varphi}, \qquad (47.2)$$

où r, dit module du nombre complexe, est de même désigné au moyen de $|u|$, et φ est l'argument ou la phase. Si l'on remplace dans (47.1) et (47.2) i par $-i$, on obtient un nombre complexe

$$u^*=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=re^{-i\varphi}, \tag{47.3}$$

qu'on appelle conjugué complexe de u. Le produit de deux nombres complexes conjugués vaut le carré de leur module commun, car

$$uu^*=re^{i\varphi}\cdot re^{-i\varphi}=r^2=|u|^2.$$

Il est facile de constater que l'expression complexe

$$x=a(\cos\omega t+i\sin\omega t)=ae^{i\omega t} \tag{47.4}$$

et son conjugué complexe

$$x^*=a(\cos\omega t-i\sin\omega t)=ae^{-i\omega t} \tag{47.5}$$

satisfont à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (46.4), car ils renferment les combinaisons linéaires de ses solutions particulières. De façon *formelle* on est donc en droit d'écrire la formule des oscillations non pas seulement sous forme trigonométrique mais également sous forme exponentielle (47.4) ou (47.5). Cette substitution est dans nombre de cas logique, car les opérations mathématiques avec les fonctions exponentielles sont souvent plus simples qu'avec les fonctions trigonométriques. Néanmoins, du point de vue physique la formule $x=ae^{i\omega t}$ contient une contradiction, car dans le premier membre figure une quantité réelle (la coordonnée) et dans le second, une quantité complexe. C'est pourquoi, nonobstant cette situation, pour pouvoir opérer avec des fonctions exponentielles on a décidé d'utiliser ces fonctions à la condition de ne se servir dans les résultats finaux que de la partie réelle du nombre complexe obtenu. Au cas d'incertitude cette partie réelle est désignée par le symbole Re qu'on place devant le nombre complexe:

$$\mathrm{Re}\,e^{i\varphi}=\cos\varphi.$$

Il est évident que

$$\mathrm{Re}\,e^{i\omega t}=\mathrm{Re}\,e^{-i\omega t}=\cos\omega t,$$

et, par conséquent, on est en droit d'utiliser les deux nombres complexes conjugués, au choix.

L'intégrale générale de l'équation de l'oscillateur linéaire

$$x=a\cos(\omega t-\delta)$$

s'écrit à cette condition sous la forme

$$x=\mathrm{Re}\,ae^{i(\omega t-\delta)}.$$

On arrive à une simplification encore plus grande en introduisant l'*amplitude complexe*. Notons que $ae^{i(\omega t-\delta)}=ae^{-i\delta}\cdot e^{i\omega t}$ et introduisons l'amplitude complexe $A=ae^{-i\delta}$. L'amplitude complexe conjuguée sera

$A^*=ae^{i\delta}$ tandis que le carré de l'amplitude réelle a s'obtiendra en faisant le produit

$$AA^*=ae^{-i\delta}\cdot ae^{i\delta}=a^2=|A|^2.$$

En utilisant les amplitudes complexes la formule des oscillations harmoniques peut toujours s'écrire sous la forme

$$x=\mathrm{Re}\, Ae^{i\omega t}$$

ou simplement

$$x=Ae^{i\omega t},$$

en se souvenant que la phase initiale δ est incluse dans l'amplitude complexe.

Le procédé mentionné dans ce paragraphe de représentation des oscillations par des nombres complexes conduit à des résultats corrects tant qu'on a affaire à des expressions linéaires. Mais si la quantité variant périodiquement est un carré ou une puissance plus élevée, ou si l'on a affaire à des produits de ces quantités, il est nécessaire de revenir aux fonctions trigonométriques. Cela résulte du fait que la partie réelle du carré d'un nombre complexe n'est pas égale au carré de sa partie réelle :

$$(a+bi)^2=(a+bi)(a+bi)=(a^2-b^2)+i2ab,$$

de sorte que

$$\mathrm{Re}\,(a+bi)^2\neq a^2.$$

De même la partie réelle du produit des nombres complexes n'est pas égale au produit de leurs parties réelles. Si, toutefois, il est souhaitable dans ce cas également d'utiliser les fonctions exponentielles, il est nécessaire de remplacer les cosinus par la demi-somme des fonctions complexes conjuguées suivant la formule connue d'Euler

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}).$$

§ 48. Décomposition spectrale

Les oscillations de l'oscillateur linéaire harmonique constituent le cas le plus simple du processus périodique. Fort souvent on se trouve en présence de processus périodiques qui ne sont pas harmoniques. Ainsi, par exemple, le processus consistant en des répétitions infinies à gauche et à droite de la courbe continue de la figure 104 représente sans aucun doute un mouvement périodique, mais qui n'est pas harmonique. Toutefois, on a montré sur la figure 104 que la courbe continue peut être obtenue par la sommation de deux sinusoïdes de pulsations ω et 2ω, à savoir

$$x=a\sin\omega t+\frac{a}{2}\sin 2\omega t.$$

On peut de même dire que les oscillations représentées sur la figure 104 se décomposent en un *spectre* présentant deux raies spectrales de pulsations ω et 2ω (ou ν et 2ν si l'on préfère utiliser les fréquences au lieu de pulsations).

Dans l'analyse mathématique on démontre que *toute* courbe*) représentant un processus périodique de pulsation ω peut être considérée comme le résultat de superposition d'un nombre infini de sinusoïdes de pulsations $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$ Cette décomposition de processus périodiques mais non harmoniques en des processus purement harmoniques constitue le développement connu en série de Fourier. Les conditions de convergence de ces séries sont étudiées dans des cours de mathématiques**). On ne fera que remarquer ici que pour les fonctions étudiées dans ce livre les séries de Fourier convergent partout uniformément et, par suite, elles peuvent être multipliées, différentiées et intégrées terme à terme. Pour fixer les idées supposons que la fonction étudiée est une élongation $x(t)$. Alors

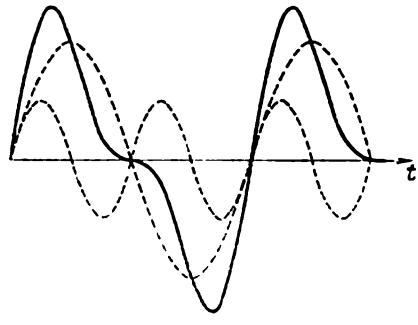


Fig. 104. Exemple d'un processus périodique non harmonique

$$x(t)=1/2\, b_0+b_1\cos\omega_0 t+b_2\cos 2\omega_0 t+\ldots$$
$$\ldots+c_1\sin\omega_0 t+c_2\sin 2\omega_0 t+\ldots \qquad (48.1)$$

Le coefficient 1/2 dans le premier terme est introduit pour des raisons de commodité et de symétrie des formules, comme il découlera de l'exposé ultérieur.

Rappelons un procédé simple de calcul des coefficients de la série de Fourier. Il se base sur les formules suivantes qu'il est facile de vérifier par un calcul direct :

$$\int_{-T/2}^{+T/2}\cos m\omega_0 t\cdot\cos n\omega_0 t\,dt=\begin{cases}0 & \text{pour } m\neq n,\\ 1/2\ T & \text{pour } m=n;\end{cases} \qquad (48.2)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2}\sin m\omega_0 t\cdot\sin n\omega_0 t\,dt=\begin{cases}0 & \text{pour } m\neq n,\\ 1/2\ T & \text{pour } m=n;\end{cases} \qquad (48.3)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2}\sin m\omega_0 t\cdot\cos n\omega_0 t\,dt=0. \qquad (48.4)$$

*) Les conditions que doit remplir une fonction représentant un phénomène périodique pour pouvoir être développée en série de Fourier sont si étendues que pratiquement elles sont remplies par toute fonction représentant un phénomène physique réel.

**) Voir I. Privalov, *Séries de Fourier*, Gosizdat, 1930 (en russe) ou un cours d'analyse mathématique, par exemple, celui de V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, t. II, Editions Mir, Moscou, 1970 (traduit du russe).

Pour trouver le coefficient b_m multiplions les deux membres de (48.1) par $\cos m\omega_0 t$ et intégrons dans l'intervalle de $-T/2$ à $+T/2$. Dans ce cas, sur la base des formules (48.2) et (48.4) toutes les intégrales du second membre seront nulles à l'exception de l'intégrale multipliée par le coefficient b_m qui est égal à $T/2$. On obtient ainsi

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos m\omega_0 t \, dt. \tag{48.5}$$

De même pour trouver le coefficient c_m multiplions les deux membres de (48.1) par $\sin m\omega_0 t$ et intégrons de $-T/2$ à $+T/2$. Il en résulte

$$c_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin m\omega_0 t \, dt. \tag{48.6}$$

Enfin, pour trouver b_0 intégrons (48.1) de $-T/2$ à $+T/2$ et on obtient

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \, dt.$$

Il est évident que le terme constant du développement

$$\frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \, dt$$

est la valeur moyenne de la fonction $x(t)$ durant la période et si la courbe $x(t)$ est symétrique par rapport à l'axe t (comme, par exemple, la courbe de la figure 104), alors $\frac{1}{2} b_0 = 0$.

Signalons ici encore deux autres formes de la série de Fourier. En groupant deux à deux les termes avec des sinus et des cosinus $b_k \cos k\omega_0 t + c_k \sin k\omega_0 t$ en des termes de la forme $a_k \cos(k\omega_0 t + \delta_k)$ (voir § 46) et en désignant le terme constant par $1/2\, a_0$ on obtient

$$x(t) = 1/2\, a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t + \delta_1) + a_2 \cos(2\omega_0 t + \delta_2) + \\ + a_3 \cos(3\omega_0 t + \delta_3) + \ldots \tag{48.7}$$

Il est particulièrement commode pour le but poursuivi d'opérer avec la forme complexe de la série de Fourier. Remplaçons dans (48.7) les cosinus par les demi-sommes des fonctions exponentielles complexes conjuguées

$$\cos(s\omega_0 t + \delta_s) = 1/2\, [e^{i(s\omega_0 t + \delta_s)} + e^{-i(s\omega_0 t + \delta_s)}] = 1/2\, (e^{is\omega_0 t} \cdot e^{i\delta_s} + e^{-is\omega_0 t} \cdot e^{-i\delta_s})$$

et introduisons les amplitudes complexes en les désignant respectivement par A_1 et A_{-1}, A_2 et A_{-2}, etc. :

$$\left.\begin{array}{l} A_1=1/2\ a_1e^{i\delta_1}, \quad A_{-1}=1/2\ a_1e^{-i\delta_1}, \\ A_2=1/2\ a_2e^{i\delta_2}, \quad A_{-2}=1/2\ a_2e^{-i\delta_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_s=1/2\ a_se^{i\delta_s}, \quad A_{-s}=1/2\ a_se^{-i\delta_s}, \\ A_0=1/2\ a_0. \end{array}\right\} \tag{48.8}$$

Alors la série (48.7) prend la forme

$$x(t)=A_0+A_1e^{i\omega_0t}+A_2e^{i2\omega_0t}+\ldots$$

$$\ldots+A_{-1}e^{-i\omega_0t}+A_{-2}e^{-i2\omega_0t}+\ldots=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}A_se^{is\omega_0t} \tag{48.9}$$

ou si l'on substitue aux pulsations les fréquences en utilisant la relation $\omega_0=2\pi\nu_0$:

$$x(t)=A_0+A_1e^{i2\pi\nu_0t}+A_2e^{i4\pi\nu_0t}+\ldots$$

$$\ldots+A_{-1}e^{-i2\pi\nu_0t}+A_{-2}e^{-i4\pi\nu_0t}+\ldots=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}A_se^{i2\pi s\nu_0t}. \tag{48.10}$$

Pour déterminer les coefficients procédons de la façon suivante : multiplions les deux membres de (48.10) par $e^{-i2\pi r\nu_0t}$ et intégrons de $-T/2$ à $+T/2$:

$$\int_{-T/2}^{+T/2}x(t)\cdot e^{-i2\pi r\nu_0t}\,dt=\int_{-T/2}^{+T/2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}A_se^{i2\pi(s-r)\nu_0t}\,dt.$$

Il est facile de se convaincre que dans le second membre tous les termes s'annulent excepté le terme au numéro r. En effet,

a) pour $s\neq r$

$$\int_{-T/2}^{+T/2}A_se^{i2\pi(s-r)\nu_0t}\,dt=\frac{A_s}{i2\pi(s-r)\nu_0}\left(e^{i2\pi(s-r)\nu_0t}\right)\Big|_{-T/2}^{+T/2}=$$

$$=\frac{A_s}{i2\pi(s-r)\nu_0}\left[e^{i\pi(s-r)}-e^{-i\pi(s-r)}\right]=0,$$

b) pour $s=r$

$$\sum_{-T/2}^{+T/2}A_r\,dt=A_rT.$$

Il en découle que

$$A_r=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}x(t)e^{-i2\pi r\nu_0t}\,dt. \tag{48.11}$$

D'une façon analogue pour calculer le coefficient A_{-r} multiplions les deux membres de (48.10) par $e^{i2\pi r\nu_0 t}$ et intégrons de $-T/2$ à $+T/2$. On obtient ainsi

$$A_{-r}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)e^{i2\pi r\nu_0 t}\,dt. \tag{48.12}$$

Pour $r=0$ on a

$$A_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,dt. \tag{48.13}$$

Remarquons encore que si $x(t)$ est une fonction réelle, les coefficients de Fourier A_m et A_{-m} sont obligatoirement des nombres complexes conjugués :

$$A_m^*=A_{-m}$$

[voir les formules (48.10)] car c'est seulement dans ce cas que le second membre de (48.10) sera réel.

On voit donc que si la fonction $x(t)$ représente un processus périodique, elle peut toujours être décomposée en des composantes harmoniques. Dans le langage des physiciens cela signifie que le processus périodique peut être *décomposé en un spectre*. Ce spectre sera discontinu, c'est-à-dire il sera composé de raies isolées parfaitement minces et dont les fréquences constitueront une série arithmétique ν_0, $2\nu_0$, $3\nu_0$, ... Fort souvent on utilise la terminologie acoustique et on appelle ν_0 *fréquence fondamentale* et $2\nu_0$, $3\nu_0$, ... ses *harmoniques*.

Il est évident que les coefficients de Fourier représentent les amplitudes des harmoniques correspondants. Alors que l'amplitude peut être positive ou négative, l'*intensité* est une grandeur essentiellement positive; elle est mesurée par le carré de l'amplitude. Ainsi, les carrés des coefficients de Fourier constituent les intensités des composantes harmoniques du processus périodique ou, ce qui revient au même, les intensités des raies spectrales.

En conclusion, notons que le développement de Fourier peut également s'appliquer à un processus non périodique défini, toutefois, sur un *intervalle borné* (par exemple, sur un intervalle de temps borné t_0, t_1). Dans ce cas, on peut considérer la courbe représentative du processus comme une période de la fonction périodique. Or comme le développement de Fourier représente une fonction périodique, il ne donnera une image correcte du processus que dans les limites de l'intervalle considéré*).

*) Voir cependant § 72.

§ 49. Forces centrales. Energie cinétique en coordonnées polaires

Après avoir étudié les propriétés de l'oscillateur linéaire on passera à l'examen du modèle composé d'un électron gravitant autour d'un centre immobile. Ce mouvement est un cas particulier de mouvement dans un champ de forces centrales, c'est-à-dire de forces dont la direction passe constamment par un point et dont la grandeur n'est fonction que de la distance à ce point.

Dans la solution de tout problème mécanique une grande importance revient au choix approprié du référentiel. Habituellement, la solution est le plus facilement obtenue dans le référentiel qui tient compte de la symétrie du problème posé. C'est pourquoi, il est logique de s'attendre à ce que pour un mouvement dans un champ de forces centrales le référentiel le plus convenable sera celui des coordonnées polaires.

Dans l'étude du modèle planétaire de l'atome (§ 51) on appliquera les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique. En guise d'introduction on déduira l'expression de l'énergie en coordonnées polaires.

La position du point dans le plan est définie par deux coordonnées polaires r et φ liées aux coordonnées cartésiennes par les relations

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi. \tag{49.1}$$

L'énergie cinétique en coordonnées cartésiennes s'exprime sous la forme

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2). \tag{49.2}$$

Par ailleurs (49.1) entraîne

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}=\dot{r}\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}. \tag{49.3}$$

Portant ces expressions dans (49.2) on trouve après de simples calculs

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2). \tag{49.4}$$

C'est justement l'expression de l'énergie cinétique en coordonnées polaires dans le plan.

En combinant les formules (49.1) et (49.3) il est facile d'obtenir

$$x\dot{y}-y\dot{x}=r^2\dot{\varphi}. \tag{49.5}$$

Cette relation nous sera utile dans l'exposé ultérieur.

Les coordonnées polaires sphériques du point P de l'espace

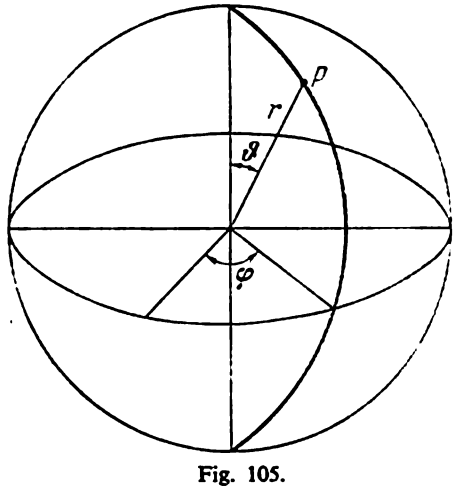


Fig. 105.

sont (fig. 105) : le rayon vecteur r, la distance polaire ϑ (complément de la latitude) et la longitude φ mesurée à partir d'un premier méridien quelconque. La relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires apparaît directement du dessin :

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z=r\cos\vartheta.$$

Il en vient

$$\dot{x}=\dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi+r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$\dot{y}=\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi+r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi+r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$\dot{z}=\dot{r}\cos\vartheta-r\dot{\vartheta}\sin\vartheta.$$

Portant ces équations dans l'expression de l'énergie cinétique en coordonnées cartésiennes spatiales

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2), \tag{49.6}$$

on trouve après simplifications

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\vartheta}^2+r^2\sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2) \tag{49.7}$$

qui est l'expression de l'énergie cinétique dans le système de coordonnées polaires sphériques.

§ 50. Mouvement dans un champ de forces centrales

Pour la description du mouvement dans le champ de forces centrales un grand rôle est accordé à la grandeur dynamique appelée moment cinétique. Prenons l'équation fondamentale de la dynamique sous sa forme vectorielle

$$\dot{\mathbf{p}}\equiv m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}$$

et multiplions-la *vectoriellement à gauche* par le rayon vecteur $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{50.1}$$

Remarquant que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=m(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{v})+m(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}})=m(\mathbf{v}\times\mathbf{v})+(\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}})=\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}$$

($\mathbf{v}\times\mathbf{v}=0$ comme le produit de vecteurs colinéaires!) on peut récrire (50.1) sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{50.2}$$

Le vecteur

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \tag{50.3}$$

s'appelle moment cinétique du point matériel par rapport au point O (fig. 106). Ses composantes sur les axes de coordonnées cartésiennes sont :

$$\left.\begin{aligned} L_x&=(yp_z-zp_y)=m(y\dot{z}-z\dot{y}),\\ L_y&=(zp_x-xp_z)=m(z\dot{x}-x\dot{z}),\\ L_z&=(xp_y-yp_x)=m(x\dot{y}-y\dot{x}). \end{aligned}\right\} \quad (50.4)$$

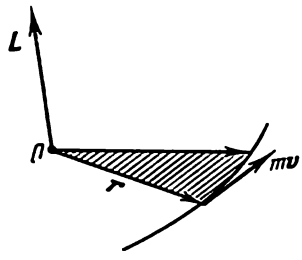


Fig. 106.

L'équation (50.2) prend maintenant la forme

$$\dot{\mathbf{L}}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \quad (50.5)$$

Si, toutefois, le mouvement s'effectue dans un champ de forces centrales, alors $\mathbf{r}$ et $\mathbf{F}$ sont dirigés dans le même sens ou dans le sens opposé de sorte que dans ce cas $\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0$ et l'équation (50.5) donne

$$\mathbf{L}=\text{const}, \quad (50.6)$$

autrement dit au cas d'un mouvement central le moment cinétique se conserve *comme vecteur*. Il en découle en particulier que la trajectoire de la particule au cours du mouvement central se trouve dans un même plan, car c'est seulement dans ce cas que le vecteur $\mathbf{L}$ conservera la même direction tout au long de son mouvement.

Si l'on prend pour plan de l'orbite le plan xy, il devient évident que le vecteur $\mathbf{L}$ est dirigé suivant l'axe z et alors

$$L_x=L_y=0, \quad L_z=L,$$

de sorte que

$$L=L_z=m(x\dot{y}-y\dot{x}). \quad (50.7)$$

Dans nombre de cas lors du mouvement déclenché par des forces centrales il est plus commode d'utiliser les coordonnées polaires. Etant donné que [voir (49.5)]

$$x\dot{y}-y\dot{x}=r^2\dot{\varphi},$$

on peut représenter l'expression du moment cinétique (50.7) sous la forme

$$L=mr^2\dot{\varphi}. \quad (50.8)$$

Le moment cinétique peut s'exprimer au moyen d'une grandeur cinématique $\mathbf{c}$ appelée vitesse aréolaire. Par définition,

$$\mathbf{c}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$$

et, par suite,

$$\mathbf{L}=2m\mathbf{c}.$$

De la loi de conservation du moment cinétique découle immédiatement la seconde loi de Kepler. En effet, si $\mathbf{L}=\text{const}$, il est évident que $\mathbf{c}=\text{const}$ et c'est justement la deuxième loi de Kepler.

§ 51. Le problème de Kepler

Etudions le mouvement de l'électron gravitant autour du noyau de charge $+Ze$ et de masse si grande par rapport à celle de l'électron que ce noyau peut être pris pour un centre immobile. Etant donné que les expériences de Rutherford sur la diffusion des particules α ont montré que jusqu'à la distance de l'ordre de 10^{-12} cm agit la loi de Coulomb, la force d'interaction entre le noyau et l'électron sera Ze^2/r^2 et l'énergie potentielle sera

$$U=-\frac{Ze^2}{r}. \tag{51.1}$$

Il est évident que dans ces conditions le problème devient identique à celui du mouvement des planètes autour du Soleil et c'est pourquoi on l'appelle problème de Kepler. Pour résoudre ce problème on utilisera les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique. En coordonnées polaires [voir formules (49.4) et (50.8)] ces lois donnent

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{Ze^2}{r}=E, \tag{51.2}$$

$$mr^2\dot{\varphi}=P, \tag{51.3}$$

où E et P sont des constantes; de (51.3) on a

$$\dot{\varphi}=\frac{P}{mr^2}. \tag{51.4}$$

Puis on passera des dérivées par rapport au temps aux dérivées en l'angle φ et dans ce but on utilisera la relation

$$\dot{r}=\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{P}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{51.5}$$

Portant (51.4) et (51.5) dans (51.2) on trouve

$$\frac{m}{2}\left[\frac{P^2}{m^2r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{P^2}{m^2r^2}\right]=E+\frac{Ze^2}{r}$$

ou après quelques transformations

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{2mE}{P^2}+\frac{2mZe^2}{P^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}. \tag{51.6}$$

Introduisons une nouvelle variable posant $\varrho=\frac{1}{r}$. Comme $\frac{d\varrho}{d\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$, (51.6) prend la forme

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2=\frac{2mE}{P^2}+\frac{2mZe^2}{P^2}\varrho-\varrho^2. \tag{51.7}$$

Pour intégrer l'équation (51.7) il est commode de la différentier encore une fois :

$$2\frac{d\varrho}{d\varphi}\cdot\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}=\frac{2mZe^2}{P^2}\frac{d\varrho}{d\varphi}-2\varrho\frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

On récrira cette équation sous la forme

$$\frac{d\varrho}{d\varphi}\left(\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}+\varrho-\frac{mZe^2}{P^2}\right)=0.$$

Etant donné que $d\varrho/d\varphi$ est *en général* $\neq 0$, la parenthèse doit s'annuler*). On obtient ainsi pour ϱ l'équation différentielle inhomogène linéaire du second ordre :

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}+\varrho=\frac{mZe^2}{P^2}. \tag{51.8}$$

Son intégrale générale est, comme on le sait, égale à la somme de la solution particulière de l'équation inhomogène et de l'intégrale générale de l'équation homogène correspondante. On voit immédiatement que la solution particulière de l'équation inhomogène est

$$\varrho_1=\frac{mZe^2}{P^2};$$

quant à l'intégrale générale de l'équation homogène

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}+\tau=0$$

elle est

$$\varrho_2=A\cos\varphi+B\sin\varphi,$$

où A et B sont des constantes arbitraires définies d'après les conditions initiales. Ainsi,

$$\varrho=\frac{mZe^2}{P^2}+A\cos\varphi+B\sin\varphi. \tag{51.9}$$

Si l'on convient de compter l'angle φ à partir de la position du rayon vecteur pour laquelle r possède une valeur minimale $r=r_{\min}$ et, par suite, $\varrho=1/r=\varrho_{\max}$, on obtient

$$\text{pour } \varphi=0 \quad \frac{d\varrho}{d\varphi}=0 \tag{51.10}$$

---

*) Comme on le verra ultérieurement [voir la formule (51.14) et le texte qui suit] $d\varrho/d\varphi$ ne s'annule, en somme, qu'en deux points de la trajectoire, correspondant (pour $E<0$) à l'aphélie et au périhélie de l'orbite. Quant à l'équation $d\varrho/d\varphi=0$, elle donnerait la solution $\varrho=\text{const}$ pour toutes valeurs de φ. Ce n'est évidemment le cas que pour une orbite circulaire. Il est, toutefois, facile de s'assurer qu'au cas d'une orbite circulaire (c'est-à-dire pour $\varrho=\text{const}$ en tout point de l'orbite) on obtient pour ϱ l'expression

$$\varrho=\frac{mZe^2}{P^2}.$$

D'ailleurs, comme il découle de l'exposé, c'est une solution particulière ϱ_1 d'une équation non homogène, obtenue en égalant à zéro l'expression de la parenthèse. Ainsi donc, la condition $d\varrho/d\varphi=0$ ne fournit pas de nouvelle solution autre que les solutions de l'équation (51.8).

et comme d'après (51.9)

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -A \sin \varphi + B \cos \varphi,$$

la condition (51.10) donne $B=0$. La solution (51.9) prend dans ce cas la forme

$$\varrho = \frac{mZe^2}{P^2} + A \cos \varphi. \tag{51.11}$$

C'est justement l'équation de l'orbite de l'électron. En confrontant cette équation avec celle des sections coniques en coordonnées polaires par rapport au foyer :

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \varphi}, \tag{51.12}$$

où a est le demi grand axe et ε l'excentricité. On en tire pour $\varrho = 1/r$ l'expression

$$\varrho = \frac{1+\varepsilon \cos \varphi}{a(1-\varepsilon^2)}. \tag{51.13}$$

Il est évident que (51.11) et (51.13) coïncident si on pose

$$\frac{mZe^2}{P^2} = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Cela signifie que la trajectoire de l'électron est une section conique (première loi de Kepler).

Pour établir la condition à laquelle cette section conique sera une ellipse, cherchons la condition du maximum et du minimum de ϱ. La condition nécessaire de l'extrémum de ϱ est

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0.$$

Posant dans (51.7) $d\varrho/d\varphi = 0$, on obtient une équation du second degré

$$\varrho^2 - 2\frac{mZe^2}{P^2}\varrho - \frac{2mE}{P^2} = 0. \tag{51.14}$$

Suivant les propriétés des racines de l'équation du second degré, de (51.14) on a

$$\varrho_{max} + \varrho_{min} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \quad \varrho_{max}\varrho_{min} = -\frac{2mE}{P^2}. \tag{51.15}$$

Si l'énergie E est négative ($E<0$), alors $\varrho_{max}\varrho_{min}>0$ et, par suite, il existe deux valeurs positives de ϱ (et par conséquent de r) pour lesquelles $d\varrho/d\varphi$ s'annule; de ces deux valeurs l'une correspond au maximum de ϱ (minimum de r, périhélie) et l'autre au minimum de ϱ (maximum de r, aphélie). Ainsi donc, pour $E<0$ l'orbite sera une *ellipse*.

Au contraire, pour $E>0$ on a $\varrho_{max}\varrho_{min}<0$. Cela signifie qu'on n'a plus deux valeurs *positives* de ϱ correspondant au maximum et au minimum de r,

mais que l'une d'elles est positive et l'autre négative. Les valeurs positives et négatives du rayon vecteur correspondent aux deux branches de l'*hyperbole*. Ainsi donc, pour $E>0$ l'orbite est une hyperbole.

Cherchons de même une relation utile liant l'énergie au demi grand axe. De (51.13), en tenant compte de ce que pour $\varphi=0$ $\varrho=\varrho_{max}$ et pour $\varphi=\pi$ $\varrho=\varrho_{min}$, on obtient

$$\varrho_{max}=\frac{1+\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}=\frac{1}{a(1-\varepsilon)},$$

$$\varrho_{min}=\frac{1-\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}=\frac{1}{a(1+\varepsilon)}.$$

Portant ces expressions dans le premier membre de (51.15) on a

$$\frac{2}{a(1-\varepsilon^2)}=\frac{2mZe^2}{P^2}, \tag{51.16}$$

$$\frac{1}{a^2(1-\varepsilon^2)}=-\frac{2mE}{P^2}; \tag{51.17}$$

de (51.16) et de (51.17) il suit

$$E=-\frac{mZ^2e^4(1-\varepsilon^2)}{2P^2}. \tag{51.18}$$

Divisant (51.16) par (51.17) on trouve

$$E=-\frac{Ze^2}{2a}. \tag{51.19}$$

La relation (51.19) montre que l'énergie de l'électron pour la charge considérée dépend uniquement du demi grand axe de l'orbite et est indépendante de l'excentricité : à toutes les orbites de même demi grand axe correspond une même énergie.

Introduisons enfin en s'aidant des relations établies la troisième loi de Kepler. Si la vitesse aréolaire de l'électron est égale à c, alors au cours de la révolution complète T le rayon vecteur balayera une aire

$$S=cT.$$

Par ailleurs, la vitesse aréolaire peut être exprimée en fonction du moment cinétique $c=L/2m$ (voir § 50). Alors en posant $L=P$ on a

$$S=\frac{1}{2}\frac{P}{m}T. \tag{51.20}$$

D'autre part, l'aire S de l'ellipse de demi-axes a et b se définit par

$$S=\pi ab=\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}, \tag{51.21}$$

car $b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Comparant (51.20) et (51.21) on obtient

$$PT=2\pi ma^2\sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{51.22}$$

La relation (51.16) permet de définir P^2 :

$$P^2=mZe^2a(1-\varepsilon^2). \tag{51.23}$$

En élevant au carré (51.22) et en portant (51.23) on obtient après des simplifications évidentes et des légères transformations

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{Ze^2}{4\pi^2m}, \tag{51.24}$$

ou, puisque $1/T$ est égal aux nombres de révolutions ν par unité de temps,

$$a^3\nu^2=\frac{Ze^2}{4\pi^2m}. \tag{51.25}$$

Puisque le second membre de (51.24) renferme une grandeur constante pour la charge considérée Ze du noyau, on a

$$\frac{a^3}{T^2}=\text{const.}$$

C'est justement la troisième loi de Kepler.

§ 52. Particule α dans le champ du noyau

Etudions maintenant le mouvement de la particule α dans le champ d'un noyau immobile au cas où la force *de répulsion* obéit à la loi de Coulomb. Supposons toujours que la charge du noyau est égale à $+Ze$; la charge de la particule α est, comme on le sait, égale à $+2e$ et l'énergie potentielle sera par suite

$$U=\frac{2Ze^2}{r}. \tag{52.1}$$

Les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique donnent

$$\frac{M}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)+\frac{2Ze^2}{r}=E, \tag{52.2}$$

$$Mr^2\dot\varphi=P, \tag{52.3}$$

où M est la masse de la particule α. La marche à suivre dans la résolution du problème correspond exactement à celle utilisée dans le paragraphe précédent, les équations initiales étant identiques dans les deux cas au signe de l'énergie potentielle près [voir formules (51.1) à (51.3)]. C'est pourquoi, on s'abstiendra de répéter les détails des calculs et on écrira aussitôt le résultat auquel conduisent les équations (52.2) et (52.3) après transformations et introduction d'une nouvelle variable $\varrho=\frac{1}{r}$:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2=\frac{2ME}{P^2}-2\frac{2MZe^2}{P^2}\varrho-\varrho^2.$$

Dérivant cette équation encore une fois on obtient après diverses simplifications et permutations

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}+\varrho=C, \tag{52.4}$$

où

$$C=-\frac{2MZe^2}{P^2}. \tag{52.5}$$

La solution générale de l'équation (52.4) est

$$\varrho=C+A\cos\varphi+B\sin\varphi. \tag{52.6}$$

Utilisons maintenant les conditions initiales. Il est évident (fig. 107) que pour $\varphi=\pi$ on a $r=\infty$ et, par suite, $\varrho=0$. Ceci donne après remplacement dans (52.6)

$$A=C. \tag{52.7}$$

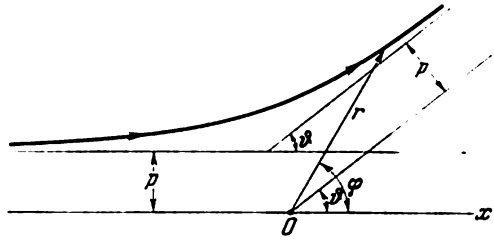


Fig. 107. Trajectoire de la particule α dans le champ du noyau se trouvant au point O

La seconde condition sera obtenue de la façon suivante. L'ordonnée d'un point quelconque de la trajectoire est liée à r et à φ par une relation évidente $y=r\sin\varphi$ ou

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{r\sin\varphi}=\frac{\varrho}{\sin\varphi}.$$

Profitant de (52.6) et de (52.7) on trouve

$$\frac{1}{y}=\frac{C(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi}+B.$$

Pour $\varphi=\pi$ l'ordonnée y est égale au « paramètre du choc » p et le premier terme du second membre s'annule. On obtient ainsi $B=1/p$ et la solution de (52.6) sera en définitive

$$\varrho=C(1+\cos\varphi)+\frac{1}{p}\sin\varphi. \tag{52.8}$$

La déviation de la particule α est évidemment égale à l'angle ϑ des asymptotes de l'hyperbole et pour la direction prise après la déviation $\varrho=0$. Ainsi donc, de (52.8) on obtient

$$-\frac{1}{Cp}=\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} \tag{52.9}$$

ou, en tenant compte de la valeur de C tirée de (52.5),

$$\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}=\frac{P^2}{2MZe^2p}. \tag{52.10}$$

Enfin, le moment cinétique P peut être exprimé en fonction du paramètre du choc p et de la vitesse v :

$$P=Mpv.$$

Portant cette expression dans (52.10) on a

$$\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}=\frac{Mv^2p}{2Ze^2}. \tag{52.11}$$

C'est justement la formule pour l'angle de déviation de la particule α qui a été déjà utilisée au § 26.

§ 53. Masse réduite

On a vu plus haut (§ 45) que dans un système de deux particules soumises uniquement à l'action des forces d'interaction les deux particules se déplacent par rapport à leur centre de masse. Montrons maintenant que l'étude du mouvement d'un tel système de deux particules équivaut à celle du mouvement d'une particule fictive se trouvant à la distance du centre immobile égale à la distance entre les particules et possédant une masse

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

De l'équation du mouvement des deux particules il découle

$$\ddot{\mathbf{r}}_1=\frac{1}{m_1}\mathbf{F}_{12}, \tag{53.1}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2=\frac{1}{m_2}\mathbf{F}_{21}. \tag{53.2}$$

Retranchons (53.2) de (53.1)

$$\ddot{\mathbf{r}}_1-\ddot{\mathbf{r}}_2=\frac{1}{m_1}\mathbf{F}_{12}-\frac{1}{m_2}\mathbf{F}_{21}.$$

Mais comme d'après le principe de l'action et de la réaction

$$\mathbf{F}_{21}=-\mathbf{F}_{12},$$

alors

$$\ddot{\mathbf{r}}_1-\ddot{\mathbf{r}}_2=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{12}.$$

Posant

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{\mu} \tag{53.3}$$

et tenant compte de ce que la différence entre les vecteurs $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (voir fig. 100) est le vecteur $\mathbf{r}$ dirigé de m_2 vers m_1 on obtient

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu}\mathbf{F}_{12},$$

ou

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}, \tag{53.4}$$

avec d'après (53.3)

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{53.5}$$

On voit que le problème du mouvement d'un système de deux particules est équivalent au problème du mouvement d'une particule se trouvant à la distance $\mathbf{r}$ du centre immobile et possédant une masse qui s'exprime en fonction des masses des deux particules par la formule (53.5). La masse μ est appelée *masse réduite*.

Il est maintenant clair que les résultats obtenus jusque-là en étudiant, par exemple, le mouvement de l'électron de masse m relativement au noyau de masse M et en supposant ce dernier immobile ne sont pas exacts, car il fallait considérer le mouvement de l'électron et du noyau relativement à leur centre de masse commun. Toutefois, d'après l'équation (53.4) les résultats seront suffisamment exacts si par rapport au noyau l'on étudie le mouvement d'une particule fictive de masse égale à la masse réduite μ du noyau et de l'électron.

Apprécions l'erreur commise en négligeant le mouvement propre du noyau. La masse réduite du noyau M et de l'électron m s'exprimera ainsi :

$$\mu = \frac{Mm}{M+m} = \frac{m}{1+\dfrac{m}{M}}.$$

Comme $M/m = 1836{,}1$, dans les formules où entre la masse de l'électron il faut au lieu de m porter μ en introduisant ainsi le facteur de correction

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1836{,}1}}.$$

Comme on le verra ultérieurement (§ 107), dans les problèmes de spectroscopie où la précision des mesures est très élevée ce facteur de correction, malgré sa très faible valeur, apporte dans les résultats des calculs des corrections se trouvant au-delà des limites de l'incertitude de l'expérience.

Notons en conclusion que si on tient compte du mouvement du noyau l'expression de la troisième loi de Kepler

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m} \tag{51.24}$$

doit être corrigée en remplaçant la masse de l'électron m par la masse réduite μ :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

§ 54. Coordonnées généralisées. Etat du système

Jusque-là on avait affaire à deux systèmes de coordonnées : les coordonnées cartésiennes et polaires. Cependant, en mécanique on utilise efficacement les coordonnées dites *généralisées* par lesquelles on entend des paramètres arbitraires définissant complètement la configuration du système. Ainsi, par exemple, un système de deux particules en interaction peut être caractérisé par trois coordonnées cartésiennes de leur centre de masse commun, par la distance entre les particules et deux angles définissant la position de la droite joignant les particules.

Les coordonnées généralisées choisies sont habituellement désignées par la même lettre q affectée d'indices différents $q_1, q_2, q_3, \ldots$ L'avantage de ce procédé consiste entre autres en ce que le nombre de coordonnées généralisées est parfois inférieur au nombre total des coordonnées cartésiennes ou polaires. Par exemple, si l'on a un système de deux masses ponctuelles se trouvant à la distance invariable d l'une de l'autre, alors entre les six coordonnées cartésiennes de ces particules il existe une relation (condition de liaison)

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=d^2,$$

qui permet de déterminer l'une des coordonnées en fonction des cinq autres. Ainsi donc, dans ce cas la configuration du système est complètement définie par cinq paramètres *indépendants* et c'est pourquoi il suffit de posséder cinq coordonnées généralisées. En général, si un système de n particules est soumis à k conditions de liaison *entre les coordonnées* des particules, alors des $3n$ coordonnées le nombre de coordonnées indépendantes sera donné par la formule

$$f=3n-k;$$

les k coordonnées restantes seront déterminées d'après les conditions de liaison. Ce nombre f de paramètres indépendants nécessaire à la détermination complète de la configuration instantanée du système est appelé *nombre de degrés de liberté*. Si l'on a toutes les coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_f$ ainsi que toutes les vitesses généralisées, c'est-à-dire les dérivées des coordonnées généralisées par rapport au temps $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$, on peut dire que l'état du système est complètement défini. En mécanique classique, l'*état instantané du système* se définit donc par $2f$ paramètres indépendants.

§ 55. Fonction de Lagrange. Équations de Lagrange

Puisqu'on a introduit des coordonnées généralisées, il est logique de rechercher l'équation du mouvement pour tout système de coordonnées. Cette propriété est caractéristique des équations découvertes par Lagrange et appelées équations du mouvement de Lagrange; souvent on leur donne également le nom d'équations de Lagrange de seconde espèce. Abordons donc maintenant leur étude.

Soit une particule libre. Sa position est généralement caractérisée par trois coordonnées. Il peut s'agir des coordonnées cartésiennes x, y, z, de même que de toutes autres coordonnées q_1, q_2, q_3. Supposons qu'on connaît les formules exprimant x, y, z en fonction de q_1, q_2, q_3 :

$$x=x(q_1, q_2, q_3), \quad y=y(q_1, q_2, q_3), \quad z=z(q_1, q_2, q_3) \tag{55.1}$$

(cf., par exemple, les formules du § 49 permettant de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires). Ecrivons l'équation du mouvement en coordonnées cartésiennes

$$m\ddot{x}=X, \quad m\ddot{y}=Y, \quad m\ddot{z}=Z.$$

Multiplions maintenant la première de ces équations par $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, la seconde par $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, la troisième par $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ et additionnons-les :

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}. \tag{55.2}$$

Pour abréger, le second membre de l'équation obtenue sera désigné par Q_1 :

$$X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}=Q_1. \tag{55.3}$$

Remarquant que, par exemple,

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)-\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right), \quad \text{etc.},$$

on peut récrire l'équation (55.2) sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]-$$

$$-m\left[\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]=Q_1. \tag{55.4}$$

Dérivant les formules (55.1) on obtient l'expression des dérivées totales de x, y, z par rapport au temps en considérant x, y, z comme des fonctions composées du temps. Par exemple,

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3. \tag{55.5}$$

On en tire immédiatement

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial x}{\partial q_1}.$$

De façon analogue on a

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial z}{\partial q_1}. \tag{55.6}$$

Puis comme les résultats des dérivations ne dépendent pas de l'ordre dans lequel s'effectuent deux dérivations successives on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}. \tag{55.7}$$

Ayant en vue les relations (55.6) et (55.7), on peut récrire l'équation (55.4) sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right)\right]-m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right)=Q_1. \tag{55.8}$$

Rappelons maintenant que l'énergie cinétique T de la particule s'exprime en fonction des composantes des vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ de la façon suivante :

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

On a donc

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right).$$

L'équation (55.8) prend maintenant la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1. \tag{55.9}$$

Si la force déclenchant le mouvement possède un potentiel $U(x, y, z)$, de façon que

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=-\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=-\frac{\partial U}{\partial z},$$

alors l'expression (55.3) pour Q_1 peut être écrite ainsi :

$$Q_1=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=-\frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Maintenant l'équation (55.9) prend la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial U}{\partial q_1}. \tag{55.10}$$

Introduisons enfin une nouvelle fonction L égale à la différence des énergies cinétique et potentielle (ne pas confondre avec l'énergie totale qui est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle!) :

$$L=T-U. \tag{55.11}$$

Cette fonction s'appelle *fonction de Lagrange* ou *potentiel cinétique*. Comme

l'énergie potentielle ne dépend pas des vitesses $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$, alors $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$ et l'équation (55.10) prend la forme simple

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0. \tag{55.12}$$

C'est justement la première des équations de Lagrange. Les deux autres s'obtiennent au moyen des transformations analogues :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_3}=0. \tag{55.12'}$$

L'avantage des équations de Lagrange par rapport à celles de Newton apparaît le plus explicitement dans le cas où le mouvement des particules est soumis à des liaisons. Dans ce cas, le nombre de paramètres *indépendants* caractérisant la configuration du système sera non pas $3n$ mais un nombre inférieur et sera défini par le nombre de degrés de liberté du système (voir § 54) : $q_1, q_2, \ldots, q_f, f=3n-k$. On aura autant d'équations de Lagrange. Si, par exemple, il s'agit du mouvement d'une particule sur une surface donnée (une seule équation de liaison), alors il suffit de deux équations de Lagrange; pour définir le mouvement de la particule sur une courbe donnée il est suffisant d'avoir une seule équation de Lagrange.

§ 56. Application des équations de Lagrange au problème du mouvement dans un champ de forces centrales

En qualité d'exemple d'application des équations de Lagrange examinons de nouveau le problème du mouvement de l'électron dans le champ du noyau chargé positivement. La symétrie du problème suggère que les coordonnées les plus commodes sont dans ce cas les coordonnées polaires r et φ liées aux coordonnées cartésiennes par les relations

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi.$$

Les équations de Lagrange seront ($q_1=r$, $q_2=\varphi$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0. \tag{56.1}$$

Pour établir la fonction de Lagrange correspondant à ce cas rappelons que les expressions des énergies cinétique et potentielle en coordonnées polaires*) sont :

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2); \qquad U=-\frac{Ze^2}{r}.$$

*) Si l'on veut tenir compte du mouvement propre du noyau, il faut introduire dans la formule de l'énergie cinétique au lieu de la masse de l'électron la masse réduite de l'électron et du noyau (§ 53).

La fonction de Lagrange sera par conséquent

$$L=T-U=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{Ze^2}{r}. \tag{56.2}$$

Ecrivons ses dérivées partielles

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\varphi}^2-\frac{Ze^2}{r^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi}=0;$$

en les portant dans (56.1) on a

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r})-mr\dot{\varphi}^2+\frac{Ze^2}{r^2}=0, \tag{56.3}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi})=0. \tag{56.4}$$

La seconde équation donne immédiatement

$$mr^2\dot{\varphi}=P, \tag{56.5}$$

où P est une constante d'intégration. Ce n'est rien d'autre que l'expression de la loi de conservation du moment cinétique. Quant à la première équation, elle peut être récrite sous la forme

$$m\ddot{r}=-\frac{Ze^2}{r^2}+mr\dot{\varphi}^2. \tag{56.6}$$

Cette équation décrit la composante du mouvement sur le rayon vecteur. Dans le second membre on a la force agissant sur l'électron le long du rayon vecteur. Son expression comprend deux termes : le premier représente la force de Coulomb, quant au second son apparition paraît à première vue inattendue. Toutefois, en y regardant de plus près, le terme $mr\dot{\varphi}^2$ est tout simplement la force centrifuge d'inertie.

On peut maintenant passer à l'intégration de l'équation (56.6). Pour cela portons-y l'expression de $\dot{\varphi}$ tirée de (56.5)

$$\dot{\varphi}=\frac{P}{mr^2}$$

et divisons les deux membres par m :

$$\ddot{r}=-\frac{Ze^2}{mr^2}+\frac{P^2}{m^2r^3}.$$

Cette équation peut être représentée sous la forme

$$\ddot{r}=\frac{d}{dr}\left(\frac{Ze^2}{mr}-\frac{P^2}{2m^2r^2}\right). \tag{56.7}$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $2\dot{r}$ on a

$$\frac{d}{dt}\dot{r}^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{2Ze^2}{mr}-\frac{P^2}{m^2r^2}\right),$$

d'où après intégration on a

$$\dot{r}^2 = c + \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2r^2}, \tag{56.8}$$

où c est une constante d'intégration. Dans cette équation on change $\dot{r}$ en

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi},$$

ce qui après quelques transformations donne

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + C,$$

où $C = cm^2/P^2$; ou, en introduisant une nouvelle variable $\varrho = 1/r$,

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2} \varrho - \varrho^2 + C. \tag{56.9}$$

Mais l'équation (56.9) coïncide évidemment avec (45.7) et peut être intégrée de la même façon. C'est pourquoi on omettra ici les calculs déjà réalisés au § 51 et conduisant en fin de compte à l'équation des sections coniques.

En conclusion on donnera une illustration qualitative fort utile de l'équation (56.6). Pour cela on lui donnera la forme de (56.7) et on la récrira de la façon suivante :

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2}\right). \tag{56.7'}$$

Cette équation correspond évidemment au mouvement unidimensionnel dans un champ de potentiel

$$U = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2}. \tag{56.10}$$

Le premier terme représente ici le potentiel de la force de Coulomb, le second un certain potentiel fictif défini par la présence de la force centrifuge d'inertie.

Traçons maintenant le diagramme de potentiel en portant r en abscisses et U en ordonnées. Ce diagramme doit avoir la forme de la courbe I représentée sur la figure 108.

En effet, pour des grandes valeurs de r, le second terme de (56.10) peut être négligé par rapport au premier et U est ainsi négatif. Au contraire, pour des r petits le second terme dépasse le premier et l'énergie potentielle devient positive. C'est pourquoi, pour une valeur donnée de r la courbe passe par un minimum puis monte brusquement vers le haut si r continue à diminuer.

Cette courbe montre de façon parlante pourquoi pour une énergie totale positive l'orbite est une hyperbole et pour une énergie totale négative, c'est une ellipse. Pour cela en guise d'illustration il est commode d'utiliser une bille lourde (voir p. 141). Il est évident que la bille abandonnée à la hauteur $E_1 > 0$ roulera dans le « creux » ABC et s'éloignera à l'infini. Au contraire, pour une énergie négative ($E_2 < 0$) la bille effectuera un mouvement de

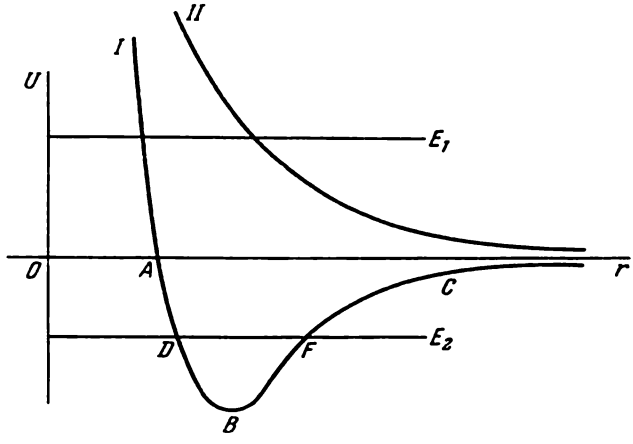


Fig. 108. Diagramme de potentiel pour la composante radiale du mouvement de Kepler : *I* — cas d'attraction; *II* — cas de répulsion

va-et-vient dans la dépression *DBF* et la particule dont la bille est l'image restera à une distance finie du centre d'attraction et accomplira relativement à ce centre un mouvement périodique.

Si au lieu d'une attraction on se trouve en présence d'une répulsion, alors le premier terme de (56.10) est positif et l'énergie potentielle est positive, quel que soit r. Le diagramme de potentiel a maintenant la forme de la courbe *II* sur la figure 108. Dans ce cas, quelle que soit la hauteur à laquelle on soulève la bille, celle-ci roulera à l'infini.

§ 57. Impulsions généralisées

Les équations de Lagrange conduisent toujours la résolution du problème à l'intégration des équations différentielles ordinaires du second ordre. Dans nombre de cas, toutefois, il est commode, au lieu d'utiliser les équations du second ordre, de se servir des équations du premier ordre mais en quantité double. Pour écrire ces équations on doit avant tout introduire une nouvelle notion, celle de l'*impulsion généralisée*. A chaque coordonnée généralisée on fera correspondre une impulsion généralisée qu'on définira formellement (dans l'esprit de la mécanique de Lagrange) comme une dérivée partielle de la fonction de Lagrange par rapport à la vitesse généralisée correspondante :

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{57.1}$$

Pour le cas de forces à potentiel U, fonction des coordonnées mais non des vitesses, $L=T-U(q_1, \ldots, q_k, \ldots)$ et

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{57.2}$$

Pour comprendre la signification physique de l'impulsion généralisée il est utile de calculer leurs expressions explicites en diverses coordonnées. Pour un point rapporté aux coordonnées cartésiennes

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

et, par suite,

$$p_x=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}, \quad p_y=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}, \quad p_z=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}, \tag{57.3}$$

c'est-à-dire dans ce cas les impulsions généralisées sont tout simplement les projections de la quantité du mouvement $m\mathbf{v}$ sur les axes de coordonnées cartésiennes.

Dans d'autres coordonnées les impulsions généralisées peuvent prendre un autre contenu ainsi qu'une dimension différente. Cherchons, par exemple, les impulsions correspondant aux coordonnées polaires r et φ. L'énergie cinétique en coordonnées polaires est

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2);$$

quant aux impulsions généralisées correspondantes, elles seront

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \tag{57.4}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}. \tag{57.5}$$

Comme on le voit, l'impulsion radiale p_r a la dimension de la quantité du mouvement, tandis que l'impulsion azimutale p_φ a la dimension du moment cinétique.

Profitant de la notion d'impulsion généralisée on peut donner aux équations de Lagrange une nouvelle forme. Ecrivons ces équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{dL}{dq_k}=0 \qquad (k=1,2,\ldots,f)$$

et en y remplaçant suivant la définition (57.1) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ par p_k on a

$$\frac{dp_k}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (k=1,2,\ldots,f). \tag{57.6}$$

En y joignant la définition de l'impulsion généralisée

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=1,2,\ldots,f), \tag{57.7}$$

on obtient un système de $2f$ équations du *premier ordre*.

§ 58. Equations canoniques de Hamilton

Les équations (57.6) et (57.7) obtenues à la fin du paragraphe précédent répondent au désir de remplacer les équations du second ordre par des équations du premier ordre. Toutefois, elles sont très dissymétriques. Dans la pratique on utilise souvent une autre forme d'équations du premier ordre, dites *équations canoniques de Hamilton* qui sont remarquablement simples et élégantes.

Etudions d'abord le cas le plus simple. Soit une particule mobile sur une droite. La trajectoire de cette particule peut être celle de l'axe x et dans ce cas la position de la particule est définie par une seule coordonnée $q=x$, quant à l'impulsion généralisée correspondante elle sera $p=m\dot{x}$ [voir (57.3)]. Introduisons maintenant une nouvelle fonction H qu'on définira comme la *somme des énergies cinétique et potentielle, l'énergie cinétique étant exprimée non pas en fonction de la vitesse mais en fonction de l'impulsion p :*

$$H=T+U=\frac{p^2}{2m}+U. \tag{58.1}$$

Cette fonction H peut être liée à la fonction de Lagrange L. Pour cela notons avant tout que l'énergie cinétique peut prendre la forme

$$T=\frac{p^2}{2m}=\frac{(m\dot{x})^2}{2m}=\frac{1}{2}p\dot{x}.$$

Il est facile maintenant de vérifier que

$$p\dot{x}-L=p\dot{x}-T+U=p\dot{x}-\frac{1}{2}p\dot{x}+U=\frac{1}{2}p\dot{x}+U=T+U=H. \tag{58.2}$$

Prenons la différentielle totale des deux membres de (58.2) :

$$dH=p\,d\dot{x}+\dot{x}\,dp-\frac{\partial L}{\partial x}dx-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x}. \tag{58.3}$$

Mais d'après (57.2) $\partial L/\partial\dot{x}=p$. Par suite, le premier terme du second membre de (58.3) se simplifie avec le quatrième et on obtient

$$dH=\dot{x}\,dp-\frac{\partial L}{\partial x}dx. \tag{58.4}$$

Ecrivons maintenant la différentielle totale de H en retenant que H est une fonction de x et de p (mais non de $\dot{x}$) :

$$dH=\frac{\partial H}{\partial p}dp+\frac{\partial H}{\partial x}dx.$$

Comparant cette expression avec (58.4) et se rappelant que d'après (57.6) $\partial L/\partial x=\dot{p}$ on trouve

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{q}=-\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{58.5}$$

Ces deux équations du premier ordre sont justement les *équations canoniques de Hamilton* pour le cas simple considéré. Il est facile de voir

que dans ce cas les équations canoniques (58.5) conduisent aux résultats bien connus. Puisque $H=p^2/2m+U$, il s'ensuit que $\partial H/\partial x=\partial U/\partial x$, $\partial H/\partial p=p/m$ et les équations (58.5) donnent

$$\dot{x}=\frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial x}.$$

La première de ces relations donne $p=m\dot{x}$, c'est-à-dire définit la quantité du mouvement, la seconde représente l'équation de Newton pour le mouvement d'une particule le long de l'axe x.

On va montrer maintenant que dans le cas général d'un système à f degrés de liberté, les équations canoniques prennent une forme identique à (58.5) à la seule différence que le nombre d'équations est plus grand. Supposons que la configuration du système est définie par f coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_f$. La fonction de Lagrange L dépend des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_f$ et en général du temps :

$$L=L(q_k, \dot{q}_k, t);$$

ici q_k désigne l'ensemble de toutes les coordonnées généralisées et $\dot{q}_k$ l'ensemble de toutes les vitesses généralisées. De la fonction de Lagrange on passe maintenant à la fonction de Hamilton H en profitant de la transformation (58.2) étendue à f degrés de liberté:

$$H=\sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k p_k-L. \tag{58.6}$$

Prenons la différentielle totale du premier et du second membre de (58.6) :

$$dH=\sum p_k\,d\dot{q}_k+\sum\dot{q}_k\,dp_k-\sum\frac{\partial L}{\partial q_k}\,dq_k-\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\,d\dot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial t}\,dt.$$

Comme d'après (57.7) $\partial L/\partial\dot{q}_k=p_k$, la première et la quatrième somme se simplifient si bien qu'on a

$$dH=\sum\dot{q}_k\,dp_k-\sum\frac{\partial L}{\partial q_k}\,dq_k-\frac{\partial L}{\partial t}\,dt. \tag{58.7}$$

D'autre part, la différentielle totale H qui représente les fonctions de q_k, de p_k (mais non de $\dot{q}_k$) et de t doit avoir la forme

$$dH=\sum\frac{\partial H}{\partial p_k}\,dp_k+\sum\frac{\partial H}{\partial q_k}\,dq_k+\frac{\partial H}{\partial t}\,dt.$$

Comparant avec (58.7) et tenant compte du fait que d'après (57.6) $\frac{\partial L}{\partial q_k}=\frac{dp_k}{dt}$, on a

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (k=1, 2, \ldots, f). \tag{58.8}$$

Ces équations différentielles du premier ordre constituent justement les équations canoniques pour des systèmes à f degrés de liberté. Leur nombre total est égal à $2f$, c'est-à-dire deux fois plus grand que le nombre d'équa-

tions du second ordre. La coordonnée généralisée q_k et l'impulsion généralisée p_k qui lui correspond sont dites *conjuguées canoniques.*

Pour un système à trois degrés de liberté (par exemple pour une particule dont le mouvement n'est pas limité par des liaisons) on aura en tout six équations canoniques. Comme on a affaire à six équations du premier ordre, les résultats finaux renfermeront encore six constantes arbitraires. Connaissant l'état initial du système (§ 54), c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de q_k et de p_k pour $t=0$ et intégrant les équations (58.8), on peut prévoir son état pour tout moment ultérieur. Ainsi les équations canoniques de Hamilton sont par leur forme l'expression la plus explicite du principe classique de causalité.

§ 59. Contenu physique de la fonction de Hamilton

Au début du paragraphe précédent on a défini la fonction de Hamilton pour le cas d'un mouvement unidimensionnel rapporté aux coordonnées cartésiennes comme une somme des énergies cinétique et potentielle exprimée en fonction des coordonnées et des impulsions. Puis on a montré que cette définition est identique à celle obtenue avec la fonction de Lagrange

$$H=\dot{x}p_x-L,$$

et cette dernière définition a été généralisée pour le cas de f coordonnées généralisées quelconques en supposant dans ce cas

$$H=\sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_k, \dot{q}_k, t). \tag{58.6}$$

Eclairons maintenant le contenu de la fonction de Hamilton dans ce cas plus général.

Il apparaît que dans les cas où la fonction de Lagrange de même que la fonction de Hamilton H *ne dépendent pas explicitement du temps*, H est, comme dans le cas le plus simple, une somme des énergies cinétique et potentielle. Démontrons tout d'abord que quand H ne dépend pas explicitement du temps, elle est égale à une constante :

$$H=H(q_k, p_k)=\text{const.}$$

Pour cela cherchons la dérivée totale de H par rapport au temps :

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial H}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial H}{\partial q_3}\dot{q}_3+\ldots+\frac{\partial H}{\partial p_1}\dot{p}_1+$$
$$+\frac{\partial H}{\partial p_2}\dot{p}_2+\frac{\partial H}{\partial p_3}\dot{p}_3+\ldots\equiv\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

En y portant $\dot{q}_k$ et $\dot{p}_k$ tirés de (58.8) on trouve

$$\frac{dH}{dt}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\equiv 0, \tag{59.1}$$

d'où

$$H=\text{const.} \tag{59.2}$$

Maintenant mettons en évidence le contenu physique de H. Par définition,

$$H=p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2+p_3\dot{q}_3+\ldots-L\equiv\sum_k p_k\dot{q}_k-L. \tag{59.3}$$

Pour un système conservatif

$$L=T-U, \tag{59.4}$$

et comme U ne dépend que des coordonnées, alors

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}. \tag{59.5}$$

On obtient ainsi

$$\sum_k p_k\dot{q}_k=\sum_k\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k \tag{59.6}$$

et, par suite,

$$H=\sum_k\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k-L. \tag{59.7}$$

Maintenant il faut prendre en considération que pour toutes coordonnées généralisées l'énergie cinétique est une fonction *homogène* des vitesses $\dot{q}_k$ de *dimension 2*. Pour les coordonnées cartésiennes et polaires on a pu s'en convaincre directement (voir §§ 41 et 49); on peut de même le démontrer pour le cas de coordonnées généralisées*). Suivant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, si $f(x, y, \ldots, u, v)$ est une fonction homogène de dimension n, alors

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots+u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}=nf. \tag{59.8}$$

Appliquant ce théorème à la somme (59.6) on a

$$\sum_k\dot{q}_k\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\equiv\dot{q}_1\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}+\dot{q}_2\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}+\dot{q}_3\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_3}+\ldots=2T. \tag{59.9}$$

et (59.7) donne

$$H=\sum_k\dot{q}_k\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}-L=2T-T+U=T+U. \tag{59.10}$$

Ainsi, pour des systèmes conservatifs H est tout simplement la somme des énergies cinétique et potentielle exprimée en fonction des coordonnées et des impulsions. Donnons quelques exemples de la fonction de Hamilton.

a) Particule dans un champ de potentiel U :

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+U(x, y, z).$$

*) Voir, par exemple, L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique*, Editions Mir, Moscou, 1969 (traduit du russe) et G. Goldstein, *Mécanique classique*, Gostekhizdat, 1957 (en russe).

D'après le § 55, $p_x=m\dot{x}$, $p_y=m\dot{y}$, $p_z=m\dot{z}$. Par conséquent,

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+U(x, y, z). \tag{59.11}$$

b) Oscillateur linéaire : $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U=\frac{1}{2}fx^2$,

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}fx^2. \tag{59.12}$$

c) Electron dans le champ de Coulomb : $T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$, $U=-\frac{Ze^2}{r}$:

$$p_r=m\dot{r}, \quad p_\varphi=mr^2\dot{\varphi},$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right)-\frac{Ze^2}{r}. \tag{59.13}$$

§ 60. Coordonnées cycliques

Dans le cas général la fonction de Hamilton H dépend de toutes les coordonnées et de toutes les impulsions généralisées. Toutefois, dans certains cas particuliers il peut arriver que l'une ou plusieurs coordonnées disparaissent de l'expression de H. Ces coordonnées sont dites *cycliques*. Prenons, par exemple, la fonction de Hamilton de l'électron se mouvant dans le champ coulombien du noyau :

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right)-\frac{Ze^2}{r}. \tag{59.13}$$

On voit que des deux coordonnées r et φ seul r est contenu dans l'expression de H; par conséquent, φ est une coordonnée cyclique.

En qualité de second exemple considérons la fonction de Hamilton pour un mouvement de la particule dans le champ de gravitation terrestre. L'énergie potentielle dépend dans ce cas seulement de la distance entre la particule et la Terre : $U=mgz$. Par suite [voir (59.11)],

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz. \tag{60.1}$$

On voit que dans l'expression de H n'entrent pas les coordonnées x et y; elles sont donc de même des coordonnées cycliques.

Si une coordonnée quelconque est cyclique, l'impulsion généralisée qui lui correspond doit être constante. Soit, par exemple, la coordonnée q_1 qui ne figure pas dans H :

$$H=H(q_2, q_3, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f).$$

Alors, des équations canoniques (58.8) il vient $\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=0$, d'où $p_1=\text{const}$. Ainsi donc, comme dans la fonction de Hamilton (59.13) n'entre pas la coordonnée q,

$$P_\varphi=mr^2\dot{\varphi}=\text{const}. \tag{60.2}$$

Dans la fonction H de Hamilton (60.1) ne figurent pas les coordonnées y et x, il en vient donc

$$p_x=m\dot{x}=\text{const}, \quad p_y=m\dot{y}=\text{const}. \tag{60.3}$$

Un cas particulièrement important est celui où toutes les coordonnées sont cycliques. Dans ce cas, comme on le montrera, toutes les impulsions sont constantes et toutes les coordonnées sont des fonctions linéaires du temps. L'exemple le plus simple de ce cas est celui d'un rotateur, c'est-à-dire d'une particule évoluant sur une circonférence autour d'un centre fixe. Comme il est connu, l'énergie cinétique d'une telle particule est égale à

$$T=\frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2, \tag{60.4}$$

où $A=mr^2$; son énergie potentielle est nulle. L'impulsion généralisée correspondant à φ sera

$$p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=A\dot{\varphi} \tag{60.5}$$

et, par suite,

$$T=\frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2=\frac{(A\dot{\varphi})^2}{2A}=\frac{p_\varphi^2}{2A}$$

et

$$H=T+U=\frac{p_\varphi^2}{2A}. \tag{60.6}$$

Comme l'unique coordonnée φ est cyclique, on a $p_\varphi=\text{const}$ et d'après les équations canoniques

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{\partial}{\partial p_\varphi}\left(\frac{p_\varphi^2}{2A}\right)=\frac{p_\varphi}{A}=\text{const}.$$

Notant const par ω, on obtient après intégration

$$\varphi=\omega t+\alpha,$$

où α est une constante d'intégration.

Si le système possède f degrés de liberté et toutes les coordonnées sont cycliques, alors $H=H(p_1, p_2, \ldots, p_f)$ et pour toute impulsion p_k on a

$$\frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}=0.$$

Les équations canoniques donnent alors

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\text{const}=\omega_1,$$

$$\frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\text{const}=\omega_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dq_f}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_f}=\text{const}=\omega_f,$$

d'où

$$q_1=\omega_1 t+\alpha_1, \quad q_2=\omega_2 t+\alpha_2, \quad \ldots, \quad q_f=\omega_f t+\alpha_f.$$

On voit en effet que dans le cas où toutes les coordonnées sont cycliques, toutes les impulsions sont constantes et les coordonnées sont des fonctions linéaires du temps.

§ 61. Crochets de Poisson. Lois de conservation

Soit une fonction quelconque des coordonnées, des impulsions et du temps : $F(q_k, p_k, t)$, où q_k et p_k sont les ensembles de toutes les coordonnées et de toutes les impulsions; cherchons la dérivée totale de F par rapport au temps

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt}+\ldots\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right).$$

Remplaçant dans le second membre les dérivées par rapport au temps des coordonnées et des impulsions par les dérivées du hamiltonien H des équations canoniques $\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}$, on obtient

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right).$$

Le deuxième terme du second membre constitue le crochet de Poisson et est désigné par (H, F) :

$$(H, F)=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right), \quad k=1, 2, \ldots, f. \tag{61.1}$$

Ainsi donc, la dérivée totale par rapport au temps de toute fonction $F(q_k, p_k, t)$ peut être écrite sous la forme

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+(H, F). \tag{61.2}$$

Si F est explicitement indépendant du temps, alors $\frac{\partial F}{\partial t}=0$ et

$$\frac{dF}{dt}=(H, F). \tag{61.3}$$

On peut donc dire que pour toute fonction des coordonnées et des impulsions $F(q_k, p_k)$ les crochets de Poisson fournissent l'expression de sa dérivée totale par rapport au temps. Utilisant cette remarque on présentera les équations canoniques

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

en se servant des crochets de Poisson sous une nouvelle forme.

D'après (61.3) on a

$$\frac{dq_k}{dt}=(H, q_k), \qquad \frac{dp_k}{dt}=(H, p_k). \tag{61.4}$$

Cherchons maintenant les crochets (H, q_k) et (H, p_k) :

$$(H, q_k)=\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial q_k}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial p_k}\right)=\frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

$$(H, p_k)=\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial p_k}{\partial p_k}\right)=-\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

On voit que les équations (61.4) coïncident effectivement avec les équations canoniques.

Si pour $F(q_k, p_k)$ le crochet de Poisson (H, F) est nul

$$(H, F)=0, \tag{61.4'}$$

alors

$$\frac{dF}{dt}=0, \qquad F(q_k, p_k)=\text{const}.$$

Ces relations peuvent être utilisées pour l'établissement des lois de conservation ou des intégrales premières des équations du mouvement sous lesquelles on entend les relations entre les coordonnées et leurs dérivées *premières* par rapport au temps qui conservent leur valeur tout au long du mouvement, quelles que soient les conditions initiales. Cherchons, par exemple, le crochet (H, H) :

$$(H, H)=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)=0,$$

d'où

$$H=\text{const},$$

où l'explicitant en coordonnées cartésiennes

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+U(x, y, z)=\text{const}. \tag{61.5}$$

Cette relation exprimant la loi de conservation de l'énergie est l'une des intégrales premières du mouvement, à savoir l'intégrale de l'énergie. Notons ici qu'en cherchant la dérivée $\frac{dH}{dt}$ au § 59 on s'est déjà servi d'un cas particulier du crochet de Poisson [voir (59.1)].

En guise de second exemple, examinons le mouvement d'une particule dans le champ de forces centrales. Cherchons les crochets de Poisson (H, L_z), où L_z est le moment cinétique par rapport à l'axe z :

$$L_z=xp_y-yp_x. \tag{61.6}$$

Selon (61.1) le crochet de Poisson cherché sera

$$(H, L_z)=\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial L_z}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial L_z}{\partial p_x}+\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial L_z}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial L_z}{\partial p_y}. \tag{61.7}$$

Tenant compte de (61.5) et de (61.6) on a

$$(H, L_z)=y\frac{\partial U}{\partial x}-x\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Pour calculer le second membre passons aux coordonnées polaires en utilisant les formules

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi.$$

Notant que

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial y}=x\frac{\partial U}{\partial y}-y\frac{\partial U}{\partial x},$$

il vient

$$(H, L_z)=-\frac{\partial U}{\partial\varphi}.$$

Or, dans le cas de forces centrales l'énergie potentielle est indépendante de φ et n'est fonction que de r, de sorte que

$$(H, L_z)=0 \quad \text{et} \quad L_z=\text{const}.$$

En guise d'exercice on propose de démontrer en utilisant les crochets de Poisson que $L_x=\text{const}$ et $L_y=\text{const}$. On obtient trois lois de conservation et plus précisément les lois de conservation des composantes du moment cinétique.

Les lois de conservation du moment cinétique total interviennent également dans le cas d'un *système* isolé de particules. On a alors

$$L_z=\sum_k (x_k p_{yk}-y_k p_{xk}),$$

$$H=\sum_k \frac{1}{2m_k}(p_{xk}^2+p_{yk}^2+p_{zk}^2)+U(x_k, y_k, z_k),$$

où la sommation s'étend à toutes les *particules*. Un calcul analogue à celui de (61.7) pour une particule donne

$$\frac{dL_z}{dt}=(H, L_z)=\sum_k\left(y_k\frac{\partial U}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U}{\partial y_k}\right).$$

En passant aux coordonnées polaires $x_k=r_k\cos\varphi_k$, $y_k=r_k\sin\varphi_k$ il vient

$$\frac{dL_z}{dt}=-\sum_k\frac{\partial U}{\partial\varphi_k}.$$

Mais comme pour un système isolé conservatif une rotation de tout le système d'un même angle ne modifie pas l'énergie potentielle, on a alors

$$\frac{dL_z}{dt}=0 \quad \text{et} \quad L_z=\text{const}.$$

En utilisant un procédé analogue on peut démontrer que pour un système

isolé de k particules les lois de conservation des composantes de la quantité de mouvement totale P_x, P_y, P_z s'appliquent également et ceci avec

$$P_x=\sum_k p_{xk}, \quad P_y=\sum_k p_{yk}, \quad P_z=\sum_k p_{zk}.$$

En effet,

$$\frac{dP_x}{dt}=(H, P_x)=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_{xk}}\frac{\partial P_x}{\partial x_k}-\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial P_x}{\partial p_{xk}}\right)=-\sum_k\frac{\partial H}{\partial x_k}=-\sum_k\frac{\partial U}{\partial x_k}$$

(la sommation s'étend à toutes les particules). Mais comme l'énergie du *système* de particules dépend seulement de leurs distances *réciproques* et ne se modifie pas si toutes les particules se déplacent d'une même distance sur l'axe x, on a $\sum_k\frac{\partial U}{\partial x_k}=0$ et $P_x=\text{const}$. De la même façon on démontre que

$$P_y=\text{const}, \quad P_z=\text{const}.$$

Si l'on y ajoute la loi de conservation de l'énergie (61.5), on aura alors sept lois de conservation ou intégrales premières des équations du mouvement.

Les crochets de Poisson peuvent être définis non seulement pour un couple de fonctions H et F, mais pour tout couple de fonctions des coordonnées et des impulsions f et g. Dans ce cas la définition est

$$(f, g)=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right). \tag{61.8}$$

Soient $f=p$ et $g=q$; alors on a évidemment

$$(p, q)=\frac{\partial p}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial q}-\frac{\partial p}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}=1; \tag{61.9}$$

pour $f=q$ et $g=q$

$$(q, q)=\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial q}-\frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}=0. \tag{61.10}$$

De même, $(p, p)=0$. Le fait que pour un couple de coordonnées et d'impulsions canoniques conjuguées le crochet de Poisson est égal à 1 peut être interprété comme une définition des conjuguées canoniques : deux quantités p_k et q_k sont dites conjuguées canoniques si

$$(q_k, q_k)=0, \ (p_k, p_k)=0, \ (p_k, q_k)=1.$$

§ 62. Mouvement dans un champ électromagnétique

Dans les paragraphes précédents de ce chapitre on s'est intéressé uniquement au cas de mouvement dans un champ potentiel, c'est-à-dire dans un champ pour lequel la force s'exerçant sur la particule peut être représentée sous forme d'un gradient d'une certaine fonction scalaire φ. Un exemple de ce champ nous est fourni par un champ électrostatique. Dans un tel champ le travail accompli par une particule mobile chargée ne dépend pas

de la forme de la trajectoire mais est seulement fonction des positions des points initial et final.

Un cas important de mouvement est celui effectué sous l'action d'un champ électromagnétique. La force s'exerçant sur une particule chargée dans un tel champ s'exprime, comme on le sait, par la formule de Lorentz

$$\mathbf{F}=e\mathcal{E}+\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathcal{H}).$$

Le second terme de cette formule désigne la force agissant de la part du champ magnétique. Comme il a déjà été indiqué (p. 139), la force

$$\mathbf{F}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathcal{H})$$

n'accomplit pas de travail, car elle est dirigée perpendiculairement à la vitesse. Une propriété importante du champ magnétique est l'absence de sources du champ. Cette circonstance se traduit par la condition

$$\operatorname{div}\mathcal{H}=0.$$

Par suite de cette condition l'intensité du champ magnétique $\mathcal{H}$ peut être représentée sous forme d'un rotationnel d'un certain vecteur $\mathbf{A}$ appelé potentiel vectoriel

$$\mathcal{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

[comme on le sait de l'analyse vectorielle, pour tout vecteur $\mathbf{a}$ on a l'identité : div rot $\mathbf{a}\equiv 0$; c'est pourquoi div $\mathcal{H}=$ div rot $\mathbf{A}=0$, c'est-à-dire que la condition exigée est remplie].

Le cas le plus général est celui du champ électromagnétique variant avec le temps. Pour le calcul d'un tel champ on introduit en électrodynamique des potentiels dits électrodynamiques et plus précisément, le potentiel scalaire φ et le potentiel vectoriel $\mathbf{A}$*), quant aux intensités des champs électrique $\mathcal{E}$ et magnétique $\mathcal{H}$ elles se calculent d'après les formules

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}&=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\\ \mathcal{H}&=\operatorname{rot}\mathbf{A}.\end{aligned}\right\}\qquad(62.1)$$

Les équations newtoniennes du mouvement de la particule de masse m et de charge positive e dans un champ électromagnétique sont :

$$m\ddot{x}=e\mathcal{E}_x+\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathcal{H})_x=e\mathcal{E}_x+\frac{e}{c}(\dot{y}\mathcal{H}_z-\dot{z}\mathcal{H}_y)$$

et encore deux autres équations analogues pour les axes y et z. Montrons maintenant que ces équations peuvent être obtenues à partir de la fonction de Lagrange choisie de la façon suivante :

$$L=T-e\varphi+\frac{e}{c}(\mathbf{vA}),\qquad(62.2)$$

*) Voir, par exemple, I. Tamm, *Principes de la théorie de l'électricité*, Naouka, 1966 (en russe); Y. Frenkel, *Cours de mécanique rationnelle*, Gostekhizdat, 1940 (en russe).

ou explicitée en coordonnées cartésiennes sous la forme :

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-e\varphi+\frac{e}{c}(\dot{x}A_x+\dot{y}A_y+\dot{z}A_z). \tag{62.3}$$

Avant de passer à la démonstration on cherchera les impulsions généralisées correspondant aux coordonnées x, y, z. D'après la définition $p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, etc., ce qui donne en utilisant la fonction L de (62.3)

$$p_x=m\dot{x}+\frac{e}{c}A_x, \quad p_y=m\dot{y}+\frac{e}{c}A_y, \quad p_z=m\dot{z}+\frac{e}{c}A_z \tag{62.4}$$

ou sous une forme vectorielle

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}+\frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{62.5}$$

Ecrivons maintenant les équations du mouvement de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0, \quad k=1, 2, \ldots, f.$$

Posant $q_1=x$ et notant que $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=p_x$, on obtient

$$\frac{dp_x}{dt}-\frac{\partial L}{\partial x}=0. \tag{62.6}$$

Pour le calcul de la dérivée $\dot{p}_x$ utilisons la première des formules (62.4)

$$\frac{dp_x}{dt}=m\ddot{x}+\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt}.$$

Il importe de souligner qu'en calculant la dérivée $\frac{dA_x}{dt}$ il faut prendre la dérivée *totale* ou la dérivée le long de la trajectoire de la particule mobile*) :

$$\frac{dA_x}{dt}=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Ceci étant, il vient

$$\frac{dp_x}{dt}=m\ddot{x}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}.\right) \tag{62.7}$$

Puis en dérivant (62.3) en x on trouve

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-e\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right). \tag{62.8}$$

*) La dérivée totale (ou particulaire) par rapport à t caractérise les variations de A pour la *particule considérée*, tandis que la dérivée partielle (ou locale) caractérise les variations de A au point considéré.

Portant (62.7) et (62.8) dans (62.6) on a

$$m\ddot{x}=-e\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{e}{c}\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}-\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\right].$$

Mais tenant compte de (62.1) on a évidemment

$$-e\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}=e\mathcal{E}_x,$$

$$\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}-\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)=\dot{y}\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{A}-\dot{z}\,\mathrm{rot}_y\,\mathbf{A}=\dot{y}\mathcal{H}_z-\dot{z}\mathcal{H}_y=(\mathbf{v}\times\mathcal{H})_x.$$

On obtient ainsi

$$m\ddot{x}=e\mathcal{E}_x+\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathcal{H})_x.$$

D'après la définition générale la fonction de Hamilton est

$$H=\dot{x}p_x+\dot{y}p_y+\dot{z}p_z-L. \tag{62.9}$$

En remplaçant p_x, p_y, p_z par les expressions des impulsions *cinétiques* (62.4) et en introduisant la fonction de Lagrange (62.2), on obtient

$$H=\dot{x}\left(m\dot{x}+\frac{e}{c}A_x\right)+\dot{y}\left(m\dot{y}+\frac{e}{c}A_y\right)+\dot{z}\left(m\dot{z}+\frac{e}{c}A_z\right)-$$

$$-\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+e\varphi-\frac{e}{c}(\dot{x}A_x+\dot{y}A_y+\dot{z}A_z).$$

Après des transformations algébriques et des réductions simples on voit que les termes contenant les composantes du potentiel-vecteur se simplifient si bien qu'on a :

$$H=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+e\varphi=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+e\varphi,$$

c'est-à-dire que H est toujours la somme des énergies potentielle et cinétique, quant aux termes du champ magnétique ils disparaissent. On devait s'y attendre, car la force de Lorentz n'accomplit aucun travail (voir § 41).

Cherchons maintenant l'expression explicite de la fonction de Hamilton au moyen des coordonnées et des impulsions généralisées correspondantes. Pour cela dans (62.9), comme dans l'expression de la fonction de Lagrange (62.3), remplaçons $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ par leurs expressions au moyen de p_x, p_y, p_z.

Transformons d'abord la fonction de Lagrange

$$L=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2-e\varphi+\frac{e}{c}(\mathbf{vA})=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-e\varphi+\frac{1}{m}\frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right),$$

où par $\mathbf{p}$ on entend l'impulsion cinétique (62.5). Pour abréger écrivons la fonction de Hamilton sous une forme vectorielle

$$H=\frac{1}{m}\mathbf{p}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi-\frac{1}{m}\frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right).$$

On s'assure aisément que le premier et le dernier terme donnent ensemble $\frac{1}{m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$. En effet, par exemple,

$$p_x\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)-\frac{e}{c}A_x\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)=p_x^2-2\frac{e}{c}p_xA_x+\frac{e^2}{c^2}A_x^2=\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2.$$

On obtient donc après réduction

$$H=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi=$$
$$=\frac{1}{2m}\left[\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2+\left(p_y-\frac{e}{c}A_y\right)^2+\left(p_z-\frac{e}{c}A_z\right)^2\right]+e\varphi. \quad (62.10)$$

C'est bien la fonction de Hamilton cherchée.

Comparant (62.10) avec l'expression de la fonction de Hamilton pour le cas d'un champ électrostatique

$$H=\frac{1}{2m}(P_x^2+P_y^2+P_z^2)+e\varphi, \quad (62.11)$$

où par P_x, P_y, P_z sont notées les composantes de la quantité du mouvement ($P_x=m\dot{x}$, etc), on voit que le passage à un champ *électromagnétique* se réalise au moyen d'un procédé fort simple : il faut dans (62.11) changer les composantes de l'impulsion ordinaire P_x, P_y, P_z en composantes correspondantes de l'impulsion cinétique

$$P_x=p_x-\frac{e}{c}A_x, \quad \text{etc.}$$

§ 63. Mécanique des particules rapides. Transformations de Lorentz

Dans les cas où la vitesse de la particule est comparable à celle de la lumière on doit appliquer les lois de la théorie de la relativité. Il n'est pas question d'exposer ici de façon systématique la théorie de la relativité, c'est pourquoi on ne donnera dans ce paragraphe et dans ceux qui suivront que l'information nécessaire pour des applications au cours de l'exposé ultérieur*).

La théorie de la relativité s'appuie sur deux postulats :

1. Postulat de relativité. Aucune expérience mécanique ou électromagnétique (en particulier optique) réalisée à l'intérieur d'un référentiel ne permet de déceler un mouvement rectiligne uniforme de ce référentiel.

Ce postulat est une généralisation du principe de relativité de la méca-

*) Voir, par exemple, R. Becker, *Electronentheorie*, 1949; P. G. Bergman *Introduction to the theorie of Relativity*, New York, 1946; G. Landsberg, *Optique*, ch. XVI. L'exposé de l'histoire de la découverte de la théorie de la relativité est donné de façon brillante dans le cours de la théorie de la relativité de L. Mandelchtam *(Cours d'optique, de la théorie de la relativité et de la mécanique quantique)*, Naouka, 1972 (en russe).

nique classique, découvert déjà par Galilée, d'après lequel tous les phénomènes mécaniques s'effectuent identiquement et ceci indépendamment du fait que le référentiel se trouve au repos ou en mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire en mouvement d'inertie.

Il faut toutefois remarquer que si l'on a deux référentiels en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, alors selon le principe de relativité, il n'est pas *obligatoire* qu'un phénomène quelconque se déroule de façon identique dans les deux référentiels. Par exemple, si le corps est au repos dans l'un des référentiels, dans l'autre il est en mouvement. Mais le principe de relativité affirme que si les conditions initiales dans les deux référentiels sont les mêmes, les mouvements doivent alors être identiques.

Le postulat de relativité d'Einstein étend cette règle également aux phénomènes électromagnétiques. Ce postulat peut être formulé de façon quelque peu différente en utilisant la notion de référentiels galiléens, c'est-à-dire de référentiels auxquels s'applique la loi d'inertie. Dans ce cas, le principe de relativité se formule ainsi : *toutes les lois de la mécanique et de l'optique sont identiques dans tous les référentiels galiléens.*

2. Postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière. La vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les référentiels indépendamment du mouvement relatif de la source et de l'observateur.

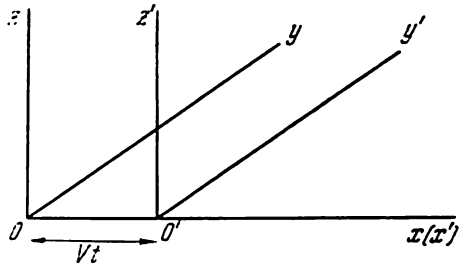


Fig. 109.

En mécanique classique pour le passage d'un système de coordonnées à un autre, qui est en mouvement uniforme par rapport au premier, on utilise les transformations dites de Galilée. Soient deux systèmes de coordonnées cartésiennes rectangulaires $S(x, y, z)$ et $S'(x', y', z')$ (fig. 109). Pour simplifier on fait coïncider les axes x et on suppose que le système S' se meut uniformément avec une vitesse V par rapport à S sur l'axe x, de sorte qu'à l'instant $t=0$ les origines des coordonnées des deux systèmes coïncident. Dans ce cas, le système S se déplace par rapport à S' avec une vitesse $-V$. Par suite, entre les coordonnées du point dans les systèmes S' et S on a les relations

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - Vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (63.1)$$

A ces trois relations pour le cas des coordonnées spatiales il faut encore ajouter la relation pour le temps. Du point de vue de la mécanique classique le temps dans les deux systèmes est le même,

$$t' = t. \qquad (63.1a)$$

Les formules (63.1) et (63.1a) constituent les transformations de Galilée utilisées dans la mécanique de Newton. Il est facile de se convaincre que les équations de la mécanique newtonienne conservent leur forme au cours des changements de coordonnées et du temps selon ces formules de transformation. Autrement dit, les équations de la mécanique newtonienne sont invariantes par rapport aux transformations de Galilée.

En effet, écrivons l'équation newtonienne du mouvement pour la coordonnée x

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x. \tag{63.2}$$

Il est évident que les raisonnements ultérieurs seront justes également pour les équations écrites pour toute coordonnée x, y ou z. Les formules de transformation de Galilée donnent pour la coordonnée x :

$$x=x'+Vt.$$

En dérivant par rapport à t on a :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt'}+V,$$

ou

$$v_x=v'_x+V. \tag{63.3}$$

C'est le théorème connu de la composition des vitesses de la mécanique de Galilée-Newton : la vitesse de la particule dans le référentiel S est égale à la vitesse de cette particule dans le référentiel S' plus la vitesse du mouvement relatif des deux référentiels.

En dérivant en x une seconde fois on a :

$$\frac{d^2x}{dt}=\frac{d^2x'}{dt'^2}. \tag{63.2a}$$

Ainsi donc, les premiers membres des équations newtoniennes ne sont pas modifiés par les transformations de Galilée. Les seconds membres de ces équations renferment les composantes de la force. Or en mécanique les forces d'interaction entre deux corps sont des forces d'attraction ou de répulsion. Ces forces dépendent de la distance des deux corps, c'est-à-dire de la *différence* des coordonnées, et non des coordonnées elles-mêmes. C'est pourquoi les transformations de Galilée ne modifient pas les composantes de la force, c'est-à-dire

$$F'_{x'}=F_x. \tag{63.2b}$$

Portant (63.2a) et (63.2b) dans (63.2) il vient :

$$m\frac{d^2x'}{dt'^2}=F'_{x'}.$$

Ceci montre que les transformations de Galilée ne changent pas la forme des équations newtoniennes du mouvement : les équations newtoniennes

du mouvement sont invariantes par rapport aux transformations de Galilée.

L'invariance des équations du mouvement par rapport aux transformations de Galilée constitue l'expression mathématique du principe de relativité de la mécanique classique : les lois du mouvement sont les mêmes dans tous les systèmes de coordonnées en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Le premier postulat de la théorie de la relativité est en accord avec ce principe et le généralise aux lois de la propagation de la lumière. Toutefois, l'application simultanée des deux postulats se trouve en contradiction avec les transformations de Galilée. En effet, de la transformation de Galilée il découle automatiquement le théorème de composition des vitesses (63.3). Mais en appliquant ce théorème à la vitesse de propagation de la lumière on obtient que si la vitesse de la lumière dans le référentiel S' est égale à c, pour le référentiel S elle devrait être égale à

$$c'=c+V,$$

ce qui contredit le second postulat de la théorie de la relativité.

Mais comme ces deux postulats sont confirmés par toutes les expériences connues, cette contradiction concerne non pas les postulats eux-mêmes, mais les postulats et les transformations de Galilée, ces dernières étant inapplicables à la propagation de la lumière et aux mobiles animés de vitesses proches de celle de la lumière.

En spéculant sur les propriétés de l'espace et du temps Einstein a découvert des transformations s'accordant avec les deux postulats de la théorie de la relativité et dont les transformations de Galilée constituent un cas particulier (pour $V/c \ll 1$). Ces transformations découvertes par Lorentz, qui cependant n'en a pas prévu le contenu profond, portent le nom des transformations de Lorentz.

Elles ont la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y'=y, \\ z'&=z, \quad t'=\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{63.4}$$

Un trait important de ces transformations est qu'en passant d'un référentiel galiléen à un autre il faut transformer non seulement les coordonnées spatiales mais également le temps : dans des référentiels galiléens différents en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre le temps s'écoule de façon inégale.

Il est facile de voir que pour $V/c \ll 1$, c'est-à-dire dans les conditions où la mécanique de Newton est vraie, les transformations de Lorentz passent automatiquement aux transformations de Galilée (63.1).

Exprimons maintenant d'après (63.4) x, y, z, t en fonction de x', y', z', t'. On obtient :

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y=y', \\ z&=z', \quad t=\frac{t'+\frac{V^2}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{63.5}$$

Ce sont les mêmes formules de transformations de Lorentz pour le référentiel S se déplaçant par rapport au référentiel S' avec une vitesse $-V$.

On s'abstiendra de déduire les transformations de Lorentz. Toutefois, en guise de justification on montrera que c'est précisément ces formules qui permettent de résoudre les contradictions entre les deux postulats fondamentaux de la théorie de la relativité. Pour ce faire, considérons de nouveau deux référentiels galiléens S et S'; supposons que leurs origines coïncident au moment $t=0$. Supposons qu'à cet instant un bref signal lumineux est émis de l'origine des coordonnées. Après l'intervalle de temps dt le signal lumineux se propage dans le référentiel S à la distance $c\,dt$ et atteint la surface sphérique de rayon $R=c\,dt$. L'équation de cette surface sphérique de centre O est

$$dx^2+dy^2+dz^2=c^2\,dt^2. \tag{63.6}$$

Effectuons maintenant le changement de référentiel en passant de S à S' à l'aide des transformations de Lorentz. Portant dans (63.6) les expressions de dx, dy, dz, dt tirées de (63.5) on trouve :

$$\frac{(dx'+V\,dt')^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}+dy'^2+dz'^2=c^2\frac{\left(dt'+\frac{V\,dx'}{c^2}\right)^2}{1+\frac{V^2}{c^2}}.$$

Après de simples transformations algébriques il vient :

$$dx'^2+dy'^2+dz'^2=c^2\,dt'^2, \tag{63.7}$$

c'est-à-dire on a de nouveau l'équation de la surface sphérique mais cette fois de centre O'.

Ainsi donc, grâce aux transformations de Lorentz et à l'invariance de la vitesse de la lumière c (second postulat) on voit de même se réaliser le postulat de relativité : l'onde émise de l'origine commune des coordonnées à l'instant $t=0$ reste sphérique aussi bien dans le premier référentiel d'origine O que dans le second d'origine O'. Avec les transformations de Galilée ce serait impossible*).

*) A première vue il semble incompréhensible comment un lieu géométrique de points atteint par l'onde dans le référentiel mobile puisse rester une sphère par rapport à O' si c'est une sphère dans le référentiel immobile. Ce paradoxe apparent se résout par le fait que les événements simultanés dans un système de coordonnées ne le seront pas dans l'autre.

Ainsi donc, les transformations de Lorentz lèvent le désaccord apparent entre les deux postulats fondamentaux de la théorie de la relativité.

En accord avec les transformations de Lorentz se trouve également le théorème de composition des vitesses en théorie de relativité. Examinons un cas simple d'une particule parcourant l'axe x. De (63.4) on tire :

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt'}-V\frac{dt}{dt'}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \frac{dt'}{dt}=\frac{1-\frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Combinant les deux expressions il vient

$$v'_x=\frac{v_x-V}{1-\frac{v_xV}{c^2}}. \tag{63.8}$$

D'où, exprimant les quantités sans prime au moyen des quantités avec prime, on trouve :

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}. \tag{63.9}$$

L'égalité (63.9) traduit justement le théorème de composition des vitesses en théorie de la relativité. Pour $V/c\ll 1$ on a automatiquement :

$$v_x=v'_x+V$$

qui est le théorème de composition des vitesses en mécanique de Galilée-Newton. De plus la formule (63.9) donne les résultats en accord avec le second postulat de la théorie de la relativité. Examinons un cas extrême. Supposons que l'on doit calculer la vitesse de la lumière par rapport au référentiel S si $v'_x=c$ et le référentiel S' se meut par rapport à S également avec la vitesse $V=c$. Alors, d'après (63.9),

$$v_x=\frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}}=c,$$

à quoi on devait s'attendre.

§ 64. Fondements de la dynamique relativiste de la particule

a) Relation entre la masse et la vitesse

On doit maintenant aborder les importants changements introduits par la théorie de la relativité dans la dynamique de Newton. Pour cela il est commode de commencer par l'étude d'un simple processus mécanique : collision de deux billes élastiques identiques se mouvant l'une à l'encontre

de l'autre sur l'axe x. On s'appuiera dans cette étude sur deux postulats de nature très générale : le principe de conservation de la masse

$$\sum_i m_i = \text{const} \tag{64.1}$$

et le principe de conservation de l'impulsion

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const} \tag{64.2}$$

ou, en coordonnées,

$$\sum_i m_i v_{ix} = \text{const}, \quad \sum_i m_i v_{iy} = \text{const}, \quad \sum_i m_i v_{iz} = \text{const}. \tag{64.2a}$$

Dans la suite le processus de collision élastique sera étudié dans deux référentiels galiléens animés d'un mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre. L'examen de ce processus en mécanique newtonienne différera de celui en théorie de la relativité par le fait que dans le premier cas on utilisera les transformations de Galilée et dans le second celles de Lorentz ou, plus précisément, les règles de composition des vitesses qui s'en dégagent.

Soient donc deux billes parcourant dans le référentiel S' l'axe x avec des vitesses $+v'$ et $-v'$. La collision étant supposée parfaitement élastique, les deux billes après le choc s'arrêtent d'abord puis sous l'effet des forces élastiques développées échangent leurs vitesses : la première bille rebrousse chemin avec la vitesse $-v'$ et la seconde, avec la vitesse $+v'$.

Introduisons maintenant un nouveau référentiel galiléen S mobile par rapport à S' à la vitesse $-V$. Pour tenir compte de la variation éventuelle des masses des billes en fonction de la vitesse on désigne dans ce référentiel les masses par m_1 et m_2. Soit M la somme de ces masses à l'arrêt, c'est-à-dire quand les deux billes possèdent la même vitesse V par rapport au référentiel S. Les lois de conservation des masses et des impulsions s'appliquant également au nouveau référentiel, il vient

$$m_1 + m_2 = M, \tag{64.3}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = MV. \tag{64.4}$$

On verra maintenant que le théorème de composition des vitesses de la mécanique de Galilée-Newton aboutit à un résultat banal $m_1 = m_2$, En effet, d'après ce théorème la vitesse de la première bille dans le référentiel S sera

$$v_1 = v' + V,$$

et de la seconde

$$v_2 = -v' + V.$$

Portant ces expressions dans (64.4) on a :

$$m_1 v' + m_1 V - m_2 v' + m_2 V = MV,$$

d'où

$$(m_1 - m_2)v' = 0,$$

soit

$$m_1 = m_2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans la dynamique relativiste il nous faut utiliser le théorème de composition des vitesses d'Einstein qui découle des transformations de Lorentz. D'après ce théorème

$$v_1=\frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}}, \quad v_2=\frac{-v'+V}{1-\frac{v'V}{c^2}}. \tag{64.5}$$

Portant (64.5) dans (64.4) et mettant en jeu la loi de conservation de la masse $m_1+m_2=M$ on obtient :

$$m_1\frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}}+m_2\frac{-v'+V}{1-\frac{v'V}{c^2}}=m_1V+m_2V,$$

d'où, après des transformations algébriques simples, on trouve :

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{1+\frac{v'V}{c^2}}{1-\frac{v'V}{c^2}}. \tag{64.6}$$

Pour obtenir le résultat final il reste à accomplir quelques calculs de nature purement algébrique en utilisant le théorème de composition des vitesses (64.5). En se rappelant la valeur de la vitesse v_1 on calcule :

$$\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=\sqrt{1-\frac{(v'+V)^2}{c^2\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)^2}}=\sqrt{\frac{c^2\left[1+\left(\frac{v'V}{c^2}\right)^2+2\frac{v'V}{c^2}\right]-(v'^2+V^2+2v'V)}{c^2\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)-\frac{V^2}{c^2}\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \tag{64.7}$$

En ne conservant que les extrémités de cette chaîne d'égalités on obtient

$$\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'V}{c^2}}.$$

Des calculs analogues donnent :

$$\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{v'V}{c^2}}.$$

A l'aide des relations ainsi obtenues il est facile de réduire (64.6) à la forme

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}. \tag{64.8}$$

On voit ainsi que les masses des corps à des vitesses différentes ne sont pas les mêmes mais sont inversement proportionnelles à $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ et dans le cas général

$$m=\frac{\text{const}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Pour $v=0$ on a $m=m_0$ et l'on aboutit à la formule déjà connue de Lorentz-Einstein

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dans les déductions données on a examiné le cas élémentaire de collision « frontale » de deux masses. Mais il est possible de montrer que le choix de ce cas particulier ne restreint pas la généralité du résultat obtenu et qu'on aboutit à une formule identique dans l'examen des collisions obliques. Les lois de conservation de l'impulsion et de la masse sont également satisfaites si l'on introduit dans la formule en qualité de v la vitesse résultante.

On a vu plus haut (§ 10) que les expériences, indépendamment de la théorie, ont confirmé avec une grande précision la formule de Lorentz-Einstein décrivant la relation entre la masse et la vitesse pour le cas de particules chargées : électrons, protons, noyaux d'hydrogène lourd (deutérons), noyaux d'hélium. Le résultat donné dans ce paragraphe montre que la même formule est valable indépendamment du fait que le corps soit électriquement chargé ou neutre.

b) Force et énergie

Poursuivons maintenant l'examen des principes fondamentaux de la dynamique relativiste d'une particule. On s'appuiera dans ce but sur le résultat obtenu précédemment et, plus précisément, sur ce que le fait, confirmé par des expériences avec une grande précision, de la dépendance de la masse de la vitesse suivant la formule de Lorentz-Einstein apparaît dans la dynamique relativiste comme la conséquence d'un processus mécanique élémentaire (la collision de billes élastiques), au cas où on part de la loi de conservation de l'impulsion. Ceci montre que dans la dynamique relativiste la loi de conservation de l'impulsion intervient également. Cela étant, examinons maintenant comment doivent être définies les grandeurs dynamiques fondamentales dans un système de notions compatibles.

1. *Force.* Dans la mécanique classique on définit la force *soit* comme un produit de la masse par l'accélération, *soit* comme une dérivée de l'impulsion par rapport au temps (voir § 41), c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=\mathbf{F}. \tag{64.9}$$

En mécanique relativiste ces définitions ne sont pas équivalentes, car la masse dépend de la vitesse, de sorte que

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})\neq m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Il est facile de voir qu'en mécanique relativiste des deux définitions possibles il est logique de choisir la seconde, c'est-à-dire la définition exprimée par la formule (64.9). En effet, suivant le principe de l'action et de la réaction (voir § 43)

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_1)=\mathbf{F}_{12}, \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_2)=-\mathbf{F}_{21},$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2)=0$$

et

$$m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2=\text{const}.$$

Ceci montre justement qu'en définissant la force selon la formule (64.9) on satisfait également à la loi de conservation de l'impulsion, c'est-à-dire qu'on obtient des définitions intrinsèquement compatibles.

Toutefois, de la définition de la force par la formule (64.9) il suit qu'en mécanique relativiste, à la différence de la mécanique newtonienne, la force et l'accélération n'ont pas, en général, la même direction. En effet, puisque la masse m dans la formule (64.9) n'est déjà plus constante, après dérivation dans le second membre de (64.9) on trouve :

$$\mathbf{F}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\mathbf{v}\frac{dm}{dt}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\mathbf{v}. \tag{64.10}$$

On voit que la force est la somme de deux vecteurs dont l'un est parallèle à l'accélération et l'autre à la vitesse préexistante. Ceci montre justement que la force et l'accélération ont en général des directions différentes.

La force et l'accélération auront la même direction dans les deux cas particuliers : *a)* quand la force $\mathbf{F}$ est perpendiculaire à la vitesse préexistante $\mathbf{v}$ et *b)* quand la force $\mathbf{F}$ est parallèle à la vitesse préexistante $\mathbf{v}$. Dans le cas *a)* la vitesse reste constante en grandeur $\left(\frac{dv}{dt}=0\right)$ et le second terme du deuxième membre de (64.10) est égal à zéro, de sorte que

$$\mathbf{F}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{64.11}$$

Dans le cas *b)* les deux termes du second membre de (64.9) ne sont pas nuls et on obtient après dérivation dans le second terme :

$$\mathbf{F}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{m_0\frac{\mathbf{v}}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\mathbf{v}\frac{dv}{dt}. \tag{64.12}$$

Comme dans ce cas $v\mathbf{v}\frac{dv}{dt}=v^2\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, on trouve après des transformations algébriques simples

$$\mathbf{F}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{64.13}$$

Les coefficients scalaires devant l'accélération dans les formules (64.11) et (64.13) sont, comme on le voit, différents. Dans le cas *a)* le rapport de la force à l'accélération est égal à

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{64.14}$$

et dans le cas *b)* il est égal à

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \tag{64.15}$$

Il est évident que seule la formule (64.14) constitue l'expression de la masse relativiste, car c'est précisément cette expression, intrinsèquement compatible avec les définitions antérieures qui satisfait à la loi de conservation de l'impulsion. Quant à l'expression (64.15), elle montre qu'au cas où la force a la même direction que la vitesse préexistante, la variation de l'impulsion dépend non seulement des modifications de la vitesse, mais également de celles de la masse en fonction de la vitesse.

2. *Travail et énergie cinétique.* Le travail élémentaire de la force $\mathbf{F}$ peut être défini en dynamique relativiste de la même façon qu'en dynamique newtonienne comme le produit scalaire de la force par le déplacement

$$dW=\mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \tag{64.16}$$

Au cas où le travail est accompli sur une particule libre, le travail fourni, suivant la loi de conservation de l'énergie, est égal à la variation de l'énergie cinétique. D'où :

$$dE=\mathbf{F}d\mathbf{r}=\left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{dm}{dt}\mathbf{v}\right)d\mathbf{r}=m\,d\mathbf{v}\frac{d\mathbf{r}}{dt}+dm\mathbf{v}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=$$

$$=m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}+\mathbf{v}\mathbf{v}\,dm=mv\,dv+v^2\,dm. \tag{64.17}$$

Utilisant la relation relativiste entre la masse et la vitesse et considérant que

$$dm=\frac{m_0\,\frac{v}{c^2}\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

on tire de (64.17) :

$$dE=\frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\,dv+\frac{m_0\,\frac{v^3}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,dv=\frac{m_0 v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \tag{64.18}$$

Après vérification on obtient l'identité

$$\frac{m_0 v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\frac{d}{dv}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)dv.$$

En le notant et en intégrant (64.18) de 0 à v on trouve :

$$E_{\text{cin}}=\int_0^v\frac{m_0 v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\int_0^v\frac{d}{dv}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)dv=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-m_0c^2. \tag{64.19}$$

C'est justement l'expression relativiste de l'énergie cinétique. Développant $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ en série de puissances on obtient :

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}-\frac{3}{8}\,\frac{v^4}{c^4}+\ldots$$

Au cas où la vitesse v est faible devant c, c'est-à-dire $v/c\ll 1$, il suffit de prendre les deux premiers termes de la série. A cette condition (64.19) donne

$$E_{\text{cin}}=m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right)-m_0c^2=\frac{1}{2}\,m_0v^2. \tag{64.20}$$

On a obtenu, comme il fallait s'y attendre, l'expression de l'énergie cinétique de la mécanique newtonienne.

Combinant (64.17) et (64.18) il vient :

$$dE=c^2(m-m_0). \tag{64.21}$$

L'expression

$$mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

est appelée énergie totale relativiste, et l'expression m_0c^2, énergie au repos. La formule (64.21) montre que la variation de l'énergie cinétique d'un corps exprimée en ergs est égale à la variation de la masse relativiste exprimée en grammes multipliée par c^2, c'est-à-dire

$$\Delta E=c^2\Delta m \quad \text{ou} \quad \Delta m=\Delta E/c^2.$$

Le rapport important obtenu entre les grandeurs relativistes, la masse et l'énergie, concerne non pas l'énergie cinétique uniquement. En effet, rapportons-nous à la déduction de la formule de la masse relativiste, présentée au sous-paragraphe *a)*, où on a examiné le processus de collision centrale de deux billes identiques, se déplaçant l'une à l'encontre de l'autre avec des vitesses égales en valeur absolue. Au moment du choc les deux billes sont au repos l'une par rapport à l'autre tout en se déplaçant avec la même vitesse V par rapport à un second système de coordonnées introduit lors des raisonnements. La masse totale des billes pour la vitesse V est égale à

$$\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Il est facile de montrer que la masse totale des deux billes avant le choc

$$m_1+m_2=\frac{2m}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \text{où} \quad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Or, il est évident que $m>m_0$, ce qui entraîne

$$m_1+m_2>\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Ce résultat à première vue contradictoire s'explique facilement. Comme les billes sont par hypothèse élastiques, au moment de l'arrêt il apparaît dans le système une énergie potentielle de déformation élastique ΔE. A cette énergie potentielle correspond une masse égale à $\Delta E/c^2$ qui compense justement la perte apparente de la masse relativiste.

§ 65. De la relation entre la masse et l'énergie*)

La relation entre la masse et l'énergie déduite au § 64

$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2} \tag{65.1}$$

est un résultat important de la théorie de la relativité. Actuellement cette relation possède un énorme rôle pratique, car elle est à la base de toute l'énergétique nucléaire tant dans ses utilisations pacifiques (réacteurs

*) Pour une meilleure compréhension de ce paragraphe il est recommandé de lire l'article de M. Laue, *Inertie et énergie*, de même que le recueil d'articles de M. Laue, *Articles et discours*, Naouka, 1969 (en russe).

nucléaires, centrales atomiques, etc.) que dans ses applications agressives. Il nous faut donc nous orienter de façon claire et exhaustive dans le contenu de la formule d'Einstein (65.1) ainsi que dans les conséquences qui s'en dégagent. C'est d'autant plus important que dans les ouvrages, surtout de vulgarisation scientifique, on rencontre souvent une terminologie et des formulations confuses.

Commençons d'abord par donner la déduction due à Einstein de cette formule. Dans cette déduction un rôle essentiel est tenu par la pression de radiation prédite par Maxwell et confirmée de façon brillante par l'expérience de P. Lébédev. La valeur de la pression de radiation au cours de l'absorption complète de la lumière est égale à E/c, où E est le flux d'énergie de la radiation électromagnétique. Rappelons qu'en vertu de la loi généralisée de conservation de l'impulsion pendant l'*émission* lumineuse le corps rayonnant reçoit une impulsion au recul dirigée dans le sens opposé et égale de même à E/c.

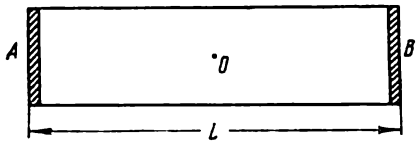


Fig. 110.

Examinons maintenant la formule déduite par Einstein.

Soit un tube homogène de longueur L en équilibre dans le vide (fig. 110). Supposons qu'aux extrémités de ce tube se trouvent deux corps A et B dont les masses sont faibles devant la masse du tube M, de sorte que dans les cas où l'on considère la masse totale du système on peut la poser égale à M. Admettons en outre que le corps A par rapport au corps B possède un excès d'énergie ΔE qu'il peut rayonner sous forme d'onde électromagnétique dans la direction du corps B.

Examinons le processus cyclique suivant. A une certaine date le corps A rayonne son excès d'énergie ΔE sous forme d'« éclat lumineux » donnant naissance à la propagation dans le tube de gauche à droite d'un train d'ondes électromagnétiques. Au bout du temps $t=L/c$ ce train atteindra le corps B qui l'absorbera. Au cours du rayonnement le corps A et avec lui tout le système, par suite du recul, reçoit une impulsion dirigée vers la gauche et égale à $g=\Delta E/c$. Sous l'influence de cette impulsion le tube se met en mouvement qui durera tant que la radiation n'atteigne le corps B et ne s'y absorbe complètement. Alors le corps B et avec lui le tube tout entier subiront une pression de radiation dirigée vers la droite et de même égale à $g=\Delta E/c$, qui bloquera le mouvement du tube.

La vitesse v qu'acquerra le système sous l'action du recul g sera (les masses des corps A et B pouvant être négligées comme très faibles!) :

$$v=\frac{g}{M}=\frac{\Delta E}{Mc}.$$

Au cours du temps t le centre de masse du système se déplacera d'une distance

$$\Delta x=vt=\frac{gL}{Mc}=\frac{L}{M}\frac{\Delta E}{c^2}, \qquad (65.2)$$

ceci en supposant que la longueur du tube est suffisamment grande, de sorte que les durées d'émission et d'absorption de la lumière sont infiniment petites par rapport à t.

Après absorption de la lumière par le corps B, déplaçons-le à l'aide d'un mécanisme quelconque faisant partie du système, autrement dit au moyen de forces exclusivement intérieures, jusqu'à son contact avec le corps A. Le corps B restituera alors son excès d'énergie au corps A, après quoi on replacera le corps B dans sa position antérieure à l'extrémité droite du tube en faisant toujours agir des forces intérieures. Tout le système reprendra donc son état initial, mais son centre de masse subira un déplacement. Supposant l'existence d'une relation entre l'énergie et la masse, on doit prévoir que les masses du corps B possédant un excès d'énergie ΔE et l'ayant restitué seront différentes; désignons-les respectivement par m_1 et m_2. Dans ce cas le déplacement du centre de masse du système lors du transfert de l'excès d'énergie de A vers B, c'est-à-dire de la distance L, sera

$$-L\frac{m_1}{M},$$

et dans le transfert inverse sera

$$L\frac{m_2}{M}.$$

Le déplacement total du centre de masse en tenant compte du déplacement dû au recul sera

$$\frac{L}{M}\left(\frac{\Delta E}{c_2}+m_2-m_1\right). \tag{65.3}$$

Mais ce déplacement doit être obligatoirement nul, sinon on serait en présence d'un système qui, tout en conservant intacte sa configuration, se déplacerait sans l'action de forces extérieures. Il est évident que l'égalité à zéro de (65.3) est la conséquence de la loi de conservation de l'impulsion totale (mécanique+électromagnétique). Ainsi donc :

$$m_1-m_2\equiv\Delta m=\Delta E/c^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le processus cyclique examiné l'excès d'énergie ΔE était restitué au corps A par translation du corps B à la distance L. On peut, toutefois, montrer que cette hypothèse n'est pas unique et que, par suite, celle-ci ne doit pas être considérée comme une restriction de la généralité de la déduction.

Abordons maintenant l'analyse de la relation d'Einstein. Au § 64 on a montré que si l'on envisage le cas élémentaire de collision de deux billes élastiques en se fondant sur les lois de conservation de la masse et de l'impulsion, ces dernières ne sont satisfaites en théorie de la relativité qu'à la

condition que la masse dépende de la vitesse suivant la formule de Lorentz-Einstein

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Le fait que la formule de Lorentz—Einstein est déduite en partant de la loi de conservation de la masse entraîne que la masse *relativiste* satisfait à la loi de conservation. Il est facile de voir, toutefois, que la variation de la masse relativiste avec la vitesse sous-entend déjà la loi de l'équivalence de la masse et de l'énergie (65.1). On s'en convaincra le plus simplement en examinant le cas où la vitesse v n'est pas trop grande. En effet, développant l'expression $(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ en une série de puissances on peut au cas où $v/c \ll 1$ ne prendre que les deux premiers termes et on obtient

$$m=m_0+\frac{1}{2}\frac{m_0v^2}{c^2}=m_0+\frac{E_{\text{cin}}}{c^2}.$$

Le premier terme du deuxième membre constitue ici la masse au repos m_0 invariante (c'est-à-dire indépendante de la vitesse). Quant au second terme, il exprime justement la variation de la masse avec la vitesse. On voit que ce second terme correspond rigoureusement à la loi d'Einstein

$$\Delta m=\Delta E/c^2.$$

Etudions maintenant un système comprenant plusieurs corps en interactions réciproques quelconques. Puisque la masse relativiste obéit à la loi de conservation, on a :

$$\text{const}=\sum_i m_i=\sum_i m_{i0}+{}^{(i)}\sum\frac{E_{\text{cin}}^{(i)}}{c^2}.$$

On aboutit ainsi à une conclusion importante : à la fin du processus c'est la *somme* de la masse au repos Σm_0 et de la masse attachée à l'énergie cinétique du système $\frac{\Sigma E_{\text{cin}}}{c^2}$ après l'achèvement du processus et *non pas la masse au repos* Σm_0 qui se conserve. Tenons maintenant compte de ce qu'avant et après le processus l'énergie cinétique est en général différente; si, par exemple, le noyau de l'atome se désintègre, alors, dans le système de coordonnées où le noyau initial est au repos, son énergie cinétique est nulle, mais les fragments résultant de la division acquièrent une énergie cinétique. C'est pourquoi $\frac{\Sigma E_{\text{cin}}}{c^2}$ augmente et, par suite, Σm_0 doit diminuer. *C'est la conséquence de la loi de conservation de la masse relativiste.* Ainsi donc, la masse au repos n'obéit pas à la loi de conservation; au contraire, au cours du processus s'accompagnant du dégagement d'énergie ΔE il y a *perte* de masse au repos, égale à $\Delta E/c^2$. Inversement on peut de même dire qu'à une variation de la masse au repos d'une grandeur Δm_0 correspond une énergie libérée $\Delta E=(\Delta m_0)c^2$.

La relation entre la masse et l'énergie a reçu une confirmation expérimentale exhaustive. Comme, toutefois, dans la formule $\Delta m=\Delta E/c^2$ on a au dénominateur c^2, quantité voisine de 10^{21}, dans les processus chimiques, où la quantité ΔE est de l'ordre de 100 kcal·mole^{-1}=4,18·10^{12} erg·mole^{-1}, la variation de la masse au repos devient égale à

$$\Delta m=\frac{4{,}18\cdot 10^{12}}{9\cdot 10^{20}}=4{,}6\cdot 10^{-9}\text{ g}$$

qui est une quantité infiniment petite.

A la limite du XIX et du XX siècle, c'est-à-dire à l'époque qui a précédé l'apparition de la théorie de la relativité, le chimiste allemand H. Landolt exécuta une série d'expériences qui répétèrent les expériences de Lomonossov et de Lavoisier à un niveau beaucoup plus élevé de la technique d'expérimentation. Ces expériences consistèrent dans la réalisation d'une série de réactions chimiques en un espace complètement isolé, dans le but d'éviter toute fuite de substance, et avec un contrôle précis de la masse du système avant et après la réaction. Aucun changement de masse dans ces expériences n'a été observé. Du point de vue de nos connaissances actuelles, puisque le système n'était pas isolé énergétiquement, la chaleur dégagée par la réaction était dissipée et la masse au repos du système aurait dû diminuer. Mais dans les expériences de Landolt cette perte de masse n'a pu être constatée, car la précision des balances utilisées était insuffisante pour pouvoir mesurer des quantités aussi infimes.

Ainsi donc, les réactions chimiques familières ne peuvent constituer des objets permettant de vérifier la relation entre la masse et l'énergie. Dans des réactions nucléaires par contre d'énormes quantités d'énergie sont libérées et les variations de la masse au repos deviennent accessibles à des mesures. Un exemple éclatant nous est fourni par la réaction se trouvant à la base de toute l'énergétique nucléaire moderne : la soi-disante fission nucléaire. Cette réaction de fission aboutit à la division du noyau lourd de l'uranium à peu près en deux parties égales, l'énergie libérée étant égale à environ 200 millions d'électrons-volts. Calculant par rapport à une mole, c'est-à-dire, par exemple, à $\sim$ 240 g d'uranium, on obtient :

$$\Delta E=200\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}=19{,}3\cdot 10^{19}\text{ erg.}$$

La perte de masse sera dans ce cas

$$\Delta m=\frac{19{,}3\cdot 10^{19}}{9\cdot 10^{20}}=0{,}21\text{ g,}$$

et, par suite, la fission d'un kilogramme d'uranium donnera une perte de masse de l'ordre d'un gramme!

Pour vérifier la relation d'Einstein on a utilisé des réactions nucléaires pour lesquelles l'énergie de réaction pouvait être déterminée d'abord par des mesures directes et ensuite d'après la quantité de la masse perdue. Dans tous les cas on a obtenu une coïncidence d'autant plus précise que la mesure directe de l'énergie a été exacte. En qualité d'exemple on peut

fournir le résultat suivant : pour une série de réactions nucléaires par comparaison de mesures directes de ΔE et de Δm on calculait la vitesse de la lumière en appliquant la relation d'Einstein. On a ainsi obtenu la valeur de $c=2{,}98\cdot10^{10}$ cm/s; or, la valeur précise de $c=2{,}99\cdot10^{10}$ cm/s. La différence est de 0,4 %. Ces chiffres ne sont donnés qu'en qualité d'exemple. Actuellement, l'ensemble des résultats de la physique nucléaire permet de ne plus douter de l'exactitude absolue de la relation d'Einstein.

Dans des ouvrages scientifiques on trouve souvent l'expression que les processus s'accompagnant de la libération d'énergie (par exemple, dans les réactions nucléaires) conduisent à « une transformation de la masse en énergie ». Cette formulation est par essence fausse et introduit des confusions. La masse et l'énergie sont inséparablement liées entre elles et constituent, pour ainsi dire, les deux aspects d'une même propriété universelle de la matière et c'est pourquoi ne peuvent « se transformer » l'une dans l'autre. Il est vrai, toutefois, que dans les processus s'accompagnant d'augmentation de l'énergie cinétique la masse au repos Σm_0 subit une diminution correspondante. Mais à l'excès d'énergie cinétique ΔE_{cin} dû à la réaction correspond une masse $\frac{\Delta E_{\text{cin}}}{c^2}$ qui compense exactement la diminution de Σm_0, de même qu'à cette dernière quantité correspond l'énergie $\Sigma m_0 c^2$ qui, augmentée de ΣE_{cin}, est exactement égale à Σmc^2 d'avant la réaction.

La découverte de l'équivalence de la masse et de l'énergie a obligé de modifier essentiellement la notion même de la masse. En mécanique newtonienne la masse était définie comme une quantité de matière et était considérée comme l'expression de la matérialité du corps. Cette conception a dû être abandonnée encore avant l'apparition de la théorie de la relativité. Quand Kaufmann ainsi que d'autres chercheurs montra par des expériences directes que la masse de l'électron est fonction de la vitesse, ce fait ne pouvait pas s'accorder avec la conception de la masse régardée comme une quantité de matière. Au début on s'était efforcé de résoudre le problème en expliquant l'augmentation de masse avec la vitesse par l'apparition d'une inertie supplémentaire due au champ électromagnétique de l'électron mobile (J. Thomson) et cette inertie supplémentaire fut appelée « masse apparente ». Or par la suite il apparut que si l'on adoptait ce point de vue, toute la masse du corps électrisé devait être considérée comme une masse « apparente » (électromagnétique). Enfin, la théorie de la relativité montra que toute masse indépendamment de la présence ou de l'absence de la charge électrique doit dépendre de la vitesse suivant la loi qui a été établie expérimentalement pour des particules chargées. Ceci a conduit aux conséquences considérées plus haut qui montrèrent d'une façon particulièrement claire que la définition de la masse comme une quantité de matière n'a pas de contenu physique.

Cependant, ceci n'interdit pas de considérer la masse relativiste (dépendant de la vitesse) comme une mesure de l'inertie du corps, car le rapport de la force à la masse relativiste reste égal à l'accélération du corps.

B. THÉORIE CLASSIQUE DU RAYONNEMENT ÉLECTROMAGNÉTIQUE

§ 66. Centres élémentaires d'émission de la lumière

Le problème de l'émission de la lumière occupe une place centrale dans la théorie de la structure de l'atome, car la lumière nous procure la majeure partie de l'information sur la structure intime de l'atome. L'examen de ce problème qui nous occupera tout au long de ce livre sera précédé d'une revue sommaire de certaines questions de la théorie classique du rayonnement électromagnétique dont la connaissance est nécessaire pour la bonne compréhension des conceptions actuelles.

Après la découverte des électrons il est devenu clair que c'est justement leurs mouvements qui produisent l'émission de la lumière. D'une façon particulièrement évidente cela découlait de l'influence qu'exerçait le champ magnétique sur l'émission de la lumière, phénomène découvert en 1896 par Zeeman (effet Zeeman). La théorie de ce phénomène élaborée par Lorentz a permis de calculer la quantité e/m pour des centres élémentaires de rayonnement et il apparut que cette quantité correspondait de façon satisfaisante à la grandeur de la charge massique des électrons libres.

On doit donc examiner le mécanisme de l'émission de la lumière selon la physique classique. Malgré la carence générale du modèle statique de l'atome, un grand nombre de phénomènes optiques peut être expliqué de façon satisfaisante en considérant les électrons comme des *vibrateurs* microscopiques émettant des ondes électromagnétiques. Le rôle de modèle simple du centre élémentaire, utilisable dans une certaine mesure pour l'explication d'une série de faits d'émission de la lumière, peut ainsi être joué par l'oscillateur linéaire dont les propriétés mécaniques ont été décrites au § 46.

§ 67. Rayonnement électromagnétique d'un oscillateur linéaire

Supposons que la charge positive est liée à une masse si grande que cette charge peut être considérée comme immobile tandis que la charge négative égale en valeur absolue à la charge positive effectue des oscillations autour de cette charge positive immobile; ce système constitue justement l'oscillateur linéaire. Du point de vue électrique ce système est un dipôle. Les propriétés électriques du dipôle se caractérisent par une grandeur appelée *moment dipolaire*. Le moment dipolaire est un vecteur égal à

$$\mathbf{p}=e\mathbf{r}, \tag{67.1}$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur dirigé de la charge négative vers la charge positive. Comme le moment dipolaire est indépendant du choix de l'origine des coordonnées*), il est le plus commode de placer la charge positive à l'origine

*) Voir I. Tamm, *Principes de la théorie de l'électricité*, *Naouka*, Moscou, 1967, p. 96 (en russe).

des coordonnées; dans ce cas les composantes de $\mathfrak{p}$ seront

$$p_x = ex, \quad p_y = ey, \quad p_z = ez. \tag{67.2}$$

Le calcul du champ électromagnétique du dipôle oscillant peut se faire à l'aide des équations de Maxwell.

Sans répéter des calculs assez longs et quelque peu rébarbatifs donnons aussitôt les résultats*). Les champs électrique et magnétique d'un dipôle oscillant *à une distance suffisamment grande* de ce dernier (dans la zone dite d'onde) se caractérisent par des intensités $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ égales en valeur absolue et mutuellement perpendiculaires en direction. Pour le cas de vitesses petites par rapport à celle de la lumière ($v \ll c$), les valeurs absolues des intensités $|\mathcal{E}|$ et $|\mathcal{H}|$ au point M (fig. 111) se trouvant à la distance R du dipôle s'expriment par la formule

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{H}| = \frac{\ddot{\mathfrak{p}}(t - R/c)}{c^2 R} \sin \vartheta \text{**)} \tag{67.3}$$

Ici c est la vitesse de la lumière dans le vide, ϑ l'angle que fait la droite le long de laquelle s'effectue l'oscillation avec la direction du point M; le symbole $\ddot{\mathfrak{p}}(t - R/c)$ a la signification suivante : c'est la dérivée seconde du moment dipolaire prise, toutefois, non pas par rapport au temps t, mais par rapport à l'instant antérieur $t - R/c$. Il est évident que R/c est le temps nécessaire pour que l'ébranlement se propageant avec la vitesse c à partir de O atteigne le point d'observation M. Ainsi donc, l'apparition dans la formule (67.3) de la valeur du retard $\ddot{\mathfrak{p}}(t - R/c)$ est le signe de l'existence d'une vitesse finale de propagation du champ électromagnétique : le dipôle électrique oscillant envoie des ondes électromagnétiques qui se déplacent avec la vitesse c.

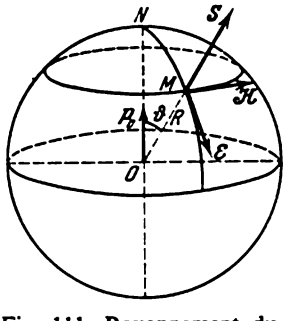


Fig. 111. Rayonnement du dipôle

Considérant que $\ddot{\mathfrak{p}} = e\ddot{\mathfrak{r}}$ on voit, les autres conditions étant inchangées, que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ à des grandes distances de O dépendent de l'*accélération* de l'électron $\ddot{\mathfrak{r}}$.

Les directions de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{H}$ se déterminent de la façon suivante : soit une sphère de rayon R et centrée en O. Choisissons pour axe polaire la direction de la droite le long de laquelle s'effectue l'oscillation du dipôle et traçons sur la sphère des méridiens et des parallèles. Dans ce cas le vecteur $\mathcal{E}$ sera dirigé suivant la tangente au méridien au point M, quant au vecteur $\mathcal{H}$ il sera dirigé suivant la tangente au parallèle passant par le même point et ceci de la façon montrée à la figure 111.

*) Voir, par exemple, I. Tamm, *Principes de la théorie de l'électricité*, § 99, *Naouka*, ou Y. Frenkel, *Electrodynamique*, t. I, 1934 (en russe).

**) La parenthèse dans la formule (67.3) n'est utilisée que pour commodité de composition et indique que $\ddot{\mathfrak{p}}$ est une *fonction* de $t - R/c$.

La densité d'énergie du champ électromagnétique est égale à

$$\varrho=\frac{1}{8\pi}(\mathcal{E}^2+\mathcal{H}^2)$$

où, si l'on tient compte de ce que dans le cas considéré $\mathcal{E}=\mathcal{H}$,

$$\varrho=\frac{1}{4\pi}\mathcal{E}^2\,\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}. \tag{67.4}$$

Comme le champ du dipôle en oscillation se propage avec la vitesse c, il passe par seconde à travers un centimètre carré dans la direction de la normale R (fig. 111) une quantité d'énergie S égale à

$$S=\varrho c=c\,\frac{\mathcal{E}^2}{4\pi}\,\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}}. \tag{67.5}$$

La grandeur S ne peut être évidemment que la valeur numérique du flux d'énergie traversant le point considéré. Elle peut être calculée de la même façon que la valeur numérique du vecteur d'Oumov-Poynting S au point considéré

$$S=|\mathbf{S}|=\frac{c}{4\pi}|[\mathcal{E}\mathcal{H}]|=\frac{c}{4\pi}\mathcal{E}\mathcal{H}\sin(\mathcal{E}\mathcal{H}).$$

Dans la zone d'onde $\mathcal{E}=\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}\perp\mathcal{H}$, ce qui donne immédiatement

$$S=\frac{c}{4\pi}\mathcal{E}^2$$

autrement dit la formule (67.5).

En y portant la valeur de $\mathcal{E}$ tirée de (67.3) on trouve

$$S=\frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3R^2}\sin^2\vartheta=\frac{e^2\ddot{r}^2}{4c^3R^2}\sin^2\vartheta \tag{67.6}$$

(les valeurs de $\ddot{p}$ ou de $\ddot{r}$ se rapportent au moment $t-R/c$!).

Cette formule montre que l'intensité du rayonnement est directement proportionnelle au carré de l'accélération et inversement proportionnelle au carré de la distance, comme il fallait s'y attendre, car le flux total d'énergie traversant la sphère de centre O reste constant, tandis que la surface de la sphère croît proportionnellement au carré du rayon. De plus, la présence dans la formule (67.6) de $\sin^2\vartheta$ entraîne une irrégularité de la répartition de l'intensité dans des directions différentes : suivant la droite des oscillations ($\vartheta=0$ et π) elle est nulle, tandis que la valeur maximale est atteinte dans la direction perpendiculaire à cette droite ($\vartheta=\pi/2$). Sur la figure 112 on a donné un diagramme polaire de la réparti-

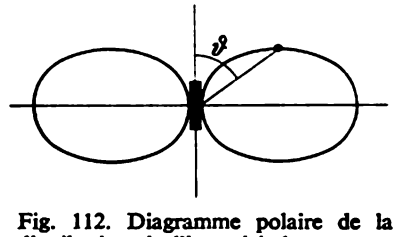


Fig. 112. Diagramme polaire de la distribution de l'intensité de rayonnement du dipôle

tion de l'intensité du rayonnement en fonction des angles. L'expérience confirme cette répartition de l'intensité. Une des plus parlantes images se rapportant à ce phénomène est l'apparition des rayons X au cours du freinage (accélération négative) des électrons sur l'anticathode. Sur la figure 113 on a représenté les résultats d'une étude expérimentale de la variation de l'intensité du rayonnement X de freinage en fonction de l'angle ϑ pour des vitesses variées des électrons. Comme on le voit, dans tous les cas pour $\vartheta=0$ et $\vartheta=\pi$ l'intensité est nulle; pour des électrons de faibles vitesses ($\beta=v/c=1/20$) le maximum d'intensité est obtenu au voisinage de $\vartheta=\pi/2$; pour des grandes vitesses ($\beta=1/3$, $1/4$) la direction du maximum est décalée dans la direction du mouvement des électrons. Cette dérogation à la formule (67.6) s'explique par le fait que la formule a été déduite pour des faibles vitesses sans tenir compte des effets relativistes. Pour des grandes vitesses Sommerfeld a obtenu la formule

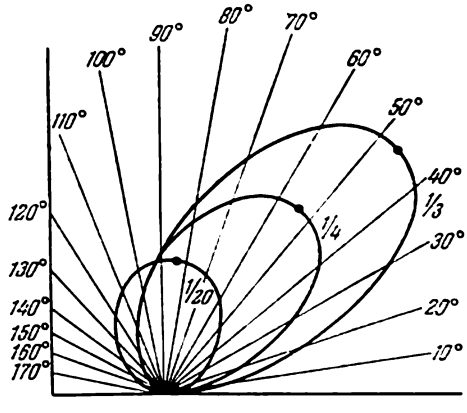


Fig. 113. Répartition angulaire de l'intensité du rayonnement de freinage des rayons X

$$S=\frac{\tilde{p}^2}{4\pi c^3 R^2}\,\frac{\sin^2\vartheta}{(1-\beta\cos\vartheta)^6}\quad(\beta=v/c),$$

qui est en accord satisfaisant avec l'expérience pour toutes valeurs de β.

§ 68. Rayonnement total et moyen de l'oscillateur

La formule (67.6) est l'expression du flux d'énergie traversant à une date donnée un point choisi dans la direction caractérisée par d'angle ϑ ou, plus précisément, de l'intensité instantanée de l'onde électromagnétique de direction déterminée.

Si l'on a besoin de calculer la quantité totale d'énergie rayonnée par un oscillateur par unité de temps, il suffit de trouver la valeur de l'intégrale

$$I=\int S\,d\sigma, \tag{68.1}$$

en étendant l'intégration à la surface de la sphère de centre en O (fig. 111).

Comme un élément de surface en coordonnées sphériques polaires est égal à

$$d\sigma=R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,$$

écrivons l'intégrale (68.1) sous une forme explicite en portant au lieu du flux S sa valeur tirée de (67.6) :

$$I=\int\int \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\vartheta R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dq=\frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3}\int_0^{2\pi} dq \int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\, d\vartheta=$$

$$=\frac{\ddot{p}^2}{2c^3}\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\, d\vartheta=\frac{\ddot{p}^2}{2c^3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta. \qquad (68.2)$$

Pour calculer la dernière intégrale introduisons une nouvelle variable $\xi=\cos\vartheta$. Les limites de l'intégration sur cette variable étant $+1$ et -1, on a

$$\int_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta=\int_{-1}^{-1}(1-\xi^2)\,d\xi=\frac{4}{3}.$$

En revenant à (68.2) on obtient finalement

$$I=\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}=\frac{2e^2\ddot{r}^2}{3c^3}. \qquad (68.3)$$

La formule obtenue donne évidemment la grandeur de l'énergie totale à l'*instant considéré*. Comme $\ddot{p}$ varie périodiquement avec le temps l'énergie totale I varie également. Du point de vue pratique, l'important est de connaître l'énergie *moyenne* et non pas l'énergie instantanée, car par suite de la fréquence élevée des oscillations de la lumière (pour la partie visible du spectre ν est de l'ordre de 10^{15} Hz) tous les instruments y compris l'œil n'arrivent pas à suivre les oscillations et ne réagissent qu'à l'énergie moyenne. Calculons maintenant cette *énergie moyenne* pour un intervalle de temps suffisamment grand, par exemple, pour une seconde. Elle est égale à la moyenne au cours d'une période

$$I=\frac{2\overline{\ddot{p}^2}}{3c^3}. \qquad (68.4)$$

Si le moment dipolaire varie suivant la loi des oscillations harmoniques : $p=p_0\cos\omega t=p_0\cos 2\pi\nu t$, alors

$$\ddot{p}=-\omega^2 p_0\cos\omega t=-4\pi^2\nu^2 p_0\cos 2\pi\nu t. \qquad (68.4')$$

Portant cette valeur de $\ddot{p}$ dans (68.3) on obtient

$$I=\frac{2\omega^4}{3c^3}p_0^2\cos^2\omega t=\frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3}p_0^2\cos^2 2\pi\nu t.$$

La valeur moyenne de I sera

$$I=\frac{2\omega^4}{3c^3}p_0^2\overline{\cos^2\omega t}=\frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3}p_0^2\overline{\cos^2 2\pi\nu t}$$

ou, comme $\overline{\cos^2\omega t}=\overline{\cos^2 2\pi\nu t}=1/2$,

$$I=\frac{\omega^4}{3c^3}p_0^2=\frac{16\pi^4\nu^4}{3c^3}p_0^2. \qquad (68.5)$$

Supposons maintenant que la charge positive du dipôle est au repos à l'origine des coordonnées, tandis que la charge négative oscille le long de l'axe x. Alors $p=ex$; le rayonnement moyen durant une période sur la base de (68.4) s'exprimera sous la forme

$$I=\frac{2e^2}{3c^3}\overline{\ddot{x}^2}. \tag{68.6'}$$

Si les oscillations sont harmoniques, alors $x=a\cos\omega t=a\cos 2\pi\nu t$ et au lieu de (68.5) on obtient

$$I=\frac{\omega^4e^2a^2}{3c^3}=\frac{16\pi^4\nu^4e^2a^2}{3c^3}. \tag{68.6}$$

§ 69. Spectre électromagnétique d'un oscillateur non harmonique

Des oscillations rigoureusement sinusoïdales et harmoniques sont une abstraction mathématique et ne se rencontrent jamais dans la nature. Dans le cas d'oscillations mécaniques la loi de la force quasi élastique n'a lieu que pour des faibles élongations. Pour des grandes élongations dans l'expression de la force apparaissent des termes aux degrés d'élongation supérieurs, et dans le spectre mécanique à côté de la fréquence fondamentale on voit surgir des harmoniques. Examinons maintenant le spectre de l'onde électromagnétique traduisant des oscillations non harmoniques et dont la loi est beaucoup plus compliquée. On continuera à considérer ces oscillations comme rigoureusement périodiques au sens mathématique du mot.

L'énergie moyenne de l'oscillateur en vibration suivant une loi non harmonique sera calculée suivant la formule (68.6')

$$I=\frac{2e^2}{3c^3}\overline{\ddot{x}^2}. \tag{69.1}$$

Puisque l'élongation x est une fonction *périodique* du temps, il est possible de la développer en série de Fourier

$$x=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}A_se^{is\omega_0t}. \tag{69.2}$$

Calculons maintenant la dérivée seconde de x, prenons-en la moyenne par rapport au temps, puis portons le résultat dans (69.1). La dérivée seconde par rapport à t sera

$$\ddot{x}=-[A_1\omega_0^2e^{i\omega_0t}+A_2(2\omega_0)^2e^{i2\omega_0t}+\ldots \\ \ldots+A_{-1}\omega_0^2e^{-i\omega_0t}+A_{-2}(2\omega_0)^2e^{-i2\omega_0t}+\ldots]. \tag{69.3}$$

Pour calculer la moyenne pour un grand intervalle de temps il suffit de trouver la moyenne pour une période $T=1/\nu_0=2\pi/\omega_0$. La moyenne du carré $\overline{\ddot{x}^2}$ sera par conséquent

$$\overline{\ddot{x}^2}=\frac{1}{T}\int_0^T\ddot{x}^2\,dt=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0}\ddot{x}^2\,dt. \tag{69.4}$$

En y portant $\ddot{x}^2$ qu'on trouvera en élevant au carré (69.3) intégrons terme à terme. Dans ce cas, il nous faudra trouver les intégrales de la forme

$$A_k A_l \int_0^{2\pi/\omega_0} e^{i(k+l)\omega_0 t}\, dt.$$

Il est facile de se convaincre par un calcul direct que toutes ces intégrales sont nulles à l'exception des cas où $l=-k$. On trouve finalement

$$\overline{\ddot{x}^2}=2[A_1A_{-1}\omega_0^4+A_2A_{-2}(2\omega_0)^4+\ldots+A_kA_{-k}(k\omega_0)^4+\ldots], \qquad (69.5)$$

ou, comme (d'après § 48) $2A_kA_{-k}=a_k^2/2$,

$$\overline{\ddot{x}^2}=\frac{1}{2}[a_1^2\omega_0^4+a_2^2(2\omega_0)^4+\ldots+a_k^2(k\omega_0)^4+\ldots].$$

Portons cette expression dans la formule (69.1) et on aura pour le rayonnement moyen

$$I=\frac{e^2a_1^2}{3c^3}\omega_0^4+\frac{e^2a_2^2}{3c^3}(2\omega_0)^4+\frac{e^2a_3^2}{3c^3}(3\omega_0)^4+\ldots \qquad (69.6)$$

ou, en passant des pulsations aux fréquences $\omega=2\pi\nu$,

$$I=\frac{16\pi^4\nu_0^4}{3c^3}e^2a_1^2+\frac{16\pi^4(2\nu_0)^4}{3c^3}e^2a_2^2+\frac{16\pi^4(3\nu_0)^4}{3c^3}e^2a_3^2+\ldots \qquad (69.6')$$

En comparant ce résultat avec (68.6) on voit que le rayonnement moyen d'un oscillateur accomplissant un mouvement périodique mais non harmonique est composé d'une somme de termes dont chacun constitue un rayonnement moyen de l'oscillateur harmonique, les fréquences de ces oscillateurs formant une série ν_0, $2\nu_0$, $3\nu_0$, ... Cela signifie que le *spectre électromagnétique d'un oscillateur non harmonique est composé de mêmes fréquences que le spectre mécanique.*

La singularité caractéristique de ce spectre est qu'il comprend une fréquence fondamentale ν_0 et ses *harmoniques*, c'est-à-dire que si l'on range le spectre dans une échelle de fréquence, on obtient une série de *raies équidistantes*. Il apparaît que c'est justement un tel spectre que donnent les ondes électromagnétiques émises par une antenne de T. S. F.; les oscillations infrarouges des ions au sein des molécules donnent un spectre composé de raies obéissant à peu près à cette loi mais se rapprochant quelque peu à mesure qu'augmente l'ordre des harmoniques. Enfin les spectres produits par les mouvements des électrons (visibles et ultraviolets) n'obéissent déjà plus à cette loi : dans ces spectres les raies se rapprochent assez rapidement à mesure que l'on passe aux fréquences de plus en plus élevées, jusqu'à leur complète fusion (voir ch. VIII). Comme on le verra ultérieurement, les raies des spectres visibles et ultraviolets obéissent à des lois complètement différentes dont l'explication ne peut être donnée que sur la base de la théorie quantique.

§ 70. Amortissement des oscillations

Jusque-là on supposait tacitement que l'énergie de l'oscillateur reste constante, c'est-à-dire que l'oscillateur pouvait rayonner des ondes électromagnétiques non amorties pendant une durée illimitée. Rigoureusement parlant, cette hypothèse ne correspond pas à la réalité, car au cours des vibrations libres d'un oscillateur l'onde électromagnétique emporte de l'énergie. Par suite, la réserve d'énergie de l'oscillateur diminue progressivement et les vibrations s'amortissent.

Cherchons d'abord la loi de la décroissance de l'énergie avec le temps. Les diverses données expérimentales montrent que l'amortissement des atomes rayonnants est faible. Par exemple, l'étude des interférences lumineuses pour de grandes différences de marche a abouti à la constatation que la longueur d'un train d'ondes rayonné par l'atome sans amortissement est supérieure à 100 millions de longueurs d'ondes. Etant donné ce fait, on peut considérer que les oscillations de l'électron diffèrent peu des oscillations harmoniques. Or pour des oscillations harmoniques on sait que l'énergie moyenne emportée par l'onde électromagnétique en l'unité de temps est égale à

$$I=\frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}. \tag{68.6}$$

Quant à la perte d'énergie de l'oscillateur en l'unité de temps, elle sera justement égale à cette quantité I, c'est-à-dire

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}$$

ou

$$dE=-\frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}\,dt. \tag{70.1}$$

L'énergie totale de l'oscillateur harmonique est

$$E=\frac{m a_0^2 \omega^2}{2}. \tag{46.14}$$

Divisant (70.1) par (46.14) on obtient

$$\frac{dE}{E}=-\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3}\,dt. \tag{70.2}$$

Introduisons la notation

$$\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3}=\gamma; \tag{70.3}$$

alors (70.2) peut être récrite sous la forme

$$\frac{dE}{E}=-\gamma\,dt.$$

D'où on trouve par intégration

$$E=E_0 e^{-\gamma t}. \tag{70.4}$$

On voit que l'énergie de l'oscillateur doit diminuer avec le temps suivant la loi exponentielle.

La constante γ introduite dans la relation (70.3) a un contenu physique. Notons avant tout que la dimension de cette constante est $[s^{-1}]$. On peut s'en convaincre facilement en notant que le produit γt figurant dans l'exposant de (70.4) doit être une grandeur sans dimension. L'inverse de γ doit, par suite, représenter un certain intervalle de temps. Désignons-le par τ; alors

$$\tau=\frac{1}{\gamma}=\frac{3mc^3}{2\omega^2e^2}=\frac{3mc^3}{8\pi^2\nu^2e^2}. \tag{70.5}$$

La relation (70.4) peut maintenant être écrite sous la forme

$$E=E_0e^{-t/\tau}. \tag{70.4'}$$

Il en découle que pour $t=\tau$ on a $E=E_0/e$, c'est-à-dire que τ est l'intervalle de temps pendant lequel l'énergie de l'oscillateur décroît de $e=2{,}718$ fois. Comme d'après (70.4') avec l'augmentation de t l'énergie tend vers zéro asymptotiquement, il est impossible d'indiquer le temps pendant lequel les oscillations continuent toujours à se manifester. En qualité de mesure conventionnelle de ce temps il est commode de se servir de la grandeur τ appelée *temps de relaxation*. Ainsi, la constante d'amortissement γ est l'inverse du temps de relaxation.

Pour se représenter l'ordre de grandeur de ce temps calculons sa valeur numérique pour le cas d'émission de la raie bleue du spectre d'hydrogène (la soi-disante raie H_β) à laquelle correspond la longueur d'onde $\lambda=4861{,}33\times10^{-8}$ cm. Dans ce cas

$$\omega=\frac{2\pi c}{\lambda}=\frac{2\pi\cdot3\cdot10^{10}}{4861{,}33\cdot10^{-8}}=3{,}87\cdot10^{15}\,s^{-1}.$$

Portant dans (70.5) cette valeur de ω de même que les valeurs des constantes universelles $m=9\cdot10^{-28}$ g, $e/mc=1{,}76\cdot10^7$ on trouve

$$\tau=\frac{3mc^3}{2\omega^2e^2}=\frac{3c}{2\omega^2m}\left(\frac{mc}{e}\right)^2=\frac{3\cdot3\cdot10^{10}}{2\cdot(3{,}87\cdot10^{15})^2\cdot9\cdot10^{-28}(1{,}76\cdot10^7)^2}\approx10^{-8}\,s.$$

Cela montre que la valeur *absolue* du temps d'émission lumineuse est très petite. Toutefois, sa valeur *relative* et, plus précisément, le rapport de τ à la période des oscillations, vaut à peu près $6\cdot10^8$, c'est-à-dire correspond à un nombre très grand : l'électron doit effectuer 6 millions d'oscillations avant que son énergie diminue de e fois.

La détermination expérimentale directe du temps de relaxation a été réalisée pour la première fois au moyen de rayons positifs. On faisait passer un pinceau de rayons positifs d'hydrogène par l'orifice pratiqué dans la cathode dans l'espace où on maintenait un vide si poussé que les atomes pouvaient « se désexciter » pratiquement sans collision. La vitesse des particules positives étant connue, on pouvait déterminer τ d'après la décroissance de l'intensité le long du pinceau lumineux. Il apparut que l'ordre de grandeur de ce temps coïncide avec celui indiqué plus haut (10^{-8} s pour $\lambda\approx5\cdot10^{-8}$ cm).

§ 71. Frottement de rayonnement

On a ainsi constaté que l'énergie du dipôle oscillant diminue avec le temps suivant la loi (70.4) ou (70.4'). Si la force engendrant des oscillations est quasi élastique, on peut alors calculer la somme des énergies potentielle et cinétique de l'oscillateur. Toutefois, cette somme ne restera pas constante par suite de l'existence de l'amortissement. En mécanique on rencontre un cas semblable : quand les vibrations d'un oscillateur mécanique s'effectuent dans un milieu visqueux, la réserve de son énergie mécanique (cinétique + potentielle) diminue avec le temps. C'est pourquoi dans le bilan énergétique apparaît un déficit : l'énergie est dissipée de façon irréversible et, en fin de compte, se transforme en chaleur. On a cependant vu au § 41 que ce déficit peut être apprécié en introduisant une certaine force dissipative R (c'est-à-dire une force aboutissant à la dissipation de l'énergie), la force de frottement. En conséquence, dans le second membre de l'équation des oscillations à côté de la force quasi élastique $-fx$ apparaît également une force de frottement.

D'une façon analogue on peut reconstituer le bilan énergétique également dans le cas d'amortissement des oscillations électromagnétiques d'un oscillateur : on peut imaginer que ces oscillations sont freinées par une force dissipative, qu'il est logique d'appeler « force du frottement de rayonnement ». Il est évident que cette force apparaît par suite d'une action inverse du champ de rayonnement de l'oscillateur sur l'oscillateur lui-même.

Trouvons maintenant l'expression explicite de cette force. En mécanique on admet habituellement que cette force de frottement dépend de la vitesse, autrement dit de la dérivée première $\dot{x}$ (pour des vitesses suffisamment faibles cette force de frottement R est tout simplement proportionnelle à $\dot{x}$). Il est évident qu'on n'est pas fondé à reporter sans études préalables cette dépendance sur la force du frottement de *rayonnement*. Pour trouver l'expression de cette force il est plus simple d'opérer de la façon suivante. Calculons la valeur moyenne du travail accompli par la force du frottement de rayonnement durant un intervalle de temps suffisamment grand par rapport à la période des oscillations. Le travail de la force R durant l'intervalle de temps dt est égal à $R\,dx = R\dot{x}\,dt$; la valeur moyenne du travail dans l'intervalle de temps de 0 à t sera donc

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}\,dt.$$

Puisqu' on a introduit la force du frottement pour décrire les pertes d'énergie, il est manifeste que la valeur moyenne du travail de cette force doit être égale à la valeur moyenne de l'énergie rayonnée par l'oscillateur durant le même intervalle de temps. Cette dernière suivant la formule (68.6') sera

$$\frac{2e^2}{3c^3}\overline{\ddot{x}^2} = \frac{2e^2}{3c^3}\cdot\frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}^2\,dt.$$

Ainsi on a

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}\,dt=-\frac{2e^2}{3c^3t}\int_0^t \ddot{x}^2\,dt. \tag{71.1}$$

Des simples transformations et une intégration par parties donnent

$$\frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}^2\,dt=\frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}\ddot{x}\,dt=\frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}\,d\dot{x}=\frac{1}{t}(\ddot{x}\dot{x})\Big|_0^t-\frac{1}{t}\int_0^t \dot{x}\,d\ddot{x}=\frac{(\ddot{x}\dot{x})_t-(\ddot{x}\dot{x})_0}{t}-\frac{1}{t}\int_0^t \dot{x}\dddot{x}\,dt.$$

Comme la vitesse $\dot{x}$ et l'accélération $\ddot{x}$ varient dans des limites finies, le choix d'un intervalle de temps suffisamment grand permettra de rendre le premier terme aussi petit que l'on veut. C'est pourquoi l'équation (71.1) donne

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}\,dt=\frac{2e^2}{3c^3t}\int_0^t \dddot{x}\dot{x}\,dt.$$

Pour satisfaire à cette égalité il suffit de poser

$$R=\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}. \tag{71.2}$$

C'est justement l'expression de la force du frottement de rayonnement qui nous intéresse*). Notons que c'est pour la première fois qu'on se trouve en présence d'une force dépendant de la dérivée *troisième* du déplacement par rapport au temps. En mécanique ces forces sont inconnues.

Puisque l'on connaît maintenant l'expression de la force du frottement, on doit en tenir compte au cours de l'établissement de l'équation des vibrations d'un oscillateur électromagnétique. Sous sa forme générale cette équation s'écrit :

$$m\ddot{x}=-fx+R;$$

substituant à R l'expression (71.2) on obtient l'équation des oscillations qui tient compte du frottement de rayonnement

$$m\ddot{x}=-fx+\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}. \tag{71.3}$$

On a obtenu une équation différentielle linéaire du troisième ordre. En cherchant sa solution sous la forme $x=e^{i\omega t}$ on aboutit à l'équation caractéristique du troisième degré. Or, en utilisant la méthode des approximations successives on est en droit de raisonner de la façon suivante. A l'approxi-

*) Il est évident que cette conclusion est seulement suffisante mais non nécessaire. Or, des calculs plus rigoureux, se basant sur la réaction du champ, conduisent à la même expression. Les lecteurs qui s'intéressent à cette question ainsi qu'aux problèmes de principe de l'électrodynamique qui y sont reliés peuvent se servir de l'ouvrage de W. Heitler, *The Quantum theory of Radiation*, Oxford, 1954.

mation d'ordre zéro on peut dans l'équation (71.3) négliger le second terme dans le deuxième membre comme petit. On revient alors à l'équation des vibrations de l'oscillateur sans frottement

$$m\ddot{x}+fx=0 \tag{71.4}$$

dont la solution est $x=e^{i\omega_0 t}$, où $\omega_0=\sqrt{f/m}$. En portant cette solution dans (71.3) et notant que $\dddot{x}=-i\omega_0^3 e^{i\omega_0 t}=-\omega_0^2\dot{x}$, il vient

$$m\ddot{x}=-fx-\frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3}\dot{x}. \tag{71.5}$$

En posant comme auparavant

$$\frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}=\gamma \tag{70.3}$$

on récrira l'équation (71.5) sous la forme

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0, \tag{71.6}$$

où $\omega_0^2=f/m$ en entendant par ω_0 la pulsation des vibrations non amorties de l'oscillateur.

La solution de l'équation (71.6) sera cherchée sous la forme

$$x=e^{int}.$$

Portant cette solution dans (71.6) on obtient après simplification par e^{int}

$$-n^2+i\gamma n+\omega_0^2=0.$$

D'où l'on tire pour n

$$n=i\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}.$$

Notons

$$\omega_f=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}=\omega_0\left(1-\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2}. \tag{71.7}$$

Comme γ est petit, tandis que ω_0 est grand, alors

$$\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\ll 1 \tag{71.8}$$

et, par suite, avec une précision suffisante

$$\omega_f=\omega_0\left(1-\frac{\gamma^2}{8\omega_0^2}\right), \tag{71.9}$$

ω_f étant la pulsation des oscillations *amorties*. Il est évident que ω_f diffère d'autant moins de ω_0 que la constante d'amortissement γ est faible. Au cas des pulsations optiques l'amortissement est si infime qu'on peut même poser $\omega_f\approx\omega_0$. C'est pourquoi dans le cas considéré on peut poser avec une approximation suffisante que

$$n=i\frac{\gamma}{3}\pm\omega_0$$

et la solution $x=e^{int}$ prend la forme

$$x=e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{\pm i\omega_0 t}.$$

La solution générale de l'équation (71.3) est donc :

$$x=e^{-\frac{\gamma t}{2}}(Ae^{i\omega_0 t}+Be^{-i\omega_0 t}). \tag{71.10}$$

Ici le premier membre est une grandeur réelle (l'élongation x); pour que le second membre soit également réel, il faut que les coefficients A et B, qui sont en général des nombres complexes, soient des nombres complexes conjugués:

$$B^*=A.$$

En notant le module commun de A et B par $a/2$ et la phase par δ on a

$$A=\frac{1}{2}ae^{i\delta}, \quad B=\frac{1}{2}ae^{-i\delta}$$

et (71.10) donne

$$x=\frac{1}{2}ae^{-\frac{\gamma t}{2}}[e^{i(\omega_0 t+\delta)}+e^{-i(\omega_0 t+\delta)}]=$$

$$=ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega_0 t+\delta)=ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(2\pi\nu_0 t+\delta). \tag{71.11}$$

Cette formule décrit le mouvement oscillatoire dont l'amplitude diminue avec le temps suivant la loi exponentielle $e^{-\gamma t/2}$. Il est évident que cette loi correspond à la loi de la décroissance de l'énergie

$$E=E_0e^{-\gamma t},$$

car l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude.

§ 72. Intégrale de Fourier et spectre continu

Les vibrations amorties d'un oscillateur constituent un phénomène qui ne peut plus être appelé périodique, car il ne répond pas à la condition essentielle de la périodicité : répétition indéfinie des mêmes amplitudes dans des intervalles de temps égaux. En effet, dans des oscillations amorties on ne rencontre pas en général les mêmes amplitudes et, en outre, tout le processus débute à une certaine époque et par suite ne s'étend pas de $-\infty$ à $+\infty$, mais seulement de 0 à $+\infty$. Ainsi donc, les oscillations amorties constituent un exemple de processus non périodique.

Etudions maintenant la question importante du développement en spectre du processus non périodique. On a vu plus haut que toute fonction traduisant un processus périodique peut être développée en série de Fourier, c'est-à-dire être représentée comme une superposition d'oscillations rigoureusement harmoniques de fréquences $\nu_0=1/T$, $2\nu_0$, $3\nu_0$, ..., où T est la période fondamentale du développement. Ce qui est réalisé mathématiquement au moyen de la série de Fourier peut être effectué expérimentalement à l'aide d'un analyseur approprié, par exemple, d'un réseau de diffraction

s'il s'agit d'oscillations lumineuses. Ainsi donc, le développement spectral d'un processus périodique, de quelque façon qu'il ne soit réalisé, donne un *spectre de raies*.

Soit maintenant une certaine fonction $f(t)$ représentée sur un intervalle AC (fig. 114) par la courbe ABC et s'annulant aux limites de l'intervalle, c'est-à-dire aux points A et C. Cette fonction traduit évidemment un processus non périodique. On peut la développer dans l'intervalle $A \ldots C$ en série de Fourier en posant $T=AC$; en prenant un nombre suffisant de termes de cette série on obtient la vraie allure de la fonction *mais ceci dans les limites de l'intervalle AC seulement*; à gauche de A et à droite de C cette série donnera des répétitions périodiques de la courbe ABC. On peut désormais élargir l'intervalle, par exemple à gauche jusqu'à E et à droite jusqu'à D, en posant que la fonction est nulle sur les segments AE et CD. Sur cet intervalle élargi on peut de nouveau développer en série de Fourier, mais cette fois la période fondamentale de développement sera $T=ED$. Il est évident que l'intervalle de développement $E \ldots D$ peut être élargi indéfiniment en faisant tendre les points E et D vers l'infini. Mais dans ce cas la période fondamentale de développement T croîtra indéfiniment et la fréquence fondamentale correspondante $\nu_0=1/T$ décroîtra de même indéfiniment. Par suite, les arguments des termes successifs de la série de Fourier $e^{\pm i2\pi s\nu_0 t}$ se rapprocheront de plus en plus avec l'augmentation de s et on peut montrer que dans cette extension infinie de l'intervalle de développement fondamental la série passera finalement à l'intégrale étendue de $-\infty$ à $+\infty$.

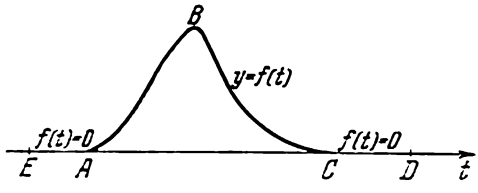


Fig. 114.

Ces raisonnements deviendront encore plus clairs une fois repris sur des formules. Soit donc une fonction non périodique $f(t)$; développons-la sur un intervalle fini entre $-T/2$ et $+T/2$ en série de Fourier

$$f(t)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi s\nu_0 t}, \quad \nu_0=\frac{1}{T}. \tag{72.1}$$

Suivant une formule connue applicable aux coefficients de développement

$$A_s=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-i2\pi s\nu_0 t}dt. \tag{72.2}$$

Remplaçant provisoirement la notation t par α et sachant que la fréquence fondamentale $\nu_0=1/T$ récrivons la formule (72.2) sous la forme

$$A_s=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha)e^{-i2\pi\frac{s}{T}\alpha}d\alpha. \tag{72.3}$$

Cette expression de A_s peut être portée dans la série (72.1) qui prend alors la forme

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_s\left[\int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha)e^{-i\frac{2\pi s\alpha}{T}}\,d\alpha\right]e^{i\frac{2\pi st}{T}}. \tag{72.4}$$

Notons maintenant s/T par ν. Comme s est un entier, les fréquences $s/T=\nu$ figurant dans le développement (72.4) changeront avec les variations successives de s par échelons finis

$$\Delta\nu=\frac{s+1}{T}-\frac{s}{T}=\frac{1}{T}.$$

Cela étant, la série (72.4) peut être représentée sous la forme

$$f(t)=\sum\left[\int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha)e^{-i2\pi\nu\alpha}\,d\alpha\right]e^{i2\pi\nu t}\Delta\nu. \tag{72.5}$$

Maintenant on réalisera le passage indiqué à la limite et plus précisément on supposera que l'intervalle $-T/2$, $+T/2$ s'élargit de $-\infty$ à $+\infty$. Comme cela a été rigoureusement démontré dans des traités de mathématiques*), la somme dans le second membre de (72.5) devient une intégrale

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)e^{-i2\pi\nu\alpha}\,d\alpha\right]e^{i2\pi\nu t}\,d\nu.$$

Cela peut s'écrire sous la forme

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu)e^{i2\pi\nu t}\,d\nu, \tag{72.6}$$

où

$$a(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)e^{-i2\pi\nu\alpha}\,d\alpha,$$

soit, en revenant aux notations précédentes, c'est-à-dire en remplaçant de nouveau α par t,

$$a(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt. \tag{72.7}$$

C'est justement la formule exprimant la relation entre les coefficients de développement d'une fonction non périodique et la fréquence.

Les formules (72.6) et (72.7) permettent des développements en spectre des processus non périodiques et, en particulier, des oscillations amorties.

Du point de vue physique un développement en série de Fourier d'une

*) Voir V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, t. II, Editions Mir, Moscou, 1970 (traduit du russe).

fonction périodique se distingue essentiellement d'un développement en *intégrale de Fourier* d'une fonction non périodique. La *série de Fourier* est composée de termes représentant des fonctions périodiques simples aux *fréquences variant d'une façon discontinue* ν_0, $2\nu_0$, ...; dans l'*intégrale de Fourier* l'intégration s'effectue par rapport aux fréquences, c'est-à-dire qu'on suppose que les fréquences varient de façon *continue*. Dans le premier cas on a affaire à un développement en un spectre de raies, dans le second, en un spectre continu. Une illustration de cette différence est donnée aux

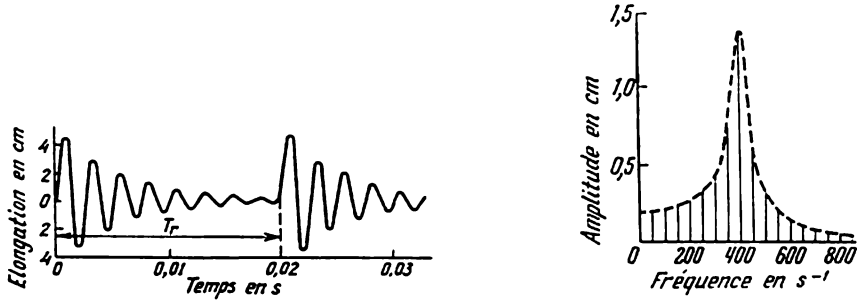


Fig. 115. Le processus périodique se décompose en un spectre de raies

figures 115 et 116 où à gauche sont représentées deux courbes d'oscillations et à droite, leurs courbes de réponse (sur l'axe des abscisses sont portées les fréquences en s^{-1} et sur l'axe des ordonnées les amplitudes, c'est-à-dire les coefficients de Fourier). La courbe de la figure 115 représente un processus non sinusoïdale mais périodique; son spectre est celui de raies. La courbe de la figure 116 montre un élément de la courbe précédente; cet élément n'est pas une courbe périodique, car on n'est pas ici en présence d'une répétition infinie de mêmes amplitudes à des intervalles de temps égaux. A droite on a montré que les raies isolées y sont tellement rapprochées que le développement donne une bande continue englobant tout un *intervalle* de fréquences constituant le domaine du *spectre continu*.

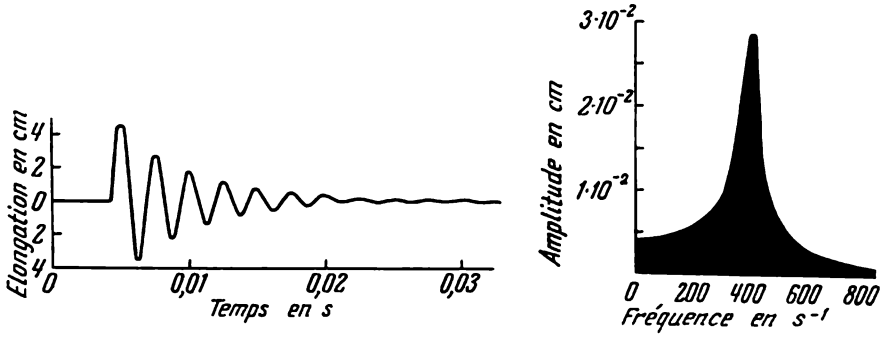


Fig. 116. Le processus non périodique se décompose en un spectre continu

§ 73. Largeur naturelle des raies spectrales

Les vibrations amorties d'un oscillateur

$$x=ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(2\pi\nu_0 t+\delta)$$

constituent d'après ce qui a été dit aux paragraphes précédents un processus non seulement inharmonique, mais également non périodique.

Son développement mathématique en spectre doit donc s'effectuer non pas à l'aide de la série mais de l'intégrale de Fourier. Il s'ensuit que le spectre sera *continu*. Plus précisément, les calculs montrent que par suite de l'amortissement des oscillations la raie spectrale *s'étale*; elle englobe le domaine du spectre continu dont la largeur $\Delta\nu$ est définie par l'amortissement γ. Pour le montrer il faut avant tout définir la fonction $f(t)$ sur l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$. On peut le faire de la façon suivante :

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{pour } t\leqslant 0, \\ ae^{-\frac{\gamma t}{2}}e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{pour } t\geqslant 0. \end{cases} \tag{73.1}$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, le développement spectral de la fonction $f(t)$ est donné par la formule

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu)e^{i2\pi\nu t}\,d\nu, \tag{73.2}$$

où l'amplitude $a(\nu)$ est définie par la formule

$$a(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt. \tag{73.3}$$

En y portant $f(t)$ tirée de (73.1) et notant que $f(t)=0$ dans l'intervalle de $-\infty$ à 0 il vient

$$a(\nu)=\int_{0}^{+\infty} ae^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{i2\pi(\nu_0-\nu)t}\,dt=\frac{a}{\frac{\gamma}{2}-i2\pi(\nu_0-\nu)}. \tag{73.4}$$

Pour trouver la distribution de l'intensité dans le spectre en fonction de la fréquence il faut calculer le carré du module $a(\nu)$*) :

$$|a(\nu)|^2=\frac{a}{\frac{\gamma}{2}-i2\pi(\nu-\nu_0)}\,\frac{a}{\frac{\gamma}{2}-i2\pi(\nu_0-\nu)}=\frac{a^2}{4\pi^2(\nu_0-\nu)^2+\frac{\gamma^2}{4}}. \tag{73.5}$$

*) L'amplitude $a(\nu)$ obtenue par calcul au moyen de (73.4) est un nombre complexe. Pour obtenir l'expression réelle de l'amplitude il aurait fallu développer en série de Fourier la demi-somme des fonctions complexes conjuguées qui remplacent $\cos(2\pi\nu_0 t+\delta)$ dans la formule des oscillations amorties. Mais comme on ne s'intéresse qu'à la valeur numérique de l'amplitude, il suffit de calculer le carré du module de l'expression complexe $a(\nu)$, ce qui d'ailleurs a été fait dans la formule (73.5). Voir plus en détails dans Max Born, *Optics*, ou R. Becker, *Theorie der Elektrizität*, Bd. 2.

Si maintenant on utilise la formule (68.4) et on prend la moyenne pour un grand intervalle de temps, on obtiendra $I_\nu=\frac{16\pi^4\nu_0^4e^2}{3c^3}|a(\nu)|^2$ [voir formule (68.6)]; remplaçant $|a(\nu)|^2$ par l'expression (73.5) on a

$$I_\nu=\frac{16\pi^4\nu_0^4e^2a^2}{3c^3}\,\frac{1}{4\pi^2(\nu_0-\nu)^2+\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{16\pi^4\nu_0^2e^2a^2}{3c^3}\,\frac{1}{4\pi^2\left(1-\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2+\frac{1}{4}\,\frac{\gamma^2}{\nu_0^2}}. \tag{73.6}$$

Introduisant les notations $\nu/\nu_0=x$, $\gamma/\nu_0=\Gamma$ récrivons la formule (73.6) sous la forme

$$I_\nu=\frac{16\pi^4\nu_0^2e^2a^2}{3c^3}\cdot\frac{1}{4\pi^2(1-x)^2+1/4\,\Gamma^2}. \tag{73.7}$$

Les formules (73.6) et (73.7) donnent la distribution de l'intensité en fonction de la fréquence, c'est-à-dire la figure du spectre d'un oscillateur amorti.

Sur la figure 117 on a représenté les variations du multiplicateur

$$f(x)=\frac{1}{4\pi^2(1-x)^2+1/4\,\Gamma^2}.$$

Comme on le voit, la courbe a un maximum bien marqué pour $x=1$ ou $\nu=\nu_0$, c'est-à-dire pour la fréquence des oscillations propres de l'oscillateur non amorti. La valeur maximale de $f(x)$ est

$$f(x)=\frac{1}{1/4\,\Gamma^2}.$$

Il est évident que la valeur de $f(x)$, égale à la moitié de la valeur maximale, s'obtient sous la condition que

$$2\pi(1-x)=\frac{1}{2}\Gamma$$

ou, en considérant que $x=\nu/\nu_0$ et $\Gamma=\gamma/\nu_0$ et en notant dans ce cas $\nu-\nu_0$ par $\Delta\nu_{1/2}$,

$$\Delta\nu_{1/2}=\gamma/4\pi. \tag{73.8}$$

$\Delta\nu_{1/2}$ est appelé demi-largeur de la raie spectrale: comme on le voit, elle est complètement définie par l'amortissement γ.

La demi-largeur $\Delta\nu_{1/2}$ au cas du spectre optique est très faible. Sur la figure 117 on a représenté le contour d'une raie spectrale pour $\Gamma=1/5$; or pour des raies spectrales étroites Γ est de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} de sorte que la largeur de la raie représentée sur la figure est fortement exagérée.

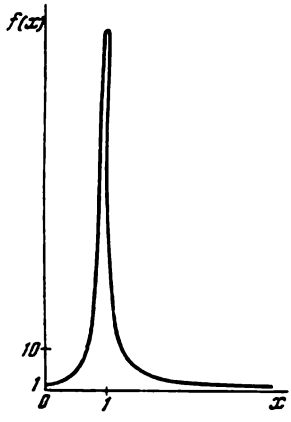


Fig. 117. Contour de la raie spectrale

Etant donné la relation existant entre γ et le temps de relaxation $\tau(\gamma=1/\tau)$, on peut récrire (73.8) sous la forme

$$\tau \Delta\nu_{1/2}=1/4\pi. \tag{73.9}$$

§ 74. Autres exemples de développement spectral des processus non périodiques

Examinons encore deux exemples de développement spectral des processus non périodiques.

a) Supposons que les oscillations s'effectuent durant un intervalle de temps limité Δt, mais sur cet intervalle de temps elles obéissent à une loi harmonique (fig. 118, *a*). On appellera ces oscillations *quasi monochromatiques*. Il est évident que toutes les oscillations réelles qu'on considère en pratique comme monochromatiques et non amorties sont en réalité des oscillations quasi monochromatiques, car elles durent un temps limité. Soit T la période et $\nu_0=1/T$ la fréquence de ces oscillations. Cherchons son développement spectral.

Puisque ces oscillations ne se prolongent pas de $-\infty$ à $+\infty$, elles constituent un processus *non périodique* et pour le développement spectral on doit utiliser l'intégrale et non pas la série de Fourier. La fonction à développer est :

$$f(t)=\begin{cases} A_0 e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{de } -\Delta t/2 \text{ à } +\Delta t/2, \\ 0 & \text{de } -\infty \text{ à } -\Delta t/2 \text{ et de } +\Delta t/2 \text{ à } +\infty. \end{cases} \tag{74.1}$$

Le développement cherché est

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i2\pi\nu t}\, d\nu,$$

où l'amplitude a_ν s'exprime par

$$a_\nu=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}\, dt.$$

En tenant compte de (74.1) et de ce que $f(t)\neq 0$ rien que dans les limites $-\Delta t/2$, $+\Delta t/2$ il vient

$$a_\nu=\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} f(t)e^{-i2\pi\nu t}\, dt=A_0\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{i2\pi(\nu_0-\nu)t}\, dt=A_0\frac{\sin\pi(\nu_0-\nu)\,\Delta t}{\pi(\nu_0-\nu)}. \tag{74.2}$$

Ce résultat peut être représenté sous la forme

$$a_\nu=A_0\,\Delta t\,\frac{\sin\pi(\nu_0-\nu)\,\Delta t}{\pi(\nu_0-\nu)\,\Delta t} \tag{74.3}$$

ou, en notant $A_0\,\Delta t=A$ et $\pi(\nu_0-\nu)\Delta t=\xi$,

$$a_\nu=A\frac{\sin\xi}{\xi}.$$

La fonction $\frac{\sin \xi}{\xi}$ varie de la manière suivante : son maximum principal s'obtient pour $\xi=0$, alors $\frac{\sin \xi}{\xi}=1$; puis elle s'annule pour $\xi=\pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm m\pi$. Sur les segments intermédiaires elle possède des maximums secondaires pour des valeurs de ξ satisfaisant à la condition $\operatorname{tg} \xi=\xi$; ces valeurs sont $\xi=1{,}430\pi=4{,}49$; $2{,}459\pi=7{,}73$; $3{,}47\pi=10{,}90$, etc. Les valeurs de $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$ pour ces maximums sont

ξ	0	4,49	7,73	10,90
$\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2$	1	0,047	0,016	0,008

Il en découle qu'avec une erreur ne dépassant pas 5 % on peut admettre que la variation de la fonction $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$ se concentre uniquement sur l'intervalle de $\xi=\pm\pi$. Au-delà de cet intervalle la fonction (dans les limites de précision mentionnées) peut être considérée comme nulle. Etant donné que

$$|a_\nu|^2=A^2\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2=(A_0\,\Delta t)^2\left[\frac{\sin \pi(\nu_0-\nu)\,\Delta t}{\pi(\nu_0-\nu)\,\Delta t}\right]^2,$$

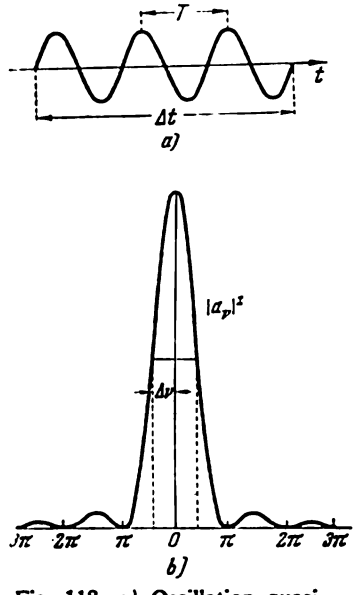


Fig. 118. *a)* Oscillation quasi monochromatique. *b)* Spectre de cette oscillation

$|a_\nu|^2$ possède un maximum principal pour $\nu=\nu_0$ (fig. 118, b), c'est-à-dire pour la fréquence des oscillations quasi monochromatiques, et devient nulle pour

$$|\pi(\nu_0-\nu)\,\Delta t|=\pi. \qquad (74.4)$$

On voit ainsi que quoique la fréquence $\nu_0=1/T_0$ corresponde à une intensité maximale, le spectre s'étend à tout l'intervalle continu de fréquences $\nu-\nu_0=\Delta\nu$. De (74.4) on déduit immédiatement la relation entre $\Delta\nu$ et la durée Δt des oscillations non amorties

$$\Delta\nu\,\Delta t=1. \qquad (74.5)$$

Si l'on prend en considération non seulement le maximum principal, mais aussi les maximums secondaires, alors la condition (74.4) peut être remplacée par

$$|\pi(\nu_0-\nu)\,\Delta t|=m\pi,$$

ce qui donne $\Delta\nu\,\Delta t=2, 3, \ldots, m$, de sorte qu'au lieu de (74.5) on peut écrire l'inégalité

$$\Delta\nu\,\Delta t\geqslant 1. \qquad (74.6)$$

Cette inégalité montre que plus la durée Δt des oscillations quasi monochromatiques est grande, plus l'intervalle spectral $\Delta\nu$ est étroit et inversement.

b) A titre de second exemple examinons un ébranlement isolé décrit par la fonction

$$f(t)=e^{-\beta^2 t^2}$$

(voir la courbe du haut sur fig. 119).

Le paramètre β dont la dimension est $[s^{-1}]$ caractérise la violence de l'ébranlement. La mesure de cette violence est justement l'intervalle de temps $\Delta t=\frac{1}{\beta}$ pendant lequel l'amplitude de l'ébranlement varie de e fois. L'amplitude du développement spectral se calcule d'après la formule connue

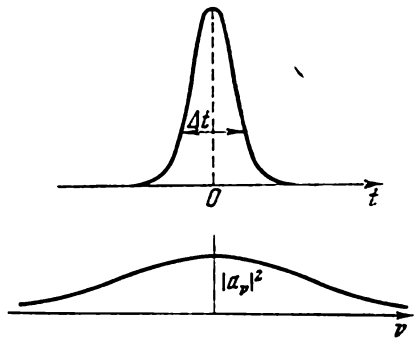


Fig. 119. Impulsion isolée et son spectre

$$a_\nu=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta^2t^2+i2\pi\nu t)}\,dt.$$

L'exposant sous l'intégrale peut être transformé comme suit :

$$-(\beta^2t^2+i2\pi\nu t)=-\left[\beta^2t^2+i2\pi\nu t+\left(\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2\right]+\left(\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2=-\left(\beta t+\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2},$$

de sorte que

$$a_\nu=e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\beta t+\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2}dt.$$

Posant

$$\beta t+i\frac{\pi\nu}{\beta}=z,$$

on obtient

$$a_\nu=\frac{e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}}}{\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}},$$

d'où

$$|a_\nu|^2=\frac{\pi}{\beta^2}e^{-2\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}}.$$

La répartition de l'énergie dans le spectre dépend évidemment du facteur exponentiel. La largeur de la courbe est définie par la condition

$$2\frac{\pi^2(\Delta\nu)^2}{\beta^2}=1$$

ou, comme $\beta = 1/\Delta t$, alors $|\sqrt{2\pi}\,\Delta\nu\,\Delta t| = 1$, c'est-à-dire

$$\Delta\nu\,\Delta t = 1/\sqrt{2\pi}.$$

Comme dans les cas étudiés précédemment, l'extension du spectre continu est dans le rapport inverse à la durée de l'impulsion Δt.

Pour tous les exemples examinés dans les deux paragraphes précédents se dégage la conclusion générale suivante : la durée de l'ébranlement $f(t)$ et l'étendue du spectre de fréquences sont en relation inverse : plus l'ébranlement est bref, plus large est le spectre et inversement.

L. Mandelchtam a illustré ce phénomène dans ses cours par une image très parlante. Soit un rayon de lumière frappant une plaque dont la face se déplace rapidement perpendiculairement au rayon. La longueur de la trace laissée par le rayon sur la plaque sert justement de mesure de la durée de l'ébranlement $f(t)$. Plaçons maintenant la plaque dans un spectrographe composé d'un prisme et d'une lentille. Si $f(t)$ est un sinus (ébranlement infinie), alors dans le plan focal on aura un point correspondant à une fréquence ν bien déterminée. Mais si $f(t)$ n'est pas un sinus, on aura alors sur la plaque non pas une fréquence unique mais tout un spectre étalé. Plus le trait sur la plaque mobile est court, plus le spectre est étalé et inversement.

§ 75. Modèle planétaire de l'atome

Jusque-là on a uniquement pris pour modèle de la source de lumière un oscillateur linéaire, c'est-à-dire un dipôle effectuant des oscillations suivant la loi harmonique ou inharmonique. Or, suivant le modèle planétaire de Rutherford, l'atome doit être considéré comme un rotateur, c'est-à-dire comme une particule chargée négativement en rotation suivant une orbite fermée autour d'un noyau positif. Il n'est pas difficile de se convaincre que les propriétés électromagnétiques d'un tel modèle ne présentent rien de nouveau par rapport à ce qui a été déjà trouvé pour le rayonnement d'un oscillateur linéaire.

Supposons pour commencer, à des fins de simplification, un électron en rotation uniforme autour d'un noyau sur une orbite circulaire. Cette rotation sera un mouvement accéléré; par suite, elle doit s'accompagner d'un rayonnement d'ondes électromagnétiques.

Pour calculer l'intensité de ce rayonnement décomposons le mouvement circulaire uniforme en deux oscillations harmoniques suivant les axes x et y :

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t.$$

Il est évident qu'au lieu de l'électron en révolution uniforme sur une orbite circulaire on peut imaginer le rayonnement de deux dipôles effectuant des oscillations de même pulsation ω et de même amplitude a dans des directions perpendiculaires.

D'après les formules du § 68 on a pour les intensités du rayonnement des deux dipôles

$$J_x=\frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3}\cos^2\omega t, \quad J_y=\frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3}\sin^2\omega t.$$

Le rayonnement total pour l'orbite circulaire sera donc

$$J=J_x+J_y=\frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3}=\frac{32\pi^4\nu^4e^2a^2}{3c^3}.$$

En comparant le résultat obtenu avec la formule (68.6) du rayonnement moyen du dipôle pour une période, on voit que le rayonnement total pour l'orbite circulaire est indépendant du temps et est deux fois supérieur au rayonnement moyen du dipôle, ce qui se comprend, car le rayonnement des deux dipôles J_x et J_y est polarisé dans des plans perpendiculaires.

Le cas se complique quelque peu quand on aborde l'étude du mouvement général sur l'*ellipse de Kepler* de l'électron lié au noyau par la force de Coulomb. Dans ce cas les composantes du mouvement suivant les axes des coordonnées x et y ne sont plus des oscillations harmoniques simples. Mais elles peuvent toujours être développées en séries de Fourier, c'est-à-dire représentées comme le résultat de superposition des oscillations harmoniques simples. En choisissant pour axes de coordonnées les axes principaux de l'ellipse on a

$$x=a\cos\omega t+a'\cos 2\omega t+a''\cos 3\omega t,$$

$$y=b\sin\omega t+b'\sin 2\omega t+b''\sin 3\omega t.$$

Si l'on calcule, comme au § 69, les intensités moyennes des oscillations sur l'axe x et sur l'axe y, puis on fait la somme de ces intensités (les oscillations dans des directions perpendiculaires n'interfèrent pas!), il apparaîtra que le rayonnement correspond à un assortiment d'oscillateurs de pulsations ω, 2ω, 3ω, ...

Ainsi donc, l'électron en rotation suivant l'ellipse de Kepler rayonne tout un spectre de pulsations composé de la pulsation fondamentale et de ses harmoniques.

§ 76. Moment magnétique orbital et théorème de Larmor

Un électron en révolution sur une orbite constitue un courant annulaire. Selon les lois de l'électrodynamique ce courant annulaire doit posséder un moment magnétique déterminé, c'est-à-dire se comporter dans un champ magnétique comme un dipôle magnétique. D'un autre côté, du point de vue mécanique, le courant électronique annulaire, par suite d'une rotation rapide de l'électron, doit posséder des propriétés d'une toupie. Il y a une relation bien déterminée entre les propriétés magnétiques de l'orbite électronique caractérisées par son moment magnétique, et ses propriétés mécaniques dont la mesure est le moment cinétique. Etablissons cette relation.

Comme il est connu de l'électrodynamique*), le moment magnétique d'un courant fermé est égal à

$$M=\frac{1}{c}JS, \tag{76.1}$$

où J est l'intensité du courant (en unités électrostatiques), S l'aire contournée par le courant et c la vitesse de la lumière. Si le nombre de révolutions de l'électron sur l'orbite circulaire par unité de temps est $\nu=1/T$, où T est la période de révolution, on a évidemment

$$J=e\nu=e/T. \tag{76.2}$$

Par suite

$$M=\frac{1}{c}e\nu\pi r^2$$

ou, en remplaçant ν par la pulsation $\nu=\omega/2\pi$,

$$M=\frac{e}{2c}\omega r^2=\frac{e}{2mc}mr^2\omega. \tag{76.3}$$

Mais $mr^2\omega=mr^2\varphi$ est évidemment le moment cinétique l de l'orbite électronique. Donc,

$$M=\frac{e}{2mc}l. \tag{76.4}$$

C'est justement la relation cherchée.

Supposons maintenant que l'atome comprenant un électron orbital est placé dans un champ magnétique. D'après ce qui a été dit, l'atome doué d'un moment magnétique déterminé doit se comporter dans un champ extérieur comme un aimant, c'est-à-dire se placer de façon que son moment magnétique soit parallèle ou antiparallèle au champ. Or, cette orientation est empêchée par le fait que l'atome est aussi une toupie. Il s'ensuit que dans le champ magnétique l'atome doit se comporter de la même manière qu'une toupie ordinaire dans le champ de gravitation terrestre, autrement dit, l'atome doit effectuer des mouvements de précession autour de la direction du champ. Si l'on examine maintenant l'orbite de l'électron par rapport à un référentiel immobile, alors l'orbite cesse d'être plane et devient en général très complexe. L'étude se simplifie grandement si l'on introduit un référentiel mobile en mouvement de précession avec l'orbite. Dans ce système de coordonnées l'orbite conserve sa forme et il ne reste qu'à déterminer la vitesse angulaire de la précession.

Introduisons deux référentiels dont l'un sera lié à la direction du champ magnétique $\mathcal{H}$. Ce référentiel sera dit « immobile ». Le second système est mobile et reste solidaire de l'orbite de l'électron et, par suite, est en mouvement de précession par rapport au référentiel « immobile »; l'axe de la précession coïncide avec la direction du champ. Soit o la vitesse angulaire de

*) Voir I. Tamm, *Principes de la théorie de l'électricité*, Naouka, Moscou, 1967 (en russe).

précession; la vitesse de l'électron parcourant l'orbite est v par rapport au référentiel immobile et v', par rapport au référentiel mobile. Dans le référentiel mobile l'électron est soumis à des forces complémentaires d'inertie (force centrifuge $m\varrho o^2$, où ϱ est la distance de l'électron à l'axe de précession) et de Coriolis $\mathbf{C}=2m(\mathbf{v}'\times\mathbf{o})$. Supposant que la vitesse linéaire communiquée à l'électron par le mouvement de précession est faible devant la vitesse orbitale de l'électron en l'absence de précession, c'est-à-dire que

$$\varrho o \ll v,$$

on peut négliger la force centrifuge d'inertie comparée à la force de Coriolis. L'appréciation du degré d'approximation (voir plus bas) liée à cette supposition se justifie complètement. Puis dans les limites de cette approximation on peut dans l'expression de la force de Coriolis remplacer la vitesse v' par la vitesse v par rapport au référentiel immobile. Ainsi donc,

$$\mathbf{C}=2m(\mathbf{v}\times\mathbf{o}). \tag{76.5}$$

Or on sait que sur l'électron animé dans le champ magnétique d'une vitesse $\mathbf{v}$ agit la force

$$\mathbf{F}=-\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathcal{H}). \tag{76.6}$$

Le signe moins est la conséquence de ce que la charge de l'électron est négative. Si la direction du champ $\mathcal{H}$ est parallèle à l'axe de précession, il est alors facile de se convaincre en déterminant, d'après la règle connue du produit vectoriel, le sens des forces C et F que ces forces agissent dans des sens opposés. L'orbite ne peut donc conserver ses dimensions et sa forme qu'à la condition que ces forces soient numériquement égales, $C=-F$. Dans ce cas (76.5) et (76.6) donnent

$$2mvo\sin(\widehat{\mathbf{vo}})=\frac{e}{c}v\mathcal{H}\sin(\widehat{\mathbf{v}\mathcal{H}}). \tag{76.7}$$

Comme l'axe de précession est parallèle à la direction du champ, on a

$$\sin(\widehat{\mathbf{vo}})=\sin(\widehat{\mathbf{v}\mathcal{H}})$$

et (76.7) donne

$$o=\frac{e}{2mc}\mathcal{H}. \tag{76.8}$$

Le résultat obtenu peut être formulé de la façon suivante : l'électron décrit dans un champ magnétique faible la même orbite qu'en l'absence de champ, mais seulement par rapport au référentiel qui est en mouvement de précession par rapport au champ magnétique de pulsation

$$o=\frac{e}{2mc}\mathcal{H}.$$

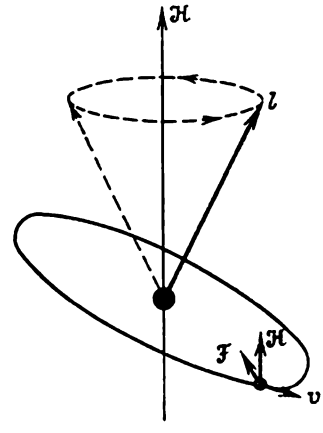


Fig. 120.

L'action du champ magnétique sur une orbite électronique peut ainsi être réduite à la communication à cette orbite d'une précession de vitesse o (fig. 120). C'est l'énoncé du théorème de Larmor.

Exercice. La source lumineuse est placée dans un champ magnétique d'intensité 40 000 œrsteds. Calculer la pulsation de la précession de Larmor dont est animée l'orbite électronique, ainsi que la longueur d'onde correspondant à cette pulsation. (*Réponse :* $\lambda = 0{,}54$ cm.)

§ 77. Effet Zeeman

Il est connu qu'à la fin de sa vie Faraday a intensément cherché des preuves de l'existence d'une relation entre le champ électromagnétique et la lumière. Il s'efforçait, suivant sa propre expression, « d'éclairer les lignes de forces et d'aimanter la lumière ». Il est également connu qu'il avait réussi à observer l'aimantation de la lumière sous forme de rotation du plan de polarisation dans un champ magnétique (phénomène de Faraday). Poursuivant ses recherches dans cette voie il tenta (en 1862) vainement de découvrir l'influence du champ magnétique sur les raies spectrales. C'est seulement 34 années plus tard, en 1896, que Zeeman utilisant des champs beaucoup plus intenses et des spectrographes plus perfectionnés réussit à observer la décomposition des raies spectrales en plaçant la source lumineuse entre les pôles d'un électro-aimant.

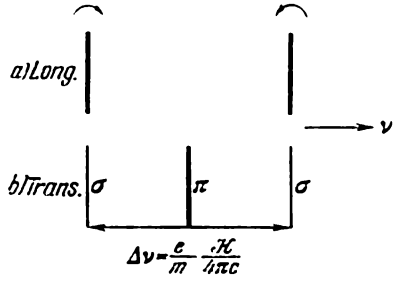


Fig. 121. Schéma de la décomposition de la raie spectrale dans l'effet Zeeman normal

Ce phénomène a été expliqué quantitativement par Lorentz sur la base de la théorie électronique. D'après la théorie de Lorentz, en regardant perpendiculairement à la direction du champ, on doit voir la raie spectrale se décomposer en trois composantes se disposant symétriquement (fig. 121, *b*) la distance entre la raie médiane et les raies latérales dans l'echelle des fréquences devant être égale à

$$\Delta\nu = \frac{e}{4\pi mc}\mathcal{H}\ \text{s}^{-1}. \qquad (77.1)$$

Les raies décomposées doivent présenter une polarisation linéaire : perpendiculaire au champ pour les raies latérales; parallèle au champ pour la raie médiane. Quand l'observation s'effectue dans la direction du champ, la raie médiane doit disparaître, tandis que les raies latérales doivent présenter une polarisation circulaire à rotation de sens contraire (fig. 121, *a*).

Toutes ces prédictions de la théorie se confirmèrent dans nombre de cas avec une précision étonnante. Mais en même temps dans un grand nombre de cas la nature de la décomposition se révéla beaucoup plus complexe : le nombre de composantes était supérieur à trois et la grandeur

de l'écartement ne correspondait pas à celle obtenue avec la formule (77.1), quoique liée à cette dernière par une relation simple.

La décomposition conforme à la théorie de Lorentz est appelée *décomposition normale* ou *effet Zeeman normal*. Dans tous les autres cas, le phénomène observé est dit *anormal* ou *effet Zeeman complexe*.

Essayons maintenant d'expliquer l'effet normal du point de vue de la théorie électronique classique. Soit un électron décrivant une orbite circulaire. Admettons, par exemple, qu'il s'agisse de l'atome d'hydrogène au noyau chargé positivement $(+e)$ autour duquel gravite un électron. Supposons de même que le champ magnétique est perpendiculaire au plan de l'orbite (fig. 122).

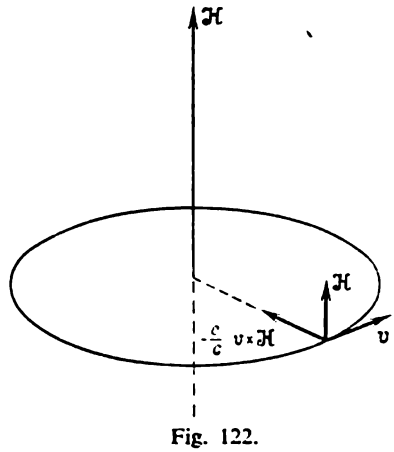


Fig. 122.

La force qui maintient l'électron sur l'orbite est égale en valeur absolue à

$$F=\frac{e^2}{r^2}. \tag{77.2}$$

Cette force F est égale à la force centrifuge d'inertie

$$\frac{e^2}{r^2}=mr\omega_0^2, \tag{77.3}$$

où ω_0 est la pulsation de révolution de l'électron en l'absence du champ magnétique. Après l'enclenchement du champ magnétique l'électron est soumis en plus de la force de Coulomb (77.2) à la force de Lorentz, égale à $\frac{e}{c}(v\times\mathcal{H})$. Si maintenant on utilise la règle du tire-bouchon pour la détermination de la force de Lorentz, alors de la figure 122 il découle aussitôt que cette force est dirigée suivant le rayon. Nonobstant, l'influence du champ magnétique se manifeste non pas dans *l'accroissement ou le décroissement du rayon de l'orbite*, mais sous forme de variation de la vitesse angulaire de rotation de l'électron, le rayon restant invariant.

Cette assertion paraît inattendue, toutefois, elle peut être démontrée par un calcul rigoureux*). On ne fera pas ici ce calcul en se limitant exclusivement aux explications suivantes. Lors de l'enclenchement du champ magnétique ce dernier n'atteint pas aussitôt sa valeur finale, mais s'établit au cours d'un intervalle de temps connu. Cet intervalle est si grand par rapport à la période de révolution de l'électron que tout le processus peut être considéré comme infiniment lent rappelant les processus adiabatiques en thermo-

*) Voir l'Annexe III à la fin du livre.

dynamique. C'est pourquoi à chaque moment doit s'établir une égalité entre la résultante des forces de Coulomb et de Lorentz d'une part et la force centrifuge d'inertie, d'autre part. Cette dernière, toutefois, variera, car l'accroissement du champ magnétique, d'après la loi de l'induction électromagnétique de Faraday (plus précisément, selon la seconde équation électrodynamique de Maxwell), engendrera un champ électrique rotationnel dont l'axe de symétrie coïncide avec la direction du champ magnétique. C'est justement ce champ électrique rotationnel qui agit sur l'électron en l'accélérant ou en le décélérant. Le fait que le processus doit évoluer de la façon décrite découle déjà de ce que la force de Lorentz est incapable de modifier la fréquence des révolutions, car elle est perpendiculaire à la vitesse et, par suite, n'effectue aucun travail.

L'équilibre entre les forces agissant sur l'électron et la force centrifuge d'inertie doit, comme on l'a mentionné, s'établir à chaque moment du temps y compris évidemment l'état d'équilibre quand le champ magnétique atteint sa valeur stationnaire $\mathcal{H}$. Désignons la vitesse angulaire de l'électron dans cet état par ω; on a d'abord pour la valeur numérique de la force de Lorentz $\frac{e}{c} r\omega\mathcal{H}$, puisque $v=r\omega$ et $\sin(\widehat{v\mathcal{H}})=1$; cette dernière égalité résulte du fait que le champ est perpendiculaire au plan de l'orbite. En second lieu, la condition d'équilibre mentionnée sera

$$\frac{e^2}{r^2}+\frac{e}{c} r\omega\mathcal{H}=mr\omega^2$$

ou, en tenant compte de (77.3),

$$mr\omega_0^2+\frac{e}{c} r\omega\mathcal{H}=mr\omega^2,$$

d'où

$$\omega^2-\frac{e}{mc}\mathcal{H}\omega-\omega_0^2=0. \tag{77.4}$$

Le coefficient associé à ω dans le second terme du premier membre est égal évidemment à la double pulsation de Larmor o, car

$$o=\frac{e}{2mc}\mathcal{H} \tag{76.8}$$

et, par suite,

$$\omega^2-2o\omega-\omega_0^2=0. \tag{77.5}$$

En cherchant la solution de cette équation du second degré en ω on obtient

$$\omega=o\pm\sqrt{\omega_0^2+o^2}. \tag{77.6}$$

La quantité o est petite devant ω_0. En effet, le champ magnétique le plus intense réalisé jusqu'à présent (expériences célèbres de P. Kapitsa) a atteint environ 500 000 œrsteds. Pour ces champs

$$o=\frac{1}{2}\frac{e}{mc}\mathcal{H}=0{,}5\cdot 1{,}76\cdot 10^7\cdot 5\cdot 10^5=4{,}4\cdot 10^{12}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Or ω_0 pour des raies spectrales du domaine visible et ultraviolet du spectre est de l'ordre de 10^{15} s^{-1}. Par conséquent, $(o/\omega_0)^2$ est de l'ordre de 10^{-6} et on est en droit de négliger la quantité o^2 placée sous le radical de (77.6) par rapport à la quantité ω_0^2 et d'écrire

$$\omega = o \pm \omega_0 \quad \text{ou} \quad \omega_1 = \omega_0 + o, \quad \omega_2 = -\omega_0 + o. \tag{77.7}$$

Ainsi donc, la pulsation de l'électron tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (si l'on observe du bout du vecteur champ) dans un champ magnétique augmente de o et la pulsation de l'électron tournant dans le sens contraire diminue de la même quantité. Si maintenant on passe de la pulsation à la fréquence, on aura

$$\Delta\nu = \pm\frac{o}{2\pi} = \pm\frac{e}{4\pi mc}\mathcal{H}\ s^{-1}. \tag{77.8}$$

C'est justement la formule de Lorentz (77.1).

§ 78. Effet Zeeman. Cas général

Au paragraphe précédent on a examiné le cas particulier de l'influence du champ magnétique sur une orbite électronique dont le plan est perpendiculaire à la direction du champ. Et on a constaté que dans ce cas également la variation de la pulsation de rotation de l'électron est justement égale à la pulsation de Larmor o [voir (77.7)]. Examinons maintenant un cas plus général et montrons que la théorie décrit rigoureusement tous les aspects du phénomène, y compris le cas de polarisation des raies.

Soit un dipôle dont la charge positive est supposée placée à l'origine des coordonnées; quant à l'électron de charge $-e$ il est lié à la charge positive par une force quasi élastique. L'équation des oscillations libres de l'électron est

$$m\ddot{\mathbf{r}} + f\mathbf{r} = 0.$$

En présence du champ magnétique on voit apparaître la force de Lorentz $-\frac{e}{c}(\mathbf{v}\times\mathcal{H})$ de sorte que l'équation des oscillations après division par m et remplacement de f/m par ω_0^2 prend la forme

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\frac{e}{mc}(\mathbf{v}\times\mathcal{H}). \tag{78.1}$$

Supposons maintenant que le champ magnétique est dirigé suivant l'axe z de sorte que

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y = 0, \quad \mathcal{H}_z = \mathcal{H}.$$

Notant que $\frac{e}{mc}\mathcal{H}$ est le double de la pulsation de Larmor écrivons trois équations scalaires correspondant à l'équation vectorielle (78.1) :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2o\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y - 2o\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z \qquad &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{78.2}$$

Les solutions des deux premières équations différentielles seront cherchées sous la forme

$$x=ae^{i\omega t}, \quad y=be^{i\omega t}, \tag{78.3}$$

où les amplitudes a et b sont, en général, des nombres complexes. Portant (78.3) dans (78.2) il vient

$$\left.\begin{aligned} a(\omega_0^2-\omega^2)+2io\omega b=0,\\ b(\omega_0^2-\omega^2)-2io\omega a=0. \end{aligned}\right\} \tag{78.4}$$

On a obtenu un système d'équations homogènes linéaires pour les inconnues a et b. Comme on le sait ce système admet une solution non nulle à la seule condition de l'égalité à zéro du déterminant des coefficients, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2-\omega^2, & 2i\omega o \\ -2io\omega, & \omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0, \tag{78.5}$$

d'où en explicitant le déterminant on trouve*)

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2=4o^2\omega^2. \tag{78.6}$$

On obtient ainsi deux équations du second degré

$$\omega_0^2-\omega_1^2=2o\omega_1, \quad \omega_0^2-\omega_2^2=-2o\omega_2. \tag{78.7}$$

Des quatre solutions de ces équations seules deux sont positives

$$\omega_1=-o+\sqrt{\omega_0^2+o^2}, \quad \omega_2=o+\sqrt{\omega_0^2+o^2}. \tag{78.8}$$

D'où, comme $o\ll\omega_0$ (voir p. 236)

$$\omega_1=\omega_0-o, \quad \omega_2=\omega_0+o, \quad \omega_2-\omega=2o=\frac{e}{mc}\mathcal{H},$$

et le déplacement de la fréquence par rapport à ν_0 sera comme auparavant

$$\Delta\nu=\pm\frac{o}{2\pi}=\pm\frac{e}{4\pi mc}\mathcal{H}. \tag{78.9}$$

Ainsi donc, les fréquences des oscillations sur les axes x et y, c'est-à-dire

---

*) La condition (78.5) a un sens simple : de la première équation (78.4) il vient $\frac{a}{b}=-\frac{2io\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$, et de la seconde équation $\frac{a}{b}=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2io\omega}$. Pour que les solutions des deux équations soient compatibles, les seconds membres des ces égalités doivent être égaux entre eux

$$-\frac{2io\omega}{\omega_0^2-\omega^2}=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2io\omega},$$

ce qui donne immédiatement (78.6).

perpendiculaires au champ $\mathcal{H}$, sont décalées justement de la quantité donnée par la formule de Lorentz.

On peut maintenant déterminer la nature de la polarisation des deux composantes décalées. De (78.4) on a

$$\frac{a}{b}=-i\frac{2o\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{78.10}$$

En y portant $\omega=\omega_1$, c'est-à-dire la pulsation de la composante décalée *vers le rouge* et notant que d'après la première des équations (78.7) $2o\omega_1=\omega_0^2-\omega_1^2$ on obtient $a/b=-i$ ou $a=-ib=be^{-i\pi/2}$. Cela signifie que les oscillations sur l'axe x *retardent* en phase sur les oscillations sur l'axe y de $\pi/2$. Les deux oscillations produisent une rotation circulaire et, en tenant compte du retard de phase mentionné, une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire une polarisation circulaire droite.

De la même façon en portant dans (78.10) $\omega=\omega_2$, c'est-à-dire la pulsation de la composante décalée vers le violet et compte tenu de la seconde des équations (78.7) on obtient

$$a/b=i \quad \text{ou} \quad a=be^{i\pi/2},$$

d'où il suit que la composante ω_2 est polarisée suivant *le cercle gauche*. Enfin, la troisième équation du système (78.2)

$$\ddot{z}+\omega_0^2 z=0$$

montre que les oscillations sur l'axe z s'effectuent sans modifications de pulsation; la polarisation y est linéaire. Toutefois, un observateur regardant en face les lignes du champ magnétique (direction longitudinale) ne verra pas cette troisième composante, car le rayonnement du dipôle dans la direction des oscillations est nul.

Ainsi donc, dans la direction longitudinale l'effet Zeeman se réduit à deux raies *décalées*; la polarisation dans les deux cas est circulaire, la raie décalée vers le rouge étant polarisée suivant le cercle droit et la raie décalée vers le violet, suivant le cercle gauche.

L'observateur regardant perpendiculairement à la direction du champ magnétique, par exemple suivant l'axe x, verra la raie non décalée, car les oscillations sur l'axe z donnent un rayonnement maximal dans la direction perpendiculaire. Il verra également les *deux* composantes décalées pour la raison suivante : le dipôle oscillant sur l'axe x ne rayonne pas suivant cet axe. Mais les deux oscillations donnent dans le plan xy des composantes à polarisation circulaire. C'est pourquoi l'observateur qui regarde l'axe x en face verra la projection des oscillations circulaires sur l'axe y, tandis que l'observateur regardant en face l'axe y les verra en projection sur l'axe x. Ainsi donc, l'effet Zeeman transverse produit trois raies : une raie non décalée et deux raies décalées. Les trois raies sont polarisées linéairement: la raie non décalée correspond au vecteur électrique oscillant suivant la direction du champ, les raies décalées, à ceux vibrant perpendiculairement à ce champ.

Comme on l'a mentionné au début de ce paragraphe, au cas de l'effet Zeeman normal tous les résultats de la théorie se confirment avec une grande précision. Mais l'effet anormal n'a pu être expliqué que dans le cadre de la théorie quantique.

§ 79. Rayonnement Vavilov-Cerenkov

Au § 67 on a vu que suivant l'électrodynamique classique le rayonnement d'ondes électromagnétiques n'apparaît qu'au cas d'un mouvement accéléré, c'est-à-dire non uniforme des électrons ou, plus généralement, des particules chargées. On y admettait tacitement que la *vitesse* des particules rayonnantes était inférieure à celle de la lumière. D'un autre côté on s'était aperçu depuis longtemps que dans le cas de systèmes mécaniques le mouvement uniforme d'un corps dans un *milieu* à la vitesse dépassant la vitesse de propagation des ondes élastiques *dans ce milieu* engendrait des ondes d'un genre particulier. Sur la figure 123 on a donné la photographie d'une balle en vol réalisée au moyen d'une méthode permettant de déceler la variation de l'indice de réfraction de l'air (méthode de Töpler). On voit que le vol de la balle s'accompagne d'une onde de choc; c'est justement cette onde qui produit le sifflement caractéristique du projectile en vol. Tout le monde connaît également l'onde de sillage qu'on voit se former à la surface de l'eau lors du déplacement rapide d'un hydroglisseur. Dans tous ces exemples le mécanisme de l'apparition de l'onde, c'est-à-dire le mécanisme du rayonnement d'un mobile en mouvement uniforme, est le même.

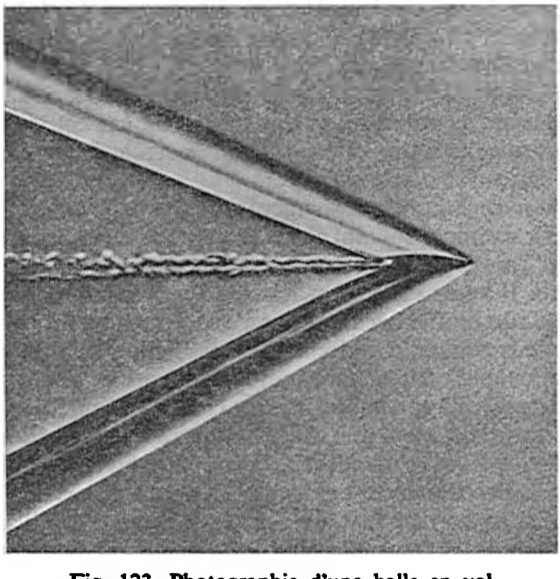


Fig. 123. Photographie d'une balle en vol

Il s'avère de même qu'une charge électrique (en particulier un électron) se déplaçant uniformément dans un milieu peut rayonner une onde électromagnétique à condition que la vitesse de la charge mobile soit supérieure dans le milieu donné à celle de la lumière. Il faut souligner qu'il s'agit de la vitesse de la lumière *dans le milieu* et *non pas dans le vide*. La signification de cette remarque réside dans le fait que la vitesse de la lumière dans le vide $c=3\cdot10^{10}$ cm/s d'après la théorie de la relativité est une vitesse limite : aucun corps ne peut se mouvoir à une vitesse égale ou supérieure à cette vitesse. Mais la vitesse de la lumière dans le milieu est égale à c/n, où n est l'indice de réfraction (quantité supérieure à l'unité dans le domaine de dispersion normale) et puisque $c/n<c$, la restriction imposée par la théorie de la relativité, au cas d'un mouvement dans un milieu n'agit plus. De plus, quand on parle de la vitesse de la lumière on a en vue la vitesse de phase, c'est-à-dire la vitesse de déplacement de la surface d'onde de phase égale (voir § 136).

Le rayonnement électromagnétique accompagnant les électrons en mouvement dans un milieu avec une vitesse supérieure à celle de la lumière a été découvert en 1934 par P. Cerenkov qui travaillait sous la direction de S. Vavilov. C'est pourquoi ce rayonnement est appelé rayonnement Vavilov-Cerenkov*). Au début Cerenkov s'est donné pour tâche d'étudier la lueur émise par les solutions sous l'influence des rayons γ du radium. La lueur des liquides soumis à un rayonnement radio-actif a été déjà observée par Marie Curie près de 25 années avant les travaux de Cerenkov. Mais Marie Curie avait interprété ces lueurs comme des luminescences familières. De même dans les travaux du physicien français L. Mallet (1926-1929), qui d'ailleurs étaient inconnus de Cerenkov, cette lueur s'expliquaint de façon erronée.

En étudiant la lumière émise par les solutions sous l'influence des rayons γ du radium, Cerenkov montra qu'à côté de la luminescence de la solution on observe une faible lueur des solvants eux-mêmes. Il s'avéra que ce rayonnement s'observait dans tous les liquides purs : eau, benzène, etc. Mais le résultat le plus important de ces premières recherches fut la démonstration de ce que ces faibles lueurs n'étaient pas de la luminescence. C'était important parce que de nombreux liquides purs, par exemple l'eau, sous l'action du rayonnement ultraviolet produisaient une faible lueur bleue dont les propriétés étaient incontestablement celles de la luminescence. Par contre, certaines propriétés du rayonnement produit sous l'action des rayons γ du radium, étudié par Cerenkov, différaient sensiblement de celles de la luminescence. Ces propriétés singulières furent décelées par Cerenkov au moyen d'expériences quantitatives fort délicates par suite de la faiblesse de la lueur. Ces propriétés sont : la luminescence des solutions peut être arrêtée par certaines impuretés ajoutées à la solution en des petites concentrations (iodure de potassium, aniline, etc.), quant à la lueur des liquides purs produite par les rayons γ elle ne peut être réduite par de tels procédés;

*) Ce rayonnement est généralement dénommé tout simplement effet Cerenkov.

d'autre part, la luminescence présente une certaine polarisation qui peut également être atténuée par l'adjonction d'impuretés ou tout simplement, par chauffage, or dans le rayonnement Cerenkov on n'observe pas de telles répercussions sur la polarisation. Tout ceci montre qu'à la différence de la luminescence qui se caractérise par une durée limite (10^{-7} à 10^{-8} s) le rayonnement Vavilov-Cerenkov est instantané. Enfin, on montra peu de temps après que ce rayonnement est produit non pas directement par les rayons γ dont la nature est électromagnétique mais par des électrons produits par ces derniers dans la substance : un rayonnement aux mêmes propriétés singulières était également engendré par des courants d'électrons rapides sous la forme de rayons β des substances radio-actives. Ce qui est particulièrement important, comme l'ont montré les expériences postérieures, c'est que le rayonnement Vavilov-Cerenkov est directionnel : il est émis seulement en avant sous un angle parfaitement défini par rapport à la direction de la propagation des rayons γ, alors que la lumière de luminescence est émise uniformément dans toutes les directions.

Cette propriété se trouve à la base de la juste explication du rayonnement Vavilov-Cerenkov, comme étant provoqué par le mouvement des électrons avec une vitesse supérieure à celle de la lumière. Cette explication a été donnée par I. Franck et I. Tamm en 1937*).

Pour comprendre comment peut apparaître un rayonnement électromagnétique au cours d'un mouvement rapide des électrons dans un certain milieu examinons tout d'abord le côté qualitatif de la question. Soit un électron mobile dans un milieu, qu'on supposera rigide pour ne pas compliquer les conditions de l'étude, autrement dit supposons qu'il s'agit, par exemple, du verre. Sur la figure 124, *a* *AB* est la trajectoire de l'électron. Les molécules du milieu peuvent être considérées comme sphériques. Mais autour de la charge mobile, par exemple au point *P*, le milieu se polarise : les molécules se déforment de manière que les charges positives se déplacent vers l'électron mobile, tandis que les charges négatives se dirigent dans la direction opposée; dans ce cas les molécules acquièrent les propriétés des dipôles élémentaires orientés de façon déterminée par rapport à *P*. Au cours du passage du point *P* à un autre point de la trajectoire, par exemple à *P'*, autour de *P* la polarisation disparaît, ce qui déclenche une brève impulsion électromagnétique. Or, par suite, de la complète symétrie de la polarisation tant par rapport à l'axe *PP'* que suivant l'azimut par rapport au point *P'*, à des grandes distances le champ et donc le rayonnement seront absents.

Maintenant il faut prendre en considération que la disparition de la polarisation ne s'effectue pas instantanément mais prend un certain temps (temps de relaxation). Mais si l'électron se déplace avec une vitesse proche de celle de la lumière dans un milieu, la symétrie de la polarisation du milieu peut être ébranlée, comme c'est montré à la figure 124, *b*. La polarisation dans la région où se trouvait auparavant l'électron n'a pas eu le temps de disparaître, tandis que dans la région *P* elle s'est déjà établie. Ce dérange-

*) En 1959 les travaux de P. Cerenkov, I. Franck et I. Tamm reçurent le prix Nobel.

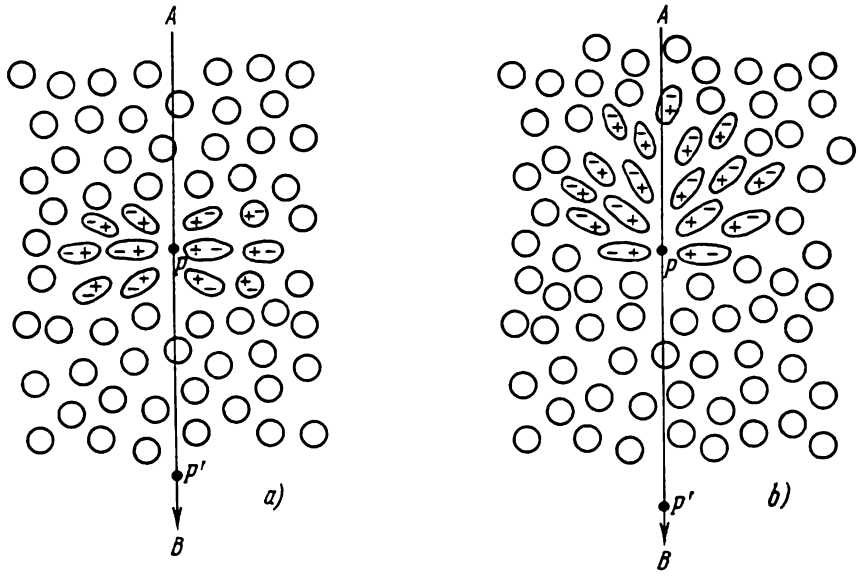


Fig. 124. Illustration du mécanisme du rayonnement Vavilov-Cerenkov. Polarisation du diélectrique sous l'action d'une particule chargée mobile : *a)* au cas d'une faible vitesse; *b)* au cas d'une grande vitesse (d'après Jalley)

ment de la symétrie se traduit par l'apparition en chaque point de la trajectoire de l'électron d'une impulsion électromagnétique instantanée engendrant un champ également à des grandes distances. Toutefois, pour que ces impulsions instantanées non compensées puissent former une onde se propageant dans l'espace les impulsions produites en différents points de la trajectoire de l'électron doivent remplir une condition de cohérence déterminée qu'on retrouvera en utilisant la construction élémentaire d'Huygens.

Considérons un électron se mouvant dans la direction *AB* (voir fig. 125) dans un milieu à indice de réfraction n avec une vitesse $v > c/n$. Il est manifeste que

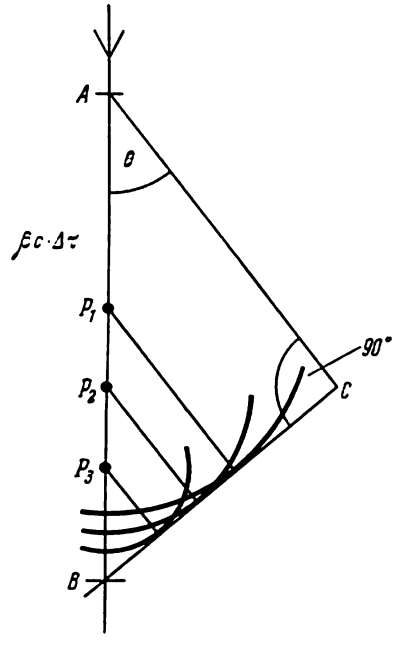


Fig. 125. Construction d'Huygens qui permet d'expliquer la cohérence du rayonnement

les ondes d'Huygens (impulsions électromagnétiques) émanant des points $P_1, P_2, \ldots$ de la trajectoire de l'électron atteindront un certain plan BC à la même phase en se propageant sous un tel angle ϑ par rapport à la direction de la trajectoire de l'électron pour lequel l'onde émanant de A parcourra le traject AC égal à $(c/n)\,\Delta t$ durant le temps que mettra l'électron pour parcourir le trajet AB égal à $v\,\Delta t$. Dans toutes les autres directions les ondes élémentaires s'éteindront par interférence. Mais comme on le voit immédiatement du dessin à cette condition $(c/n)\,\Delta t = v\,\Delta t \cos\vartheta$. D'où

$$\cos\vartheta = 1/\beta n, \quad \text{où} \quad \beta = v/c. \tag{79.1}$$

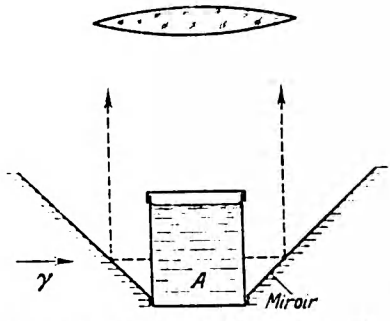


Fig. 126. Schéma de l'expérience de Cerenkov démontrant la nature directionnelle du rayonnement

De cette égalité qui constitue le résultat principal de la théorie il suit que le rayonnement n'est possible qu'à la condition que $\beta n > 1$, c'est-à-dire que $v > c/n$. La condition $\beta n = 1$ définit l'énergie de seuil pour laquelle le rayonnement devient possible. Cette énergie dépend évidemment de l'indice de réfraction n.

L'émission directionnelle de ce rayonnement fut démontrée par Cerenkov au moyen de l'expérience suivante (fig. 126). Un pinceau de rayons γ pénètre dans un récipient A rempli de liquide. Le rayonnement apparaissant dans le récipient après réflexion sur un miroir conique frappe l'objectif d'un appareil photographique. Sur la figure 127 on a représenté les photographies obtenues de cette façon. La figure 127, *a* donne l'image obtenue quand le récipient contient une solution luminescente : l'anneau uniformément éclairé montre que l'intensité de la luminescence est indépendante de la direction. Sur la figure 127, *b* et *c* est représentée la distribution suivant les directions

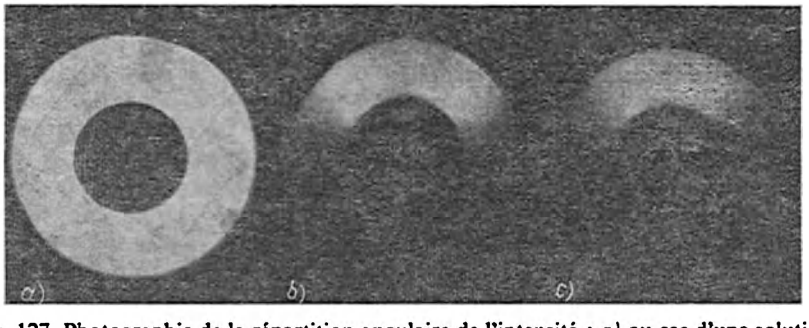


Fig. 127. Photographie de la répartition angulaire de l'intensité : *a)* au cas d'une solution luminescente; *b)* et *c)* dans des liquides purs pour $n = 1{,}5804$ (cinnamate d'éthyle) et $n = 1{,}3371$ (eau)

de l'intensité du rayonnement Vavilov-Cerenkov pour deux liquides à indice de réfraction différent. On voit nettement que dans ce cas au lieu d'un anneau uniforme on obtient deux taches.

Au cas où le rayonnement Vavilov-Cerenkov s'obtient avec des rayons γ la géométrie de l'expérience est insuffisamment définie, car le rayonnement est produit non pas par les rayons γ eux-mêmes, mais par les électrons créés par ces derniers tout au long de la trajectoire. C'est pourquoi l'expérience de Cerenkov qu'on vient de décrire a acquis une importance de principe primordiale car elle a montré la nature directionnelle du rayonnement, mais par suite de l'indétermination de sa géométrie elle n'autorise qu'une justification qualitative de la relation (79.1). La justification quantitative de cette relation et, en particulier, de la relation entre l'angle ϑ et l'indice de réfraction du milieu fut donnée en 1938 par Collins et Rayling avec un faisceau d'électrons β permettant une canalisation rigoureuse. Le schéma de cette expérience est représenté à la figure 128. Un faisceau d'électrons d'énergie bien définie de 2 MeV débitée par un générateur électrostatique traversait un système de fentes (collimateur). Le pinceau parallèle obtenu de cette façon frappait un film mince suspendu entre des miroirs placés sous un angle de 45° l'un par rapport à l'autre, comme c'est montré à la figure 128, *a*. Par suite de la faible épaisseur du film, l'étendue de la région où apparaissait le rayonnement Vavilov-Cerenkov pouvait être négligée à l'échelle des dimensions de l'instrument en supposant le rayonnement émanant d'un seul point ce qui est montré sur le dessin schématique. La figure 128, *b* montre la disposition des taches obtenues sur la plaque photographique. Avec ce dispositif on a obtenu pour des feuilles de mica, de verre et de cellophane aux indices $n=1{,}59$; 1,47 et 1,53 respectivement les valeurs suivantes de ϑ : 53° 30′; 45° 15′; 50° 0′, alors que d'après la formule (79.1) on obtenait 52° 10′; 46° 30′; 49° 22′. En tenant compte des erreurs inévitables liées aux simplifications admises pendant les calculs ainsi que des erreurs de mesure, on peut considérer que la coïncidence est remarquable.

La difficulté des premières expériences de Cerenkov était due avant tout

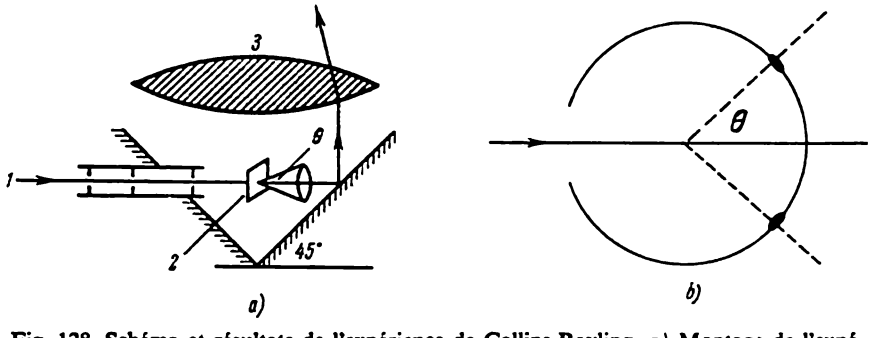


Fig. 128. Schéma et résultats de l'expérience de Collins-Rayling. *a)* Montage de l'expérience : *1* — pinceau d'électrons d'énergie 2 MeV; *2* — film mince; *3* — lentille. *b)* Image obtenue sur la plaque photographique

à la faible intensité des faisceaux de rayons γ et β des substances naturellement radioactives et, en second lieu, à l'absence de détecteurs du rayonnement observé suffisamment sensibles. Actuellement les expériences avec le rayonnement Vavilov-Cerenkov se réalisent couramment. En effet, en qualité de source d'émission on peut se servir de faisceaux rigoureusement parallèles de particules chargées de très grande intensité obtenus au moyen d'accélérateurs décrits dans l'expérience de Collins et Rayling et en qualité de détecteurs, faire appel soit à des plaques photographiques, soit à des multiplicateurs électroniques d'une énorme sensibilité. D'autre part, les multiplicateurs peuvent être utilisés dans divers circuits radiotechniques d'amplification.

Sur les figures 129 et 130 on a illustré de façon claire l'expérience réalisée à l'Institut unifié de recherches nucléaires pour la conférence Nobel de P. Cerenkov. Le schéma de principe est donné à la figure 129 : un faisceau de protons d'énergie de 660 MeV est dirigé de l'accélérateur (synchrocyclotron) vers le corps R où apparaissait le rayonnement Vavilov-Cerenkov.

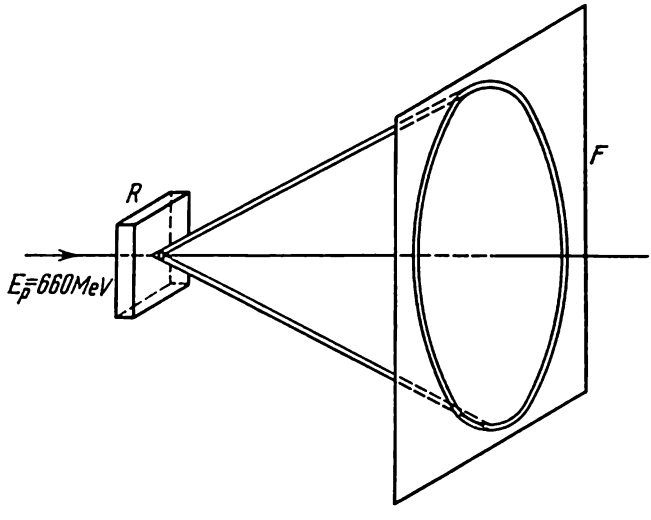


Fig. 129. Schéma de l'expérience permettant de déceler la distribution spatiale du rayonnement Vavilov-Cerenkov

Ce rayonnement frappait la plaque photographique F placée perpendiculairement à la direction du pinceau de protons. Comme le rayonnement Vavilov-Cerenkov se propage dans l'espace le long de la surface d'un cône d'angle au sommet égal à 2ϑ, il doit apparaître sur la plaque un anneau (section du cône par le plan de la plaque). Sur la figure 130 on montre que ce phénomène se réalise effectivement. La tache centrale très intense vue avec l'anneau est formée par le faisceau de protons ayant traversé l'objectif. Il faut également noter que la largeur limite de l'anneau est la conséquence

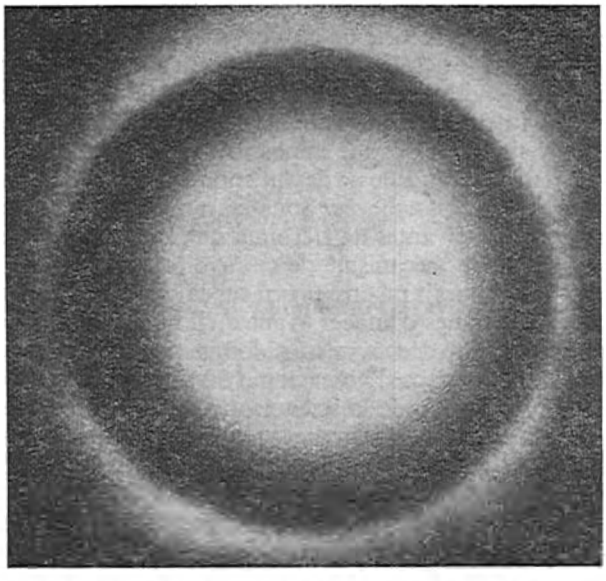


Fig. 130. Photographie obtenue dans l'expérience de la distribution spatiale de l'intensité du rayonnement. La tache centrale est formée par le faisceau de protons

de ce que l'indice de réfraction n varie selon les rayons de longueur d'onde différente et, par suite, le faisceau se propageant sur la surface du cône subit au sein même du milieu une décomposition spectrale, la partie interne de l'anneau doit avoir une couleur rouge et la partie externe une couleur violette. Des photographies en couleurs confirment ce phénomène.

Indépendamment de son importance de principe le rayonnement Vavilov-Cerenkov joue un grand rôle pratique. Rappelons tout d'abord les compteurs de particules rapides à effet Vavilov-Cerenkov. Chaque particule rapide traversant un milieu produit une lueur. Il est vrai que l'intensité de cette lueur est très faible (sur 1 cm de trajet dans un milieu à $n=1,5$ il est émis environ 200 à 300 photons). Toutefois, le nombre d'électrons détectés sur la photocathode s'accroît déjà dans le multiplicateur des millions de fois, de plus le multiplicateur est branché sur un circuit radiotechnique où l'impulsion subit une amplification complémentaire grâce à quoi la particule peut être détectée. Ces compteurs, dits compteurs à effet Cerenkov, ont reçu une large application. A beaucoup d'égards ils présentent des avantages par rapport aux autres compteurs de particules chargées.

Ces derniers temps on a proposé et discuté d'autres modes d'application de l'effet Vavilov-Cerenkov, depuis la production d'ondes électromagnétiques millimétriques jusqu'au projet d'accélérateurs de particules.

En conclusion, notons un aspect intéressant et instructif de l'historique de la découverte du rayonnement des particules chargées se mouvant à des

vitesses supérieures à celle de la lumière. En 1904, c'est-à-dire l'année précédant l'apparition de la théorie de la relativité, A. Sommerfeld publia une étude dans laquelle il calculait le rayonnement d'une charge se mouvant dans le vide avec une vitesse dépassant celle de la lumière dans le vide. Mais l'année suivante fut rendue publique la théorie de la relativité d'après laquelle ce mouvement est postulé impossible et de ce fait l'étude de Sommerfeld tomba dans l'oubli. Elle ne devint connue à Franck et Tamm qu'une fois leur propre recherche achevée. Sous ce rapport un grand intérêt présentent les remarques suivantes de I. Tamm qu'il fit à sa conférence Nobel.

« Vous voyez que le mécanisme de ce rayonnement est fort simple. Le phénomène lui-même aurait pu être prévu sur la base de l'électrodynamique classique plusieurs dizaines d'années avant qu'il ne fut effectivement découvert. Mais pourquoi cette découverte a si longtemps traîné. Il me paraît que nous sommes ici en présence d'un exemple fort instructif et assez banal de l'histoire du développement de la science, quand le progrès scientifique est freiné par l'application insuffisamment critique des principes physiques justes en eux-mêmes à des phénomènes sortant du domaine de l'application de ces principes.

Pendant plusieurs dizaines d'années on enseigna à des jeunes physiciens que la lumière (et les ondes électromagnétiques en général) ne peuvent être émises que pour des mouvements non uniformes des charges électriques. Dans la démonstration de ce théorème, de façon explicite ou tacite, on s'appuyait sur le fait que la théorie de la relativité interdisait des mouvements à des vitesses supérieures à celle de la lumière; d'après cette théorie aucun corps matériel n'est capable d'atteindre la vitesse de la lumière. Néanmoins, pendant longtemps, cette théorie était considérée comme juste sans aucune restriction.

Plus encore, quand, avec I. Franck nous avions déjà mis au point la théorie mathématiquement correcte du rayonnement Vavilov-Cerenkov, nous avions tout de même tenté par tous les moyens, qu'aujourd'hui nous nous étonnions d'avoir appliqué, de réconcilier nos résultats avec l'affirmation qu'une accélération est nécessaire au rayonnement. Et, seulement le jour suivant après notre premier rapport sur cette théorie au colloque de l'Institut de Physique, qu'une vérité évidente nous sauta aux yeux : la vitesse limite pour des corps matériels est la vitesse de la lumière dans le vide (qu'on désigne par c), tandis que la charge se mouvant dans le milieu avec une vitesse constante v commence à rayonner si $v > c'(\omega)$, la valeur de $c'(\omega)$ étant déterminée par les propriétés du milieu. Si $c'(\omega) < c$, cette condition est complètement remplie sans déroger aux exigences de la théorie de la relativité ($c' < v < c$) ».

CHAPITRE VI

RAYONNEMENT DU CORPS NOIR ET HYPOTHÈSE DU QUANTUM D'ÉNERGIE

§ 80. Physique classique et problème du rayonnement thermique

Dans le chapitre précédent on a montré comment la physique classique expliquait le rayonnement électromagnétique des atomes. On a vu qu'une série de conséquences de la théorie électromagnétique de la lumière et de la théorie électronique coïncidaient avec les résultats de l'expérience. S'y rapporte, par exemple, la distribution du rayonnement suivant les différentes directions, la largeur des raies spectrales, l'effet Zeeman normal et une série d'autres phénomènes non abordés dans notre exposé. De plus, on a remarqué que certaines conséquences sont soit en contradiction avec l'expérience, soit possèdent une application limitée. Ainsi, par exemple, la nature du spectre de raies électromagnétiques ne correspond aux exigences de la théorie classique que pour des ondes longues (domaine des ondes longues de l'infrarouge et des ondes radio-électriques) et la contredit dans le domaine du spectre optique.

Mais la physique classique fut le plus fortement mise en brèche quand elle fut appliquée aux problèmes du rayonnement thermique. C'est justement en étudiant ce problème qu'on a aperçu pour la première fois les points faibles de la mécanique classique et de l'électrodynamique et qu'il a fallu introduire l'hypothèse des quanta en contradiction absolue avec tout l'esprit de la physique classique.

Pour introduire le lecteur dans le vif du sujet on montrera auparavant les contradictions inconciliables rencontrées par la physique classique dans ce problème.

L'expérience de tous les jours nous apprend que les corps solides chauffés à des températures suffisamment élevées deviennent incandescents, c'est-à-dire commencent à émettre de la lumière visible. Mais aux températures plus basses ils rayonnent également de l'énergie sous forme d'ondes dites thermiques, autrement dit, de rayons infrarouges.

Pour cette raison dans la suite sous l'expression de rayonnement thermique on n'entendra pas spécialement les ondes longues de l'infrarouge mais on utilisera cette expression uniquement pour souligner la nature de sa source.

Supposons maintenant plusieurs corps chauffés à des températures différentes et pour plus de rigueur plaçons ces corps à l'intérieur d'un enceinte présentant une enveloppe parfaitement réfléchissante. Même si à

l'intérieur de cette enceinte on fait un vide poussé, les corps échangeront leur énergie entre eux par rayonnement. En outre, comme le rayonnement de chaque corps ne dépend que de sa température propre mais non pas de la température des corps environnants (loi de Prevost), les corps plus chauds se refroidiront, car ils émettent beaucoup plus d'énergie qu'ils n'en reçoivent des corps environnants, et les corps moins chauffés s'échaufferont, car ils acquièrent plus d'énergie qu'ils n'en cèdent. Comme, d'autre part, les ondes électromagnétiques émises par ces corps se propagent avec des vitesses finies, l'espace à l'intérieur de l'enceinte sera toujours remplie d'énergie rayonnante. *L'expérience montre* qu'en fin de compte il s'établit obligatoirement un état stationnaire auquel tous les corps acquièrent une même température, c'est-à-dire absorbent par unité de temps autant d'énergie qu'ils en émettent, et la densité de rayonnement dans l'espace environnant atteint une grandeur correspondant à la température considérée.

Ce phénomène est tellement connu qu'il apparaît comme une conséquence naturelle des lois de la physique classique, or si l'on y pense, il est complètement incompréhensible justement du point de vue de la physique *classique*.

Eclairons-le par un exemple simple. Supposons qu'on a placé dans l'enceinte mentionnée un morceau de fer dont la surface est rendue si noire qu'elle absorbe toute l'énergie incidente. Il est rigoureusement connu qu'un tel morceau de fer à la température de 0 °C émet par centimètre carré de sa surface $3 \cdot 10^5$ erg par seconde, et en équilibre thermique absorbe en même temps du milieu environnant une quantité égale d'énergie par seconde. Il est aussi bien connu que l'espace entre les parois de l'enceinte et la surface du morceau de fer et, en général, *dans la partie de l'espace au sein de l'enceinte non occupée par des particules de la substance* la densité d'énergie d'équilibre à 0 °C est égale à $4 \cdot 10^{-5}$ erg/cm^3. D'un autre côté, la densité d'énergie thermique à l'intérieur même du morceau de fer pour une même température est d'environ $8 \cdot 10^9$ erg/cm^3, c'est-à-dire de $2 \cdot 10^{14}$ fois plus grande que la densité d'énergie de rayonnement. Cette énergie thermique est, comme on le sait, celle des vibrations des atomes du fer autour de la position d'équilibre. On arrive ainsi à une conclusion remarquable: en équilibre thermodynamique entre les atomes de la substance en vibration et le rayonnement électromagnétique presque toute l'énergie est concentrée dans les atomes en vibration et seulement une infime partie de cette énergie se rapporte au rayonnement qui se trouve en équilibre avec eux.

C'est ce phénomène justement qui est complètement incompréhensible du point de vue de la mécanique classique. Soit un modèle simple de l'expérience réalisée plus haut : à la surface de l'eau remplissant un réservoir flottent des bouchons réunis par des ressorts de façon qu'ils puissent vibrer l'un par rapport à l'autre. Faisons vibrer ces bouchons; alors ils communiqueront leur énergie (« rayonnement ») à l'eau à la surface tranquille de laquelle on voit se former des ondes. Ces ondes se propageront à la surface

dans des directions variées; en se réfléchissant sur les parois du réservoir, se divisant en des ondes de plus en plus petites elles finiront, par suite de la viscosité, par transformer progressivement leur énergie en chaleur. Il est évident qu'en fin de compte l'expérience doit aboutir à la cessation des vibrations des bouchons et à la transmission de toute leur énergie au milieu environnant.

Il est impossible d'imaginer qu'à l'état final les bouchons soient en vibration intense et que l'eau ne reçoive aucune énergie. Mais c'est justement ce qui arrive dans le cas d'équilibre entre un corps matériel chauffé et le rayonnement. Comme on l'a vu, presque toute l'énergie s'y concentre dans les vibrations des atomes, quant au rayonnement il n'accapare qu'une partie infime de l'énergie.

Choisissons un autre modèle d'exprérience. Supposons qu'en qualité de modèle de corps rayonnant soit choisi au lieu des bouchons des grains de plomb également réunis par des légers ressorts et suspendus dans une enceinte fermée contenant de l'air. Si maintenant on fait vibrer fortement ces grains de plomb puis on les abandonne à eux-mêmes, ils engendreront dans l'air des ondes acoustiques qui progressivement se fractionneront et s'éteindront par suite de la viscosité de l'air, exactement de la même façon que les ondes à la surface du liquide. L'état final du système sera celui où les grains de plomb seront au repos en état d'équilibre et toute leur réserve d'énergie initiale passera aux molécules de l'air. Plus précisément, les grains de plomb exécuteront des vibrations browniennes infimes à des vitesses correspondant à leur masse. Or dans ce cas, pratiquement toute l'énergie du système appartiendra aux molécules du gaz.

La théorie cinétique des gaz explique complètement le cheminement de ce phénomène. En effet, l'énergie cinétique des molécules biatomiques de l'air en état d'équilibre à la température T est égale, comme on le sait, à $5/2\ nkT$, où n est le nombre de molécules; l'énergie cinétique de n' grains en mouvement brownien est égale à $3/2\ n'kT$. L'énergie totale du système en équilibre devra donc être $(5/2\ n+3/2\ n')\ kT$. Comme le nombre de molécules n est infiniment plus grand que celui des grains n', il est manifeste que toute l'énergie est pratiquement égale à $5/2\ nkT$. Autrement dit, en cas d'équilibre toute l'énergie doit passer des grains de plomb aux molécules de l'air.

On voit donc que le phénomène décrit pour un système de particules « rayonnant » et un milieu dans lequel ce rayonnement se propage est tout à fait contraire à ce qui se passe *suivant l'expérience* dans le cas d'équilibre d'un corps matériel et d'un champ électromagnétique (rayonnement thermique). La difficulté s'élevant en relation avec le rayonnement thermique réside justement dans le fait *que selon la physique classique également dans le cas d'équilibre du rayonnement électromagnétique de corps matériels enfermés dans une enceinte* pratiquement toute l'énergie doit passer au champ électromagnétique.

§ 81. Rayonnement équilibré dans une enceinte close

Passons maintenant à l'étude du problème du rayonnement afin de nous convaincre de la justesse de la conclusion faite à la fin du paragraphe précédent. Supposons comme auparavant une enceinte à parois athermanes portées à une température T. Les parois de l'enceinte émettront des ondes électromagnétiques et absorberont les ondes provenant de l'intérieur de l'enceinte; en cas d'équilibre, en 1 s il sera émis autant d'énergie qu'il en est absorbée et, comme le rayonnement se propage avec une vitesse finie, il s'établira à l'intérieur de l'enceinte un champ électromagnétique de densité d'énergie constante

$$u=\frac{1}{8\pi}(\mathscr{E}^2+\mathscr{H}^2). \tag{81.1}$$

Au lieu de la densité de rayonnement volumique u il est commode, surtout pour des buts pratiques, d'utiliser une autre grandeur, l'intensité spécifique ou la luminance surfacique de rayonnement. Cette grandeur se détermine de la façon suivante : soit dans le champ de rayonnement un élément de surface $d\sigma$ orienté de manière quelconque. Cette surface est traversée dans toutes les directions par un rayonnement. On peut imaginer une double multitude de cônes élémentaires s'appuyant sur cette surface $d\sigma$ et considérer ensuite que le rayonnement se propage à l'intérieur de ces cônes. La quantité d'énergie traversant en l'unité de temps la surface $d\sigma$ et pénétrant à l'intérieur du cône $d\Omega$ dont l'axe fait avec la normale à la surface l'angle ϑ est égale à

$$d\Phi=I\,d\sigma\cos\vartheta\,d\Omega. \tag{81.2}$$

La grandeur I est appelée intensité spécifique de rayonnement. C'est donc le flux énergétique traversant en l'unité de temps l'aire $d\sigma=1$ cm^2 et se propageant à l'intérieur de l'angle solide unitaire dans la direction normale à cette aire. Pour obtenir la grandeur du flux total traversant dans une direction l'aire $d\sigma$ en l'unité de temps il faut intégrer l'expression (81.2) sur tous les azimuts φ de 0 à 2π et sur tous les angles ϑ de 0 à $\pi/2$. Comme

$$d\Omega=\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,$$

on a

$$\Phi=d\sigma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}I\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta.$$

Si le rayonnement est isotrope, c'est-à-dire si I est indépendant de l'angle, alors

$$\Phi=\pi I\,d\sigma.$$

Il est manifeste que la grandeur I joue dans le rayonnement le même rôle que la luminance surfacique (énergétique) de la source et c'est pourquoi I est souvent appelé luminance surfacique de rayonnement.

Entre la luminance I et la densité volumique de rayonnement u il existe une relation simple. Soient un point quelconque O à l'intérieur du champ de rayonnement et une sphère de centre en O. Il est évident que tous les

rayons passant par le point O doivent traverser cette sphère et chaque rayon apporte sa part à la densité volumique de rayonnement au voisinage de O. Par intégration et sur la base de considérations géométriques simples il est facile de montrer qu'au cas de rayonnement polarisé linéaire

$$u=\frac{4\pi I}{c}. \tag{81.3}$$

Il faut ensuite considérer que le rayonnement thermique a dans une enceinte un spectre continu. Pour l'étude de la composition de ce spectre il est nécessaire à côté des grandeurs intégrales u et I, tenant compte du rayonnement à toutes les fréquences, introduire des grandeurs spectrales. Pour un intervalle de fréquence infiniment petit $d\nu$ on peut considérer la densité volumique du spectre du_ν proportionnelle à l'intervalle $d\nu$:

$$du_\nu=\varrho_\nu\, d\nu.$$

Le coefficient ϱ_ν s'appelle densité spectrale (volumique) de rayonnement. Pour un spectre continu englobant toutes les fréquences de 0 à ∞ on a

$$u=\int_0^\infty du_\nu=\int_0^\infty \varrho_\nu\, d\nu.$$

A côté de ϱ_ν on peut introduire la luminance spectrale surfacique de rayonnement I_ν en la définissant par analogie avec ce qui a été réalisé avec les grandeurs intégrales. Entre ϱ_ν et I_ν il existe alors la même relation qu'entre u et I :

$$\varrho_\nu=\frac{4\pi}{c}I_\nu. \tag{81.4}$$

Enfin il faut tenir compte de ce que le rayonnement de fréquence déterminée et de direction donnée se caractérise de même par son état de polarisation. Le rayonnement à l'intérieur de l'enceinte est non polarisé. Mais un rayon non polarisé transporte la même énergie que deux rayons polarisés dans des plans mutuellement perpendiculaires et possédant une intensité moyenne identique. Ainsi donc, pour un rayonnement non polarisé

$$I=2\int_0^\infty I_\nu\, d\nu$$

et pour un rayonnement isotrope non polarisé on a

$$\varrho_\nu=\frac{8\pi}{c}I_\nu. \tag{81.5}$$

§ 82. Loi de Kirchhoff

Le premier pas dans l'étude théorique des propriétés du rayonnement équilibré fut réalisé par Kirchhoff qui montra par des voies thermodynamiques que pour une température constante la densité spectrale de rayonne-

ment ϱ_ν est complètement indépendante de la nature et des propriétés des corps se trouvant à l'intérieur de l'enceinte (y compris les parois de l'enceinte), par exemple de la nature de la surface des corps, de la présence ou de l'absence de bandes d'absorption optique sélective, etc. Cette particularité du rayonnement équilibré découle directement du second principe de la thermodynamique. En effet, supposons, au contraire, que la densité de rayonnement à l'état d'équilibre dépend de façon quelconque de la nature des corps se trouvant à l'intérieur de l'enceinte. Alors, si l'on considère deux systèmes en équilibre se trouvant à la même température mais composés de corps différents et si on les fait communiquer, on détruirait leur équilibre. Ceci introduirait entre les deux systèmes des différences de température qu'on aurait pu utiliser à la construction d'un *perpetuum mobile* de seconde espèce.

Kirchhoff a ensuite trouvé une relation importante entre les pouvoirs émissif et absorbant du corps de fréquence considérée d'une part et la luminance spectrale I_ν (et par suite ϱ_ν) d'autre part. Afin d'éviter des confusions il est nécessaire, toutefois, de préciser tout d'abord les termes choisis.

Si un corps est soumis à un rayonnement, il est manifeste qu'une partie de ce rayonnement est réfléchie par la surface de séparation entre le corps et le milieu, tandis que l'autre partie pénètre à l'intérieur du corps. La partie de l'énergie rayonnante ayant pénétré à l'intérieur du corps est d'une part absorbée et transformée en chaleur et d'autre part, après plusieurs réflexions à l'intérieur du corps, en ressort. La portion de l'énergie *incidente* dans la bande de fréquence considérée ν, $\nu+d\nu$ qui reste à l'intérieur du corps et se transforme en chaleur est appelée *pouvoir absorbant du corps* de la fréquence considérée et est notée A_ν (nombre sans dimension). Il ne doit pas être confondu avec le coefficient d'absorption a_ν qui mesure l'affaiblissement relatif du faisceau de rayons parallèle par unité de longueur. Le corps peut avoir un petit coefficient d'absorption mais pour une extension importante un grand pouvoir absorbant. L'énergie émise par cm^2 en 1 s est dénommée *pouvoir émissif* et est désignée par E_ν. La relation établie par Kirchhoff est :

$$\frac{E_\nu}{A_\nu}=I_\nu=\frac{c}{8\pi}\varrho_\nu \tag{82.1}$$

[la dernière d'après (81.5)], c'est-à-dire que le rapport du pouvoir émissif du corps à son pouvoir absorbant est égal à la luminance surfacique du rayonnement se trouvant en équilibre avec le corps. Comme la densité spectrale ϱ_ν (de même que I_ν) est indépendante de la nature du corps, la relation (82.1) signifie que le *rapport entre le pouvoir émissif du corps et son pouvoir absorbant est le même pour tous les corps.* Ce rapport est proportionnel à la densité spectrale du rayonnement équilibré et constitue ainsi une fonction universelle dépendant uniquement de la température et de la fréquence.

Parmi tous les corps c'est le corps dont le pouvoir absorbant est égal à l'unité qui doit posséder la valeur maximale de E_ν; comme ce corps absorbe

toute l'énergie incidente, Kirchhoff l'appela *corps noir*. Supposons qu'on est arrivé à construire un tel corps; de la relation (82.1) pour $A_\nu = 1$ il vient

$$E_\nu = I_\nu = \frac{c}{8\pi} \varrho_\nu . \tag{82.2}$$

Cela signifie que le pouvoir émissif du corps noir est également une fonction universelle de la fréquence et de la température. C'est pourquoi si théoriquement l'expression explicite de $\varrho(\nu, T)$ est trouvée et si cette formule est confirmée par l'expérience rien que pour le seul corps noir, on peut calculer la distribution de l'énergie dans le spectre de n'importe quel corps puisqu'on connaît son pouvoir absorbant obtenu à l'aide du spectre d'absorption et des considérations géométriques. D'où l'importance qu'acquiert le problème de la recherche théorique de la fonction $\varrho(\nu, T)$.

En effet, aucun corps dans la nature ne peut être considéré idéalement noir et il n'existe pas de couleur qui après que la surface du corps en soit recouverte rendrait nul son coefficient de réflexion. Toutefois, la loi de Kirchhoff rend possible la construction artificielle d'un corps noir. Il suffit pour cela de prendre une sphère creuse à parois uniformément chauffées (un four à moufle électrique); alors le rayonnement d'équilibre établi à l'intérieur de l'enceinte se caractérisera par une répartition spectrale de l'énergie identique à celle d'un corps noir théorique. En perçant alors une petite ouverture dans la paroi de l'enceinte on en verra sortir un rayonnement identique à celui d'un corps noir théorique. Pour la réalisation pratique d'un tel corps noir idéal artificiel voir § 84.

§ 83. Lois de rayonnement d'un corps noir théorique

La conclusion fondamentale découlant de la loi de Kirchhoff peut être écrite de la façon suivante :

$$\varrho_\nu \, d\nu = F(\nu, T) \, d\nu, \tag{83.1}$$

où $F(\nu, T)$ est une certaine fonction universelle. Le problème suivant consiste à découvrir la forme de cette fonction. Le pas le plus important dans cette voie après les travaux majeurs des physiciens russes V. Michelson et B. Golytsyne fut réalisé par Wien qui utilisa outre la théorie thermodynamique également la théorie électromagnétique de la lumière.

En définitive il établit la formule suivante*) :

$$\varrho_\nu \, d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu. \tag{83.2}$$

*) L'établissement de la formule de Wien se trouve dans un grand nombre de cours de physique théorique et en particulier dans M. Planck, *Einführung in die theoretische physik, V, Einführung in die theorie der wärme*, Leipzig, 1930. Un résumé particulièrement concis de la théorie du rayonnement est donné dans le livre de H. A. Lorentz, *Theorie der strahlung*, Leipzig, 1927.

Ici $F(\nu/T)$ est une fonction dont la forme fut vainement cherchée en faisant appel à des considérations thermodynamiques, autrement dit, sans formuler des hypothèses sur le mécanisme moléculaire de l'émission et de l'absorption.

Malgré ce défaut la formule de Wien joua un grand rôle. En premier lieu elle réduisit la recherche de la fonction de deux variables ν et T à la fonction d'une variable ν/T; or ceci rendait possible sur la base de la courbe de distribution spectrale d'énergie pour une certaine température de calculer la courbe pour toute autre température. Supposons, par exemple, qu'on dispose de la courbe pour la température T et qu'on veut construire la courbe correspondant à la température T_1. Pour la fréquence ν_1 satisfaisant à la condition $\nu_1/T_1=\nu/T$, c'est-à-dire $\nu_1=T_1\nu/T$, la formule de Wien donne

$$\varrho(\nu_1, T_1)=\nu_1^3 F\left(\frac{\nu_1}{T_1}\right)=\nu_1^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)=\frac{T_1^3}{T^3}\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)=\frac{T_1^3}{T^3}\varrho(\nu, T).$$

Ainsi donc, il suffit de multiplier l'ordonnée de chaque point de la courbe $\varrho(\nu, T)$ par le rapport T_1^3/T^3 pour obtenir la courbe $\varrho(\nu_1, T_1)$.

En second lieu, puisque la formule de Wien est déduite en s'aidant de la thermodynamique, elle est absolument juste et toute autre formule obtenue sur la base d'hypothèses spéciales sur le mécanisme du rayonnement doit nécessairement satisfaire aux exigences imposées par cette formule, c'est-à-dire contenir (outre les constantes) le cube de la fréquence et la fonction du rapport ν/T.

Enfin, nonobstant la présence d'une fonction implicite $F(\nu/T)$, la formule de Wien aboutit à certains rapports quantitatifs bien définis.

On peut s'en convaincre tout d'abord en calculant à l'aide de cette formule la densité intégrale de rayonnement u :

$$u=\int_0^\infty \varrho_\nu\, d\nu=\int_0^\infty \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu.$$

Introduisant une nouvelle variable $\nu/T=\xi$ il vient

$$u=T^4\int_0^\infty \xi^3 F(\xi)\, d\xi.$$

Si l'on désigne la quantité obtenue par le calcul de l'intégrale par α, on obtient

$$u=\alpha T^4, \tag{83.3}$$

autrement dit, la loi connue de Stefan-Boltzmann.

Dans l'exposé ultérieur il est utile de passer de la distribution en fréquences à la distribution en longueurs d'onde. Dans ce but il est nécessaire de remarquer avant tout que l'énergie de l'intervalle de fréquences ν, $\nu+d\nu$ est égale à $\varrho_\nu\, d\nu$ (mais non pas à ϱ_ν!); la même énergie en longueurs d'ondes est égale évidemment à $\varrho_\lambda\, d\lambda$. C'est pourquoi pour passer de la distribution

en fréquences à la distribution en longueurs d'onde il faut se servir de la relation

$$\varrho_\nu \, d\nu = \varrho_\lambda \, d\lambda; \tag{83.4}$$

puis il faut remplacer ν et $d\nu$ par λ et $d\lambda$:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad |d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \tag{83.5}$$

Cela étant, il vient

$$\varrho_\lambda \, d\lambda = \varrho_\nu \, d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda. \tag{83.6}$$

Utilisons maintenant la condition du maximum $\frac{d\varrho_\lambda}{d\lambda} = 0$. En dérivant (83.6) on obtient

$$\frac{c^4}{\lambda^6}\left(\frac{c}{\lambda T}\right) F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) + \frac{5c^4}{\lambda^6} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = 0,$$

ou, enfin, en introduisant la notation $\frac{c}{\lambda T} = \eta$ et en simplifiant

$$\eta F'(\eta) + 5F(\eta) = 0. \tag{83.7}$$

En résolvant cette équation on obtient pour η une certaine valeur numérique $\eta = \text{const}$, ce qui donne $\frac{c}{\lambda_{\max} T} = \text{const}$, où par $\lambda_{\max}$ on désigne la longueur d'onde correspondant à $\varrho_{\lambda_{\max}}$ ou, comme c est une constante,

$$\lambda_{\max} T = \text{const} = b. \tag{83.8}$$

Mais c'est la *loi* bien connue du *déplacement de Wien :* la longueur d'onde correspondant à l'énergie maximale du spectre est inversement proportionnelle à la température absolue.

§ 84. Etude expérimentale des lois du rayonnement thermique

Au § 82 on a vu que la construction d'un modèle de corps noir idéal permet d'étudier expérimentalement les propriétés du rayonnement d'équilibre et, en particulier, de rechercher la distribution spectrale d'énergie de ce rayonnement. Pour la réalisation pratique d'un tel modèle de corps noir il est nécessaire de garantir un échauffement régulier des parois de l'enceinte et la sortie de ce rayonnement par un petit orifice. Sur la figure 131, *a* on a représenté un corps noir fabriqué pour la première fois par O. Lummer et E. Pringsheim. C'est un récipient métallique à doubles parois. L'espace entre les parois sert de thermostat pour maintenir une température uniforme fixée à l'avance. On y parvient en faisant passer dans l'espace entre les parois de la vapeur d'eau ou, pour des températures basses, en le remplissant par de l'acide carbonique solide, l'air liquide, etc.

Pour l'étude du rayonnement à des températures élevées on utilise un corps noir d'une construction différente (fig. 131, *b*). Un cylindre en tôle

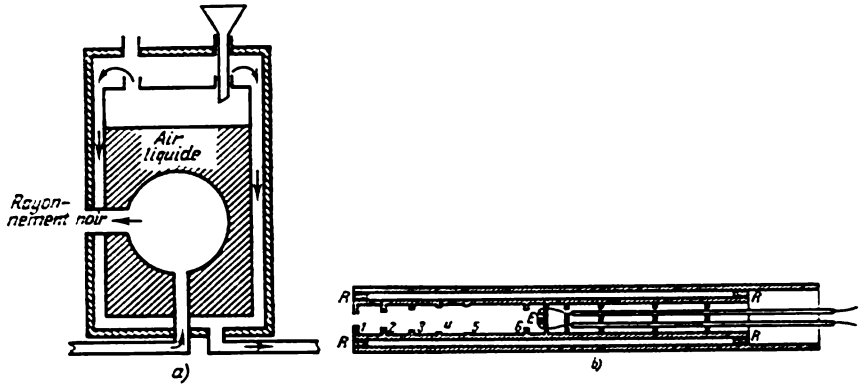


Fig. 131. Deux modèles de corps noir : *a)* modèle simplifié à thermostat, *b)* corps noir utilisé pour l'étude du rayonnement à des températures élevées

de platine à travers lequel on fait passer un courant électrique permet l'échauffement régulier du cylindre intérieur en porcelaine *P*. A l'intérieur du cylindre la température est mesurée par un thermocouple *E*; les diaphragmes *1*, *2*, *3*, ... protègent contre le refroidissement par l'air pénétrant de l'extérieur.

A l'aide de semblables modèles de corps noir on a étudié expérimentalement les lois du rayonnement, déterminé rigoureusement ses constantes

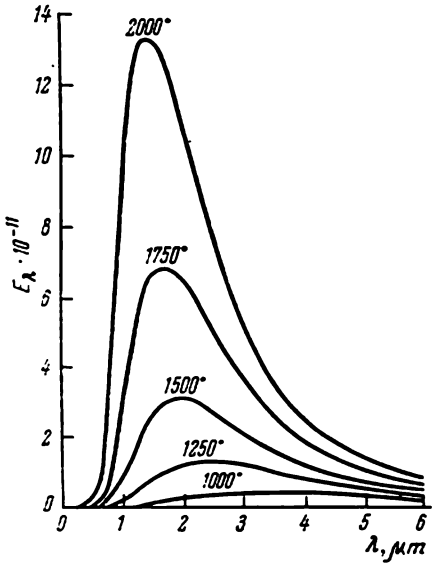


Fig. 132. Courbes de distribution d'énergie dans le spectre du corps noir. Sur l'axe des ordonnées on a porté la densité d'énergie associée à chaque longueur d'onde

et étudié la distribution spectrale de la luminance de rayonnement. Une série de courbes de distribution d'énergie dans le spectre du corps noir pour des températures différentes est donnée à la figure 132. Toutes les courbes présentent un maximum bien marqué et montrent un déplacement de ce maximum vers les courtes longueurs d'ondes avec l'élévation de la température comme l'exige la loi de Wien.

§ 85. Théorème d'équipartition de l'énergie suivant les degrés de liberté

Lors de l'étude théorique du problème de rayonnement d'un corps noir un rôle important est tenu par un théorème très général de la mécanique statistique classique, dit théorème d'équipartition de l'énergie suivant les degrés de liberté. Rappelons le contenu de ce théorème. Pour cela on étudiera d'abord en qualité d'exemple de système simplifié constitué d'un grand nombre de particules le gaz *monoatomique*. L'énergie totale de ce gaz est la somme d'énergies cinétiques du mouvement de translation de ses molécules. Si l'on avait pu mesurer l'énergie cinétique des molécules isolées, on aurait obtenu pour des molécules différentes des valeurs variées. Or pour une température constante l'énergie cinétique moyenne d'une molécule est une quantité bien déterminée. Si l'on sépare un certain volume du gaz comprenant un nombre suffisamment grand de molécules, l'énergie cinétique moyenne d'une molécule calculée pour ce volume sera égale à l'énergie cinétique moyenne calculée pour une autre partie du volume à condition que la température du gaz soit partout la même. Ce sera également vrai dans le cas où le gaz est un mélange de deux gaz dont les molécules ont des masses différentes : l'énergie cinétique moyenne des molécules de chacun des gaz sera la même; il en sera de même pour le cas où les deux gaz ne sont pas mélangés et se trouvent en équilibre thermique.

L'énergie cinétique des molécules d'une mole du gaz monoatomique est égale à $E_c = 1/2\, Nmv^2$ et comme d'autre part, d'après la théorie cinétique des gaz, $pv = RT = 1/3\, Nm\overline{v^2}$, alors $m\overline{v^2} = 3R/NT = 3kT$ et

$$E_c = 3/2\, NkT.$$

En assimilant les molécules du gaz monoatomique à des masses ponctuelles on définit complètement la configuration du système de N masses analogues par $3N$ coordonnées cartésiennes. On dit qu'un tel système possède $3N$ degrés de liberté. Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du centre de gravité de la i-ème masse; les composantes correspondantes de la vitesse seront $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$. L'énergie cinétique de tout le système peut être écrite sous la forme de la somme de $3N$ termes quadratiques :

$$E_c = 1/2\, m\dot{x}_1^2 + 1/2\, m\dot{y}_1^2 + 1/2\, m\dot{z}_1^2 + \ldots + 1/2\, m\dot{x}_N^2 + 1/2\, m\dot{y}_N^2 + 1/2\, m\dot{z}_N^2.$$

D'après le théorème d'équipartition de l'énergie l'énergie moyenne correspondant à chaque terme de cette somme, c'est-à-dire à chaque degré de liberté du mouvement de translation, est la même et est égale à $1/2\, kT$. En

effet, si à chaque terme quadratique de cette somme on attribue une même énergie cinétique moyenne égale à $1/2\,kT$, alors l'énergie totale du gaz sera égale à $3/2\,NkT$ en conformité avec l'exposé précédent.

L'exemple analysé du gaz monoatomique est particulièrement simple, car les molécules du gaz monoatomique peuvent être assimilées à des masses ponctuelles dont chacune n'est animée que d'un mouvement de translation. La mécanique statistique classique basée sur la mécanique de Newton montre toutefois que ce résultat peut être généralisé. Soit, par exemple, un gaz constitué de molécules biatomiques. Chacune d'elles possède cinq degrés de liberté : trois degrés de liberté pour le mouvement de translation du centre de gravité et deux degrés de liberté pour la rotation autour de deux axes perpendiculaires à la droite réunissant les atomes (la rotation autour de l'axe passant par les deux atomes peut être négligée si les atomes sont considérés comme des masses ponctuelles). Dans ce cas également pour le calcul de l'énergie totale du gaz il faut à chaque degré de liberté (c'est-à-dire aussi bien aux degrés de liberté du mouvement de translation qu'aux degrés de liberté de la rotation) attribuer la même énergie moyenne égale à $1/2\,kT$.

Soit enfin un système quelconque dont la configuration est déterminée complètement par les f coordonnées généralisées de Lagrange $q_1, q_2, \ldots, q_f$, de sorte que le système a f degrés de liberté. L'énergie cinétique d'un tel système sera représentée par une forme quadratique homogène comprenant les termes avec les carrés des vitesses généralisées et, en général, les termes avec leurs produits deux à deux*).

On peut, toutefois, choisir les coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_f$ de façon que l'énergie cinétique soit la somme de f termes composés uniquement de carrés des vitesses généralisées, c'est-à-dire ayant la forme de $1/2\,a_i\dot{q}_i^2$, les coefficients a_i n'étant pas, en général, égaux aux masses m_i. Par exemple, en coordonnées polaires pour la i-ème particule

$$T=\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2+\frac{1}{2}m_ir_i^2\dot{\vartheta}_i^2+\frac{1}{2}m_ir_i^2\sin^2\vartheta_i\dot{\varphi}_i^2,$$

de sorte que $a_{i_r}=m_i$, $a_{\vartheta_i}=m_ir_i^2$, $a_{\varphi_i}=m_ir_i^2\sin^2\vartheta_i$. Toutefois, quelles que soient les coordonnées choisies, si l'énergie cinétique est composée *uniquement* de termes quadratiques, à chacun de ces f termes, autrement dit à chaque degré de liberté, correspond, d'après le théorème mentionné de la mécanique statistique, la même énergie cinétique *moyenne* égale à $1/2\,kT$.

Jusque-là on n'a parlé que de l'énergie cinétique. Mais il se trouve des cas quand l'énergie potentielle peut être également calculée par un procédé aussi simple. Si, par exemple le système comprend des oscillateurs harmoniques linéaires, alors, puisque l'énergie potentielle moyenne de l'oscillateur linéaire harmonique est égale à son énergie cinétique moyenne, à chaque degré de liberté correspondra une énergie égale à $1/2\,kT+1/2\,kT=kT$.

---

*) Voir, par exemple, L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique*, Editions Mir, Moscou, 1969 (traduit du russe).

Dans le cas général d'un système capable d'effectuer des petites oscillations, on peut toujours trouver des coordonnées telles que non seulement l'énergie cinétique soit représentée comme la somme des termes quadratiques de la forme $1/2\ a_i\dot{q}_i^2$, mais également l'énergie potentielle soit la somme de termes quadratiques $1/2\ b_i q_i^2$; le nombre de ces derniers est lui aussi égal au nombre de degrés de liberté du système*). Les *coordonnées normales* ainsi choisies se caractérisent par le fait que chacune d'elles est exprimée par une simple fonction sinusoïdale du temps, quant à l'énergie cinétique moyenne des vibrations propres correspondantes, elle est égale à l'énergie potentielle moyenne (voir l'exercice au bas du paragraphe). Le mouvement du système se ramènera dans ce cas à la superposition de f oscillateurs linéaires harmoniques; l'énergie totale sera la somme de $2f$ termes quadratiques. A chaque terme correspond une énergie moyenne égale à $1/2\ kT$ et, par suite, l'énergie totale sera fkT. C'est l'essence même du théorème d'équipartition de l'énergie.

Exercice. Les énergies cinétique et potentielle d'un système capable d'entretenir des petites oscillations en coordonnées normales se présentent sous la forme

$$T=1/2\ a_1\dot{q}_1^2+1/2\ a_2\dot{q}_2^2+\ldots+1/2\ a_f\dot{q}_f^2,$$

$$U=1/2\ b_1q_1^2+1/2\ b_2q_2^2+\ldots+1/2\ b_fq_f^2.$$

Ecrire les équations de Lagrange dans ces coordonnées et vérifier que leurs solutions seront

$$q_1=A_1\cos\left(\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\,t+\delta_1\right),\qquad q_2=A_2\cos\left(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\,t+\delta_2\right),\ \ldots$$

Utilisant ces solutions écrire les expressions des énergies potentielle et cinétique pour chaque vibration propre pour se convaincre que leurs valeurs moyennes sont égales entre elles.

§ 86. La formule de Rayleigh-Jeans

Rayleigh utilisa le premier le théorème d'équipartition de l'énergie pour le calcul de la densité d'énergie électromagnétique au sein d'une enceinte close. Les considérations suivantes ont été mises à la base de l'utilisation de ce théorème dans le cas considéré. Soit une enceinte de volume V ne contenant pas de substance (c'est-à-dire un vide) et entourée de parois parfaitement réfléchissantes qu'on a chauffées à la température T.

Comme les parois de cette enceinte à toute température émettent des ondes électromagnétiques sous forme de lumière (en particulier, à des basses températures, sous forme de lumière infrarouge), il s'établira donc à l'intérieur de l'enceinte un champ électromagnétique. Ce champ électromagnétique peut être divisé en des systèmes d'ondes stationnaires de fréquence et de direction différentes; chaque onde stationnaire représente l'état élé-

*) Voir, par exemple, L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique*, Editions Mir, Moscou, 1969 (traduit du russe).

mentaire du champ électromagnétique. Le théorème d'équipartition postule dans ce cas que dans un équilibre entre les parois de l'enceinte et le champ électromagnétique à chaque onde stationnaire doit correspondre une énergie moyenne égale à kT. Alors, de même que l'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique est la somme de l'énergie cinétique moyenne égale à $1/2\,kT$ et de l'énergie potentielle moyenne de même égale à $1/2\,kT$, dans un champ électromagnétique constitué d'ondes stationnaires l'énergie moyenne totale kT est la somme des énergies moyennes des champs électrique et magnétique, égales chacune à $1/2\,kT$.

Ainsi donc, le calcul de l'énergie du champ dans l'intervalle de fréquence considéré ν, $\nu+d\nu$ se réduit à la recherche du nombre d'ondes stationnaires élémentaires, c'est-à-dire du nombre de vibrations libres propres du volume V rempli d'un milieu continu, appartenant à l'intervalle de fréquence considéré. L'énergie totale du champ dans le volume V égale à $V\varrho_\nu\,d\nu$ étant connue, on peut trouver la densité d'énergie $\varrho_\nu\,d\nu$.

Le calcul de la densité d'énergie du champ $\varrho_\nu\,d\nu$ au moyen du théorème d'équipartition a été effectué par Jeans suivant la méthode indiquée par Rayleigh. La formule obtenue porte par suite le nom de formule Rayleigh-Jeans. Quoique cette formule ne peut être appliquée à tout le spectre, elle joua un grand rôle dans le développement de la théorie du rayonnement et de la physique contemporaine toute entière, car elle montra clairement les défauts de principe de la physique classique.

Etudions la déduction de la formule de Rayleigh-Jeans et pour cela commençons par le calcul du nombre de vibrations propres du champ. Supposons pour simplifier que l'enceinte dans laquelle s'établit le champ d'ondes stationnaires (c'est-à-dire indépendant du temps) est un cube d'arête a. Comme il a été mentionné, un champ d'ondes stationnaires peut être assimilé à un ensemble d'ondes stationnaires. Considérons d'abord les ondes dont la normale est perpendiculaire aux deux arêtes parallèles du cube. Les ondes incidentes et réfléchies se propageant parallèlement à cette direction dans les deux sens forment des ondes stationnaires. Dans ce cas, les parois de l'enceinte suivant la nature des ondes correspondront soit à des nœuds, soit à des ventres; par exemple, dans le cas d'ondes électromagnétiques, le champ électrique formera sur les parois des nœuds et le champ magnétique des ventres. Toutefois, dans les deux cas la condition de l'apparition des ondes stationnaires est que la longueur a contienne un nombre entier de demi-ondes.

Pour fixer les idées, on n'étudiera d'abord que les ondes stationnaires présentant des nœuds sur les parois. Ainsi la condition de l'existence d'ondes stationnaires parallèles au plan yz est que

$$2a/\lambda = n_1 \qquad (n_1 \text{ étant un entier}).$$

Des conditions analogues se présenteront dans le cas d'ondes stationnaires aux plans de phase égale, parallèles aux plans xy et xz :

$$2a/\lambda = n_2, \qquad 2a/\lambda = n_3.$$

Les systèmes d'ondes stationnaires étudiés aux normales parallèles aux axes de coordonnées constituent des cas particuliers. Il peut exister dans l'enceinte des ondes stationnaires dont les normales sont orientées de façon quelconque.

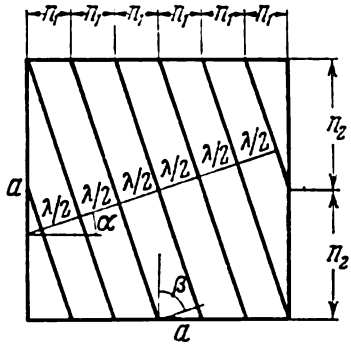


Fig. 133.

Etudions de façon plus détaillée ce cas général. Soit une onde stationnaire dont la normale fait avec les axes x et y les angles α et β respectivement, quant aux plans de phase égale (par exemple, les plans nodaux) ils sont parallèles à l'arête verticale du cube, coïncidant avec l'axe z. Sur la figure 133 le carré représente l'une des bases du cube, c'est-à-dire la face parallèle au plan des coordonnées xy, quant au système de lignes parallèles, ce sont les traces des nodales. La condition d'existence de ces ondes stationnaires exige que les distances entre les nodales mesurées suivant les normales aux arêtes du cube soient contenues un nombre entier de fois dans l'arête a, c'est-à-dire que

$$\frac{2a\cos\alpha}{\lambda}=n_1, \qquad \frac{2a\cos\beta}{\lambda}=n_2.$$

Ces conditions découlent de l'étude de la figure 133. Il est évident que dans le cas le plus général quand la normale aux nodales forme avec les axes de coordonnées des angles α, β, γ quelconques, trois conditions doivent être remplies simultanément :

$$\frac{2a\cos\alpha}{\lambda}=n_1, \qquad \frac{2a\cos\beta}{\lambda}=n_2, \qquad \frac{2a\cos\gamma}{\lambda}=n_3. \tag{86.1}$$

Elevant au carré et sommant les trois égalités on obtient

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{2a\nu}{c'}\right)^2, \tag{86.2}$$

où c' est la vitesse de déplacement du plan de phase égale (vitesse de phase) dans le milieu considéré. Mais c'est l'équation de la sphère de rayon

$$R=\frac{2a\nu}{c'}. \tag{86.3}$$

Il en découle qu'à chaque groupe de trois *nombres entiers* n_1, n_2, n_3 correspond une fréquence déterminée

$$\nu=\frac{c'}{2a}\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}. \tag{86.4}$$

Introduisons maintenant le système de coordonnées cartésiennes sur les axes duquel on porte en prenant pour unité $c'/2a$ des nombres entiers n_1,

n_2, n_3. En vertu de (86.4), à chaque combinaison de valeurs de ces nombres correspond une fréquence déterminée. Dans le système de coordonnées choisi qu'on appellera « espace des fréquences » cette fréquence sera représentée par un point de coordonnées n_1, n_2, n_3 (point représentatif). Il est toutefois évident qu'à tous les nombres entiers n_1, n_2 et n_3 dont la somme des carrés est constante correspondent des fréquences aux valeurs numériques égales. Mais ces fréquences égales représentent des vibrations propres *différentes* du continuum considéré, car à chacune d'elles correspond son propre système d'ondes stationnaires de direction différente*).

Pour l'objectif visé il importe que ces fréquences égales entre elles représentent des points différents de l'espace de fréquences.

Maintenant on peut calculer le nombre total de fréquences propres dans l'intervalle de 0 à ν. Construisons pour cela un système de points correspondant à toutes les valeurs entières positives possibles de n_1, n_2, n_3. Il est évident que ce système de points constitue un réseau cubique, l'arête du cube élémentaire étant égale à l'unité, ainsi que son volume. Si la longueur de l'onde est suffisamment petite par rapport aux dimensions linéaires de l'enceinte a, la somme des volumes de toutes les mailles élémentaires (cubiques) sera avec une précision suffisante égale au volume du huitième de la sphère de rayon R défini par les conditions (86.3) et (86.4). Puisque le volume de chaque maille est égal à l'unité, on peut également postuler le contraire : que le volume de l'octant (avec la précision indiquée) est égal au *nombre* de mailles élémentaires.

Si maintenant on connaît le nombre de points représentatifs correspondant à une maille, on pourra alors trouver le nombre exact de fréquences propres de l'enceinte situées dans l'intervalle de 0 à ν. Or, tout comme dans le cas d'un réseau cubique ionique (voir § 34) où à chaque maille correspond un ion, on peut affirmer que dans le cas considéré à chaque cube élémentaire correspond *un* point représentatif. Ainsi donc, le nombre de fréquences de vibrations libres recherché est numériquement égal au volume de l'octant, c'est-à-dire

$$N=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2a\nu}{c'}\right)^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\nu}{c'}\right)^3\equiv\frac{4}{3}\pi\frac{a^3\nu^3}{c'^3}.$$

C'est justement le nombre de vibrations propres dans l'intervalle de 0 à ν. Le nombre de vibrations dans l'intervalle de ν à $\nu+d\nu$ est égal au nombre de points représentatifs se disposant dans le huitième de la couche sphérique

*) Cette coïncidence des fréquences associées à des combinaisons différentes des nombres n_1, n_2 et n_3 à la condition que la somme $n_1^2+n_2^2+n_3^2$ soit égale à un nombre donné est un *cas particulier*, dit cas de dégénérescence. Cette coïncidence est le résultat du choix du cube comme forme du volume. Elle aurait également lieu si le volume était représenté par un parallélépipède aux arêtes dont les longueurs sont des grandeurs commensurables. Mais si les longueurs des arêtes sont des grandeurs *incommensurables*, il n'y a plus de coïncidence et à chaque collection de nombres n_1, n_2 et n_3 ne correspond qu'une seule fréquence. Ces singularités deviendront claires au lecteur une fois assimilé le § 161.

de rayons $\frac{2a\nu}{c'}$ et $\frac{2a(\nu+d\nu)}{c'}$ et ce nombre de points représentatifs, d'après ce qu'on a dit, est égal au volume de la couche mentionnée, c'est-à-dire

$$dN=\frac{4\pi\nu^2}{c'^3}a^3\,d\nu.$$

S'il s'agit d'ondes électromagnétiques, qui nous intéressent précisément dans le cas considéré, on doit aussi avoir en vue qu'à chaque fréquence ν correspondent *deux* ondes aux plans de polarisation mutuellement perpendiculaires. C'est pourquoi le nombre trouvé doit être doublé et en désignant le volume du cube a^3 par V on obtient

$$dN=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}V\,d\nu.$$

C'est justement le nombre de vibrations libres propres du volume V. D'après le théorème d'équipartition de l'énergie on doit attribuer à chacun de ces nombres une énergie moyenne kT. Par suite, l'énergie totale du volume V sera

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}VkT\,d\nu,$$

quant à la densité d'énergie, on la tirera par simple division par le volume V :

$$\varrho_\nu\,d\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\,d\nu. \tag{86.5}$$

C'est justement la formule de Rayleigh-Jeans.

Pour des applications pratiques il est commode de passer de la distribution en fréquences à la distribution en longueurs d'ondes. Dans l'intervalle de longueurs d'ondes λ, $\lambda+d\lambda$ on a d'après ce qui précède

$$\varrho_\nu\,d\nu=\varrho_\lambda\,d\lambda \tag{83.4}$$

et

$$|d\nu|=\frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda. \tag{83.5}$$

A l'aide de ces relations on tire de la formule (86.5) :

$$\varrho_\lambda\,d\lambda=8\pi kT\lambda^{-4}\,d\lambda. \tag{86.6}$$

Pour la luminance surfacique de rayonnement I_λ on trouve d'après (86.6) en utilisant la relation $I_\lambda=\frac{c}{8\pi}\varrho_\lambda$

$$I_\lambda\,d\lambda=ckT\lambda^{-4}\,d\lambda. \tag{86.7}$$

Notons en conclusion que la formule de Rayleigh-Jeans sous la forme de distribution en longueurs d'ondes (86.6) peut être facilement obtenue sur la base des considérations de dimension. En effet, il est évident que le nombre de vibrations libres propres $f(\lambda)\,d\lambda$ du volume V correspondant à l'intervalle de longueurs d'ondes λ, $\lambda+d\lambda$ doit être proportionnel à V et à l'intervalle $d\lambda$

$$f(\lambda)\,d\lambda=Cq(\lambda)V\,d\lambda,$$

où C est un nombre constant. Mais comme $f(\lambda)\,d\lambda$ doit être un nombre sans dimensions et $V\,d\lambda$ a pour dimension cm^4, alors $\varphi(\lambda)$ aura pour dimension cm^{-4}. Ainsi, $\varphi(\lambda)=\lambda^{-4}$ et

$$f(\lambda)\,d\lambda=C\lambda^{-4}V\,d\lambda.$$

Cette formule est applicable à tout milieu continu et, par suite, à toute nature d'ondes. L'énergie moyenne kT attribuée à chaque vibration propre d'après le théorème d'équipartition de l'énergie permet d'obtenir pour l'énergie totale du volume V

$$CkT\lambda^{-4}V\,d\lambda,$$

et pour la densité d'énergie

$$\varrho_\lambda\,d\lambda=CkT\lambda^{-4}\,d\lambda,$$

autrement dit l'expression coïncidant, au facteur numérique C près, avec la formule de Rayleigh-Jeans. Ce facteur peut être obtenu simplement par le calcul. Il est intéressant de remarquer qu'aux cas où le volume V est rempli de gaz n'admettant que des ondes longitudinales C a pour valeur 4π; pour un champ électromagnétique qui n'admet que des ondes transversales mais qui présentent deux types d'ondes indépendants aux plans de polarisation perpendiculaires, $C=8\pi$ et, enfin, au cas d'un corps solide où peuvent apparaître deux types d'ondes transversales ainsi que des ondes longitudinales, $C=12\pi$.

Exercice. Calculer le nombre de vibrations propres d'un volume en forme de parallélépipède d'arêtes l_1, l_2, l_3 exprimées au moyen des nombres incommensurables (voir remarque à la page 264). Montrer que dans ce cas également on obtient pour la densité d'énergie la formule de Rayleigh-Jeans.

§ 87. « Catastrophe ultraviolette »

Analysons maintenant la formule de Rayleigh-Jeans et voyons dans quelle mesure les résultats obtenus concordent avec l'expérience. Remarquons avant tout que la formule de Rayleigh-Jeans

$$\varrho_\nu\,d\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\,d\nu \tag{87.1}$$

satisfait à la loi thermodynamique de Wien $\varrho_\nu\,d\nu=\nu^3F(\nu/T)\,d\nu$, car elle peut être récrite sous la forme

$$\varrho_\nu\,d\nu=\frac{8\pi\nu^3}{c^3}k\frac{T}{\nu}\,d\nu.$$

Néanmoins, la formule de Rayleigh-Jeans conduit à une absurdité manifeste. En effet, calculons au moyen de (87.1) la densité intégrale de rayonnement

$$u=\int_0^\infty \varrho_\nu\,d\nu=\frac{8\pi kT}{c^3}\int_0^\infty \nu^2\,d\nu=\infty!$$

Cela signifie que l'équilibre entre les corps matériels et le rayonnement n'aurait pu s'établir que pour une densité de rayonnement infinie (voir fin du § 80). En d'autres termes, les oscillateurs du corps rayonnant auraient dû rayonner de l'énergie jusqu'à ce que leur température n'eut atteint le zéro absolu.

Au § 80 on a déjà expliqué qu'on aurait dû obtenir ce résultat en admettant la mécanique classique valable pour les systèmes rayonnants microscopiques. Mais d'un autre côté ce résultat contredit de façon flagrante l'expérience qui montre que l'équilibre entre le rayonnement et les centres matériels est possible pour toute température et que dans cet équilibre la densité d'énergie de rayonnement est au contraire très faible par rapport à la densité d'énergie renfermée dans les corps matériels.

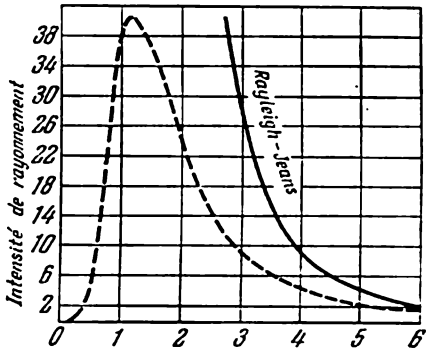


Fig. 134. Comparaison de la courbe expérimentale de distribution d'énergie dans le spectre (en pointillé) avec la courbe établie suivant la formule de Rayleigh-Jeans

Malgré l'incohérence évidente de la formule de Rayleigh-Jeans il est intéressant de la confronter aux résultats de l'expérience. Pour cela il est le plus commode d'utiliser cette formule sous sa forme (86.6) ou (86.7) dans laquelle la distribution est exprimée en longueurs d'ondes. Adressons-nous à la figure 132 où sont données les courbes expérimentales de la distribution spectrale d'énergie d'un corps noir à des températures différentes; on voit que toutes ces courbes possèdent un maximum et décroissent rapidement vers les courtes longueurs d'ondes. La formule de Rayleigh-Jeans donne au contraire un accroissement monotone et de plus rapide (λ^{-4}!) vers les ondes courtes. Or, pour des ondes longues ou des températures élevées elle se conforme de façon satisfaisante à l'expérience. C'est montré schématiquement sur la figure 134. Comme la formule de Rayleigh-Jeans qui se fonde sur la physique classique, en contradiction flagrante avec l'expérience, aboutit à la conclusion que dans le spectre du rayonnement thermique la majeure partie de l'énergie correspond au domaine des ondes courtes du spectre, cette situation a été appelée par l'un des fondateurs de la théorie quantique P. S. Ehrenfest « catastrophe ultraviolette ».

En faisant le point de ce qui a été dit on constate que dans l'établissement de la théorie du rayonnement thermique la physique classique s'est avérée complètement inopérante. Suivant l'expression imagée de Lorentz « les équations de la physique classique furent incapables d'expliquer pourquoi un four qui s'éteint n'émet pas de rayons jaunes à côté du rayonnement de grandes longueurs d'ondes ».

§ 88. Formule de Planck

La formule de Rayleigh-Jeans, comme on a vu, est basée sur les lois les plus générales de la physique classique et n'exige pas pour sa déduction d'hypothèses spéciales. En 1896 Wien proposa une autre formule se conformant de façon satisfaisante aux résultats de l'expérience justement dans le domaine du spectre où la formule de Rayleigh-Jeans est inapplicable*). Cette formule de Wien donnant la valeur de I_λ est :

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda T}, \tag{88.1}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes. Pour dégager cette formule Wien fut obligé de faire certaines hypothèses sur le mécanisme du rayonnement selon lesquelles la distribution du rayonnement en fréquences doit être analogue à la distribution de Maxwell des vitesses entre les molécules du gaz. A la différence de la formule de Rayleigh-Jeans, la formule de Wien permettait d'obtenir le maximum de la courbe de distribution d'énergie dans le spectre.

Cependant la formule de Wien ne pouvait s'appliquer qu'à la branche de la courbe de distribution spectrale d'énergie du corps noir correspondant aux ondes courtes. Ainsi donc, à la fin du XIX^e siècle il existait deux formules dont chacune correspondait aux données expérimentales dans un secteur limité du spectre mais aucune d'elles ne pouvait décrire en entier la courbe obtenue expérimentalement. Vers 1900 Planck est arrivé à trouver, au début, de façon purement empirique une formule qui se conformait assez bien aux données de l'expérience et dans les deux cas limites (celui des ondes longues et celui des ondes courtes) se transformait soit en la formule de Rayleigh-Jeans, soit en la formule de Wien. La formule de Planck pour I_λ est

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-5} \cdot \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}. \tag{88.2}$$

Il est facile de se convaincre que cette formule est en réalité le résultat de l'interpolation des formules de Rayleigh-Jeans et de Wien. En effet, pour $\lambda T \gg 1$ (ondes longues et températures élevées) on peut développer en série le terme exponentiel dans le dénominateur de la formule de Planck en se limitant aux deux premiers termes de la série :

$$e^{c_2/\lambda T} = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \ldots$$

Dans ce cas la formule de Planck donne

$$I_\lambda = \frac{c_1}{c_2} \lambda^{-4} T,$$

expression qui manifestement coïncide avec la formule de Rayleigh-Jeans

$$I_\lambda = ck\lambda^{-4} T. \tag{86.7}$$

*) Wien a obtenu sa formule sur la base de l'hypothèse que la distribution de l'énergie en fréquences est analogue à la distribution de Maxwell des molécules gazeuses suivant les vitesses. Avant Wien cette idée fut formulée par le physicien russe V. Michelson.

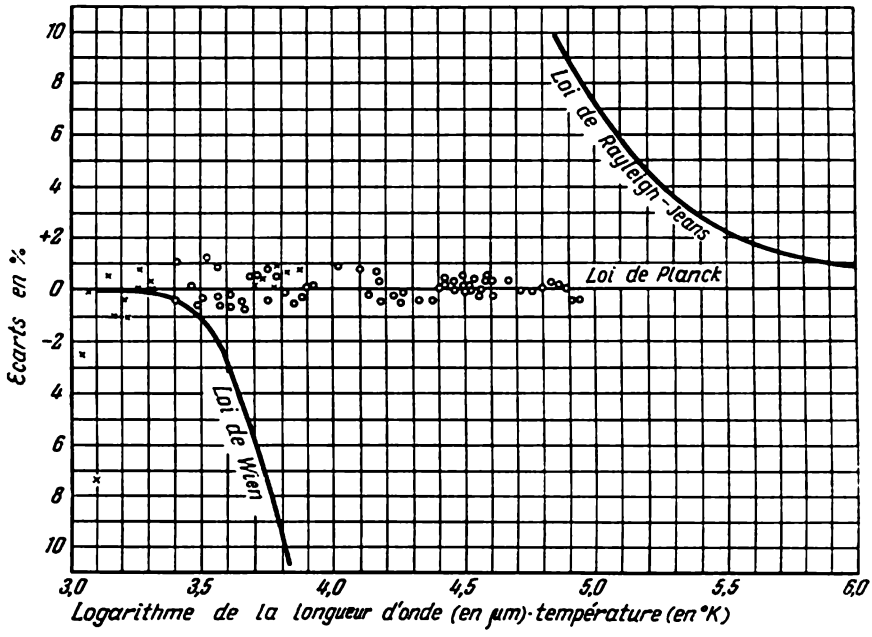


Fig. 135. Vérification expérimentale de la formule de Planck

Au contraire, dans le cas où $\lambda T \ll 1$ (ondes courtes et températures basses) $c_2/\lambda T \gg 1$ et dans le dénominateur de la formule de Planck on peut négliger 1 par rapport au terme exponentiel. Dans ce cas la formule de Planck donne directement

$$I_\lambda = c_1 e^{-c_2/\lambda T} \cdot \lambda^{-5},$$

autrement dit se transforme en la formule de Wien (88.1).

On peut juger du degré de la conformité de la formule de Planck aux données de l'expérience d'après la figure 135 où sur l'axe des ordonnées sont portés les écarts en pour cent. On a marqué par des cercles et des croix les résultats fournis par l'expérience. Les représentations graphiques des courbes obtenues avec les formules de Wien et de Rayleigh-Jeans illustrent très bien la nature asymptotique de ces formules.

§ 89. Hypothèse du quantum d'énergie

La formule de Planck, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, a résolu le problème de l'expression mathématique de la loi de distribution d'énergie dans le spectre du corps noir. Il apparut toutefois que pour dégager cette formule il a fallu faire une hypothèse qui contredit de façon radicale tout le système de conceptions de la physique classique, à savoir l'hypothèse

que l'énergie des systèmes microscopiques (atomes, molécules) ne peut prendre que des valeurs discrètes bien définies.

En déduisant sa formule Planck schématisa les centres matériels de rayonnement en les assimilant à des oscillateurs linéaires harmoniques porteurs de charges électriques leur permettant d'effectuer des échanges d'énergie avec le champ électromagnétique environnant. L'hypothèse introduite par Planck dans sa déduction en sa formulation contemporaine plus rigoureuse s'énonce de la façon suivante : *les oscillateurs ne peuvent se trouver que dans des états bien définis pour lesquels leur énergie est un multiple entier de la plus petite quantité d'énergie* ε_0 :

$$\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, \ldots, n\varepsilon_0, \ldots;$$

à l'émission ou à l'absorption les oscillateurs « sautent » d'un état à l'autre en passant les états intermédiaires.

Sur la base de cette hypothèse Planck dégagea la formule exprimant la densité spectrale volumique de rayonnement ϱ_ν sous la forme suivante :

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}. \tag{89.1}$$

Mais toute formule rigoureuse de rayonnement doit satisfaire à la loi thermodynamique de Wien $\varrho_\nu = \nu^3 F(\nu/T)$. Il est facile de voir que pour que la formule (84.1) satisfasse à cette loi il faut poser

$$\varepsilon_0 = h\nu, \tag{89.2}$$

où ν est la fréquence des vibrations de l'oscillateur $\left(\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}}\right)$, et h la constante universelle ayant pour dimension [énergie × temps]. La grandeur mécanique possédant cette dimension est dénommée *action*.

Portant (89.2) dans (89.1) il vient

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{89.3}$$

C'est justement la formule de Planck sous la forme utilisée habituellement en physique théorique.

De (89.3) on tire l'expression de la luminance spectrale de rayonnement $I_\nu = \frac{c}{8\pi}\varrho_\nu$, et plus précisément

$$I_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{89.4}$$

Pour passer de la formule (89.4) à la formule donnant I_λ utilisée, comme il a été indiqué, dans les applications pratiques il faut se servir des relations courantes

$$I_\nu \, d\nu = I_\lambda \, d\lambda, \quad |d\nu| = \frac{c \, d\lambda}{\lambda^2}.$$

La formule (89.4) donne alors

$$I_\lambda\, d\lambda = \frac{hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/kT\lambda}-1}\,d\lambda. \tag{89.5}$$

Posant

$$hc^2 = c_1, \quad \frac{hc}{k} = c_2,$$

donnons à la formule (89.4) la forme

$$I_\lambda\, d\lambda = c_1\lambda^{-5}\,\frac{1}{e^{c_2/\lambda T}-1}\,d\lambda \tag{89.6}$$

coïncidant avec la formule (88.2) du paragraphe précédent.

La constante universelle h, dite constante de Planck, joue, comme on le sait, un rôle essentiel dans la physique contemporaine. Sa valeur peut être déterminée expérimentalement par des méthodes variées. En particulier, les lois du rayonnement du corps noir donnent

$$h = 6{,}53\cdot 10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s}.$$

Les méthodes de détermination plus précise de h seront examinées au chapitre IX. On ne notera ici que la valeur extrêmement petite de h (de l'ordre de 10^{-27} erg·s) est justement la raison pour laquelle la discontinuité exigée par les lois de la physique atomique pouvait passer inaperçue lors de l'étude des phénomènes macroscopiques.

Pour le cas où $h\nu \ll kT$, autrement dit pour des petites fréquences (ou des ondes longues) ou pour des températures élevées, on a approximativement

$$e^{h\nu/kT} = 1 + \frac{h\nu}{kT},$$

et la formule de Planck (89.3) donne

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,kT \tag{87.1}$$

qui est la formule de Rayleigh-Jeans pour ϱ_ν. Pour le cas où $h\nu \gg kT$, c'est-à-dire pour des hautes fréquences et des basses températures, la formule de Planck (89.3) se ramène à la formule de Wien pour ϱ_ν :

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,e^{-h\nu/kT}. \tag{89.7}$$

Notons enfin que la densité intégrale de rayonnement

$$u = \int_0^\infty \varrho_\nu\, d\nu$$

devient finie si au lieu de ϱ_ν on prend la formule de Planck (89.3). Et précisément, le calcul montre (voir exercice à la fin du paragraphe) que

$$u=\frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\,d\nu=1{,}08\,\frac{48\pi k^4}{c^3h^3}\,T^4.$$

La formule de Planck lève donc la « catastrophe ultraviolette » (voir § 87). Il est facile d'en voir la cause. Comme on a vu au § 87, la divergence de l'intégrale $\int_0^\infty \varrho_\nu\,d\nu$ au cas où pour ϱ_ν on prend la formule de Rayleigh-Jeans est la conséquence du fait que cette formule est basée sur le théorème d'équipartition de l'énergie suivant les degrés de liberté. D'après le même théorème à *chaque* degré de liberté correspond une même énergie moyenne $\bar{\varepsilon}=kT$. Confrontons maintenant les formules de Rayleigh-Jeans et de Planck pour ϱ_ν :

$$\varrho_\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT,$$

$$\varrho_\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\equiv\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

Comme d'après le § 86 $8\pi\nu^2/c^3$ représente le nombre de degrés de liberté du rayonnement aux fréquences variant de ν à $\nu+d\nu$, il résulte, la formule de Planck étant juste, que l'énergie moyenne correspondant à chaque degré de liberté *n'est plus la même pour les ondes stationnaires de fréquences différentes*. Et précisément de la formule de Planck il suit que

$$\bar{\varepsilon}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}. \tag{89.8}$$

On voit ainsi que dans ce cas $\bar{\varepsilon}$ décroît rapidement avec l'accroissement de ν, ce qui explique justement la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \varrho_\nu\,d\nu$. Notons encore qu'en adoptant la formule (89.8) pour l'énergie moyenne, correspondant à un degré de liberté, on lève également les sérieuses difficultés de la théorie classique de la capacité thermique comme l'a montré Einstein.

Les faits exposés montrent qu'avec l'adoption de la formule de Planck on marque une rupture avec la physique classique, car la formule de Planck est en contradiction avec le théorème d'équipartition de l'énergie. Mais ce théorème est une conséquence inéluctable de la mécanique statistique basée sur la mécanique classique dans sa forme hamiltonienne. Ainsi donc, l'année 1900, quand pour la première fois a été formulée l'hypothèse du quantum d'énergie, fut non seulement la première année du nouveau siècle mais également une nouvelle ère dans le développement de la physique théorique.

Exercice. Utilisant la formule de Planck pour ϱ_ν calculer la densité intégrale de rayonnement

$$u = \int_0^\infty \varrho_\nu \, d\nu$$

et montrer que

$$u = \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right).$$

La série rapidement convergente figurant entre parenthèses est égale à 1,08 de sorte que

$$u = 1{,}08 \, \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4$$

(déduction de la loi de Stefan-Boltzmann de la formule de Planck).

[*Conseil.* Il faut tout d'abord s'assurer que

$$\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = e^{-h\nu/kT} + e^{-2h\nu/kT} + \ldots + e^{-nh\nu/kT} + \ldots$$

Après cette transformation l'intégration s'effectue facilement.]

CHAPITRE VII

NIVEAUX D'ÉNERGIE DES ATOMES

§ 90. Modèle planétaire de l'atome et postulats quantiques de Bohr

Dans le chapitre III on a vu que l'atome comprend un noyau lourd chargé positivement et des électrons qui l'entourent. D'après la mécanique classique, ce système ne peut être en équilibre qu'à condition que les électrons soient en révolution autour du noyau sur des orbites quelconques. Toutefois, du point de vue de l'*électrodynamique classique* un tel atome ne serait pas stable, car les électrons en mouvement accéléré devraient rayonner de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques (§ 75) et, par suite, tomber progressivement sur le noyau. En outre, la fréquence de rotation dans ces conditions aurait dû également se modifier continûment et on obtiendrait un spectre continu au lieu de raies spectrales nettes. Le fait qu'en réalité ceci ne s'observe pas et les atomes émettent des raies spectrales nettes indique qu'ils possèdent une remarquable stabilité en contradiction avec l'électrodynamique classique.

Dans le chapitre précédent on a vu que le postulat d'existence d'états stationnaires stables des oscillateurs était la prémisse nécessaire du dégagement d'une formule correcte de rayonnement du corps noir. C'est à Niels Bohr (1913) qu'appartient le mérite de la formulation nette de cette thèse et de sa généralisation à *tout système atomique*. Et c'est ainsi que d'une façon claire a été montrée l'inapplicabilité de la physique classique aux mouvements intraatomiques. L'hypothèse des quanta exprimée par Planck et appliquée à l'échange d'énergie entre un champ de rayonnement et des oscillateurs linéaires a acquis une importance universelle comme l'expression la plus caractéristique des processus singuliers du monde intraatomique.

Bohr a fondé sa théorie quantique sur les deux postulats suivants :

I. Les atomes et les systèmes atomiques ne peuvent se conserver durant des temps prolongés que dans des états bien définis dits états stationnaires dans lesquels ils n'émettent pas et n'absorbent pas d'énergie nonobstant les mouvements dont sont animés les particules chargées. Dans ces états les systèmes atomiques possèdent des énergies constituant des suites *discrètes* : $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Ces états se caractérisent par leur stabilité; toute modification d'énergie par suite d'absorption ou d'émission de rayonnement électromagnétique ou du fait de collision ne peut avoir lieu qu'avec transition complète (par saut) d'un état à un autre.

II. Tout passage d'un état stationnaire E_m à un autre état E_n peut être accompagné d'absorption ou d'émission de rayonnement, ce rayonnement est monochromatique et sa fréquence ν est déterminée par la condition :

$$h\nu = E_m - E_n \tag{90.1}$$

(condition de fréquences de Bohr).

Ces deux postulats contredisent de façon manifeste les exigences de l'électrodynamique classique, car d'après le premier postulat les atomes ne rayonnent pas malgré le mouvement accéléré de leurs électrons (par exemple, la révolution suivant des orbites fermés) et conformément au second, les fréquences émises n'ont rien de commun avec les fréquences des mouvements périodiques des électrons.

§ 91. Expériences de Franck et de Hertz

Les postulats quantiques de Bohr formulés au paragraphe précédent reçurent la confirmation la plus immédiate dans les expériences de James Franck et de Gustav Hertz dont on abordera maintenant la description.

L'idée de ces expériences est la suivante : les atomes ou les molécules d'un gaz plus ou moins raréfié sont bombardés par des électrons lents; on étudie dans ce cas la répartition des vitesses des électrons avant et après les collisions. Si la collision est élastique, la répartition des vitesses après le choc ne varie pas et, au contraire, si la collision est inélastique, une partie des électrons perdent leur énergie en la cédant aux atomes avec lesquels ils entrent en collision et la répartition des vitesses se modifie.

Les expériences de Franck et de Hertz ont montré que :

1. Si les vitesses des électrons sont inférieures à une certaine vitesse critique, la collision est alors élastique, c'est-à-dire l'électron ne cède pas à l'atome son énergie mais rebondit et ne modifie que la direction de sa vitesse.

2. A des vitesses atteignant une valeur critique le choc est mou, c'est-à-dire que l'électron perd son énergie en la cédant à l'atome qui passe alors à un autre état stationnaire caractérisé par une énergie supérieure.

Ainsi donc, l'atome ou bien ne reçoit pas d'énergie (choc élastique) ou bien il en reçoit, mais seulement en quantité égale à la différence des énergies de deux états stationnaires.

Avant de passer à une description détaillée de ces expériences et de leurs conséquences, examinons certaines questions se rapportant à leur réalisation. Les conditions essentielles auxquelles doit satisfaire l'installation expérimentale destinée à l'étude des collisions des électrons lents avec les atomes sont les suivantes :

1. La source d'électrons doit produire un nombre suffisant d'électrons lents avec une répartition initiale définie des vitesses.

2. On peut communiquer à ces électrons une vitesse quelconque préalablement connue au moyen d'un potentiel d'accélération appliqué de l'extérieur.

3. Les électrons accélérés doivent percuter les atomes ou les molécules en des points de l'appareil bien définis.

Pour obtenir des faisceaux d'électrons lents répondant aux exigences mentionnées on utilise des cathodes chaudes. Les électrons émis en grand nombre par ces cathodes sont accélérés par un potentiel variable V appliqué à la cathode. La vitesse v (en cm/s) qu'acquiert l'électron immobile sous l'action du potentiel d'accélération de V volts s'obtient de la relation

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{eV}{300},$$

d'où en posant

$$\frac{e}{m}=1{,}76\cdot10^7 \text{ U. E. M. C. G. S.}\cdot g^{-1}=5{,}27\cdot10^{17} \text{ U. E. S. C. G. S.}\cdot g^{-1}$$

on obtient

$$v=\sqrt{2\frac{e}{m}\frac{V}{300}}=5{,}93\cdot10^7\sqrt{V}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Ainsi donc, avec un potentiel d'accélération de 1 V la vitesse de l'électron est de l'ordre de $6\cdot10^7$ cm/s. Ceci montre que le terme « électrons lents » a une signification très relative.

Si l'on mesure l'intensité du courant en faisant varier la tension d'accélération puis si l'on en trace le graphique en portant en abscisses les potentiels d'accélération et en ordonnées l'intensité du courant correspondante on obtient une courbe (dite caractéristique courant-tension) dont la forme typique est représentée à la figure 136. Cette courbe se caractérise par les propriétés suivantes :

1. Pour une certaine valeur du potentiel l'intensité du courant devient indépendante de la tension; c'est le « courant de saturation » dont l'apparition s'explique par le fait que tous les électrons libérés en une unité de temps à la température d'échauffement donnée sont transférés de la cathode à l'anode.

2. Pour un potentiel d'accélération nulle le courant non seulement ne s'annule pas mais demeure indépendant de la tension même quand le

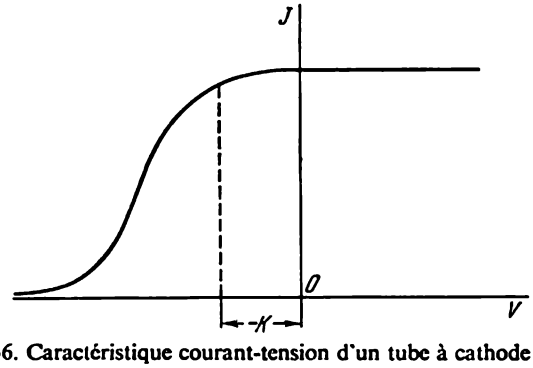


Fig. 136. Caractéristique courant-tension d'un tube à cathode chaude

potentiel devient négatif, c'est-à-dire pour des potentiels ralentisseurs allant jusqu'à une certaine valeur du potentiel $-K$. Avec l'accroissement du potentiel de freinage le courant commence à diminuer en tendant progressivement vers zéro.

Pour expliquer ces singularités il faut préalablement noter que la cathode et l'anode du tube à cathode chaude sont toujours fabriquées avec des métaux différents. C'est pourquoi entre la cathode et l'anode en l'absence de tension extérieure il s'établit obligatoirement une différence de potentiel *de contact*. Si maintenant le potentiel extérieur d'accélération s'annule, les électrons sont tout de même accélérés par cette différence de potentiel de contact. Pour compenser cette différence de potentiel il est nécessaire d'appliquer un certain potentiel *de freinage* K.

Quand on applique ce potentiel l'intensité du courant demeure différente de zéro, car les électrons sortent de la cathode non pas avec des vitesses nulles mais avec des vitesses finies réparties suivant la loi de Maxwell. Et c'est seulement quand le potentiel de freinage atteint une valeur que ne peuvent vaincre même les électrons les plus rapides, que l'intensité du courant s'annule.

L'idée des expériences décrites dans les paragraphes suivants, comme on l'a déjà indiqué, réside dans le fait qu'une fois accélérés de certaine façon les électrons peuvent entrer en collision avec des atomes du gaz introduits sous faible pression dans le tube. Pour déterminer la nature de ces collisions à savoir si elles sont élastiques ou non élastiques, il est souvent nécessaire d'étudier après le choc la répartition des vitesses entre les électrons. Cette étude est réalisée au moyen de la méthode des potentiels de freinage.

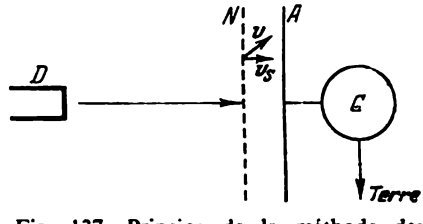


Fig. 137. Principe de la méthode des potentiels de freinage

Soit D la cathode chaude (fig. 137) portée au potentiel d'accélération V. Les électrons accélérés sont dirigés vers la plaque A devant laquelle est placée une grille N. Si l'on porte cette grille jusqu'au potentiel $+V_1$, alors dans l'espace entre N et A les électrons évolueront dans un champ retardateur. Seuls les électrons possédant une énergie cinétique suffisante pour franchir le champ retardateur atteindront la plaque A. Cette dernière par l'office d'un galvanomètre G est mise à la terre. Ainsi donc, les électrons ayant atteint A produisent un courant enregistré par le galvanomètre. Il faut noter que le potentiel de freinage P s'opposant aux électrons se dirigeant vers la plaque A est apprécié non pas en fonction de la vitesse résultante v de l'électron mais d'après sa composante v_s normale à A (fig. 137) : seuls les électrons pour lesquels est satisfaite la relation

$$\frac{1}{2}mv_s^2 \geqslant \frac{1}{300}eP \tag{91.1}$$

peuvent atteindre la plaque A.

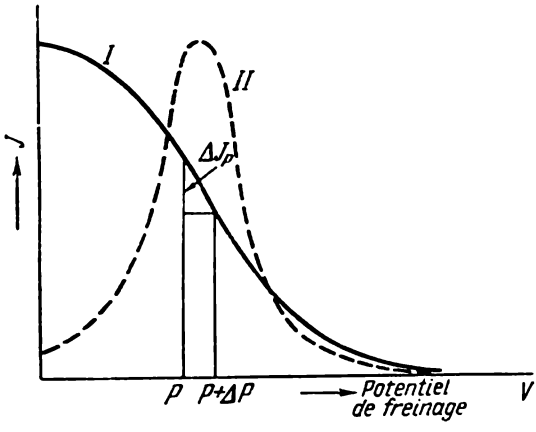


Fig. 138. Caractéristique courant-tension obtenue au moyen de la méthode des potentiels de freinage

Si l'on fait progressivement croître P tout en mesurant le courant au galvanomètre G, on obtient une certaine caractéristique courant-tension I (fig. 138). Cette caractéristique courant-tension permet de *calculer* la répartition des vitesses entre les électrons de la façon suivante. Si le potentiel de freinage est égal à P, l'intensité du courant correspondante J_p est proportionnelle au nombre d'électrons possédant une énergie égale ou supérieure à P électrons-volts. Pour un potentiel de freinage $P+\Delta P$ l'intensité du courant $J_p-\Delta J_p$ est proportionnelle au nombre d'électrons d'énergie supérieure ou égale à $P+\Delta P$ électrons-volts. Ainsi la quantité $(\Delta J_p/\Delta P)\Delta P$ est la mesure du nombre d'électrons correspondant à un intervalle d'énergie variant de P à $P+\Delta P$. En représentant le nombre d'électrons possédant des énergies comprises entre P et $P+dP$ sous la forme de $f(P)dP$, où $f(P)$ est la répartition des électrons en énergies, il devient évident que

$$f(P)=dJ/dP.$$

Il s'ensuit que la courbe de répartition des énergies (des vitesses) entre les électrons s'obtient par dérivation graphique de la caractéristique courant-tension I (fig. 138).

La courbe obtenue après dérivation de la caractéristique courant-tension I est représentée en pointillé (courbe II, fig. 138).

§ 92. Collision élastique

Franck et Hertz ont tout d'abord montré que si l'énergie des électrons ne dépasse pas une certaine valeur critique, la collision entre les électrons et les atomes est de nature élastique. Cela signifie que l'électron après le choc modifie la *direction* de sa vitesse sans perte d'énergie. Pour démontrer ce phénomène plusieurs expériences ont été effectuées dont on ne décrira qu'une seule.

Au centre d'un disque métallique A (fig. 139) on pratique un orifice dans lequel est placé le filament D. Le disque est suspendu par des fils dans un espace où on peut faire varier la pression du gaz. Au moyen d'un artifice quelconque utilisant un joint rodé le disque peut être soulevé ou abaissé sans perturber le vide. Dans l'espace entre un second disque B

et la grille *C* il peut être créé un champ retardateur permettant de mesurer la répartition des vitesses entre les électrons. La pression du gaz est choisie de façon que dans l'espace entre la grille *C* et la plaque réceptrice *B* les électrons ne puissent subir des collisions. Sur la figure 140 on a représenté la distribution d'énergies des électrons dans l'hélium pour une pression de 1,3 mm et pour un potentiel d'accélération de 18 V. La courbe *I* est mesurée pour une distance *AC* égale à 4 mm et la courbe *II*, pour une distance de 18 mm. Quoique les électrons dans le second cas subissent un nombre beaucoup plus grand de collisions que dans le premier, les deux courbes coïncident presque parfaitement. Il en résulte que les chocs entre les électrons d'énergie de 18 eV et les atomes d'hélium s'effectuent de façon suffisamment élastique.

La courbe *III* en pointillé sur la figure 140 est une courbe théorique calculée pour le cas où après la collision les électrons sont supposés avoir modifié la direction de la vitesse de sorte qu'ayant traversé la grille *C* ils peuvent prendre toutes les directions possibles dans les limites de l'hémisphère. Comme on le voit, cette courbe est très proche de celles obtenues expérimentalement.

La nature de ces courbes exige des explications complémentaires.

On remarque que la fonction de distribution des électrons suivant les énergies prend une valeur maximale pour une énergie nulle. La cause en est uniquement géométrique. La courbe théorique *III* a été tracée, comme il a été dit, en supposant que les électrons, après collision, sans varier leur vitesse en *grandeur*, prennent dans l'espace entre la grille *C* et l'anode des directions variées. Puis il faut noter que dans la méthode des potentiels de freinage

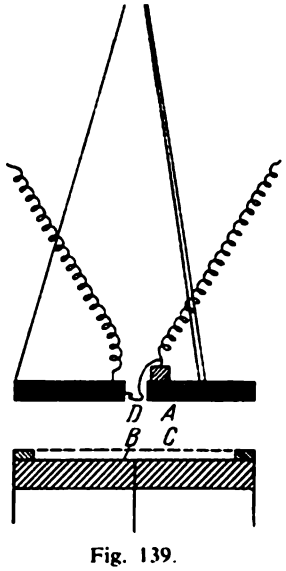


Fig. 139.

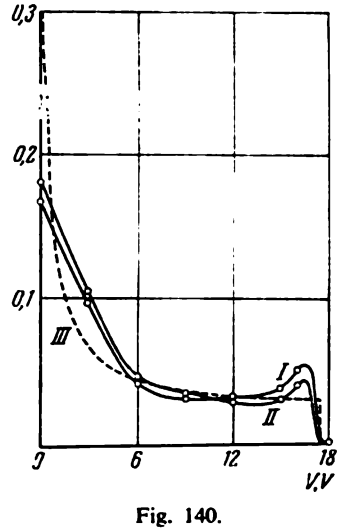


Fig. 140.

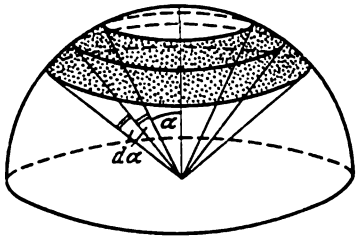


Fig. 141.

au cas d'électrodes plates, on ne doit tenir compte que de la composante *normale* de la vitesse (voir § 91). Pour une répartition uniforme des vitesses en direction le nombre d'électrons pénétrant à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin \alpha \, d\alpha$ (fig. 141) sera

$$dN = N_0 \, d\Omega = 2\pi N_0 \sin \alpha \, d\alpha.$$

Il en découle que le plus grand nombre d'électrons est obtenu lorsque l'angle α est égal à $\pi/2$. Or, pour ces électrons la composante normale de la vitesse est égale à zéro, ce qui explique la montée de la courbe quand on passe à une énergie nulle. Un petit maximum observé sur les courbes expérimentales pour une énergie quelque peu inférieure à 18 eV s'explique manifestement par une répartition en directions des électrons traversant la grille qui n'est pas complètement désordonnée : une grande partie des électrons conservent la direction de la vitesse proche de la normale.

§ 93. Collisions inélastiques. Potentiels critiques

Pour démontrer l'existence des collisions inélastiques Franck et Hertz ont utilisé l'installation suivante. Les électrons produits par le filament *D* (fig. 137) étaient accélérés par un potentiel négatif appliqué au filament. Dans l'espace entre *D* et *N* ces électrons subissaient de nombreuses collisions et percutaient en fin de compte la plaque détectrice *A*. Le galvanomètre *G* relié à *A* mesurait le courant de la plaque. La grille *N* ayant une faible charge positive par rapport à *A* (dans la plupart des cas à +0,5 V) était placée devant la plaque *A*. Cette grille devait retenir les électrons ayant perdu presque complètement leur énergie par suite de collisions inélastiques. L'expérience était réalisée avec des vapeurs de mercure pour des pressions relativement élevées (près de 1 mm) et consistait dans la mesure du courant de la plaque *A* en fonction du potentiel d'accélération appliqué au filament *D*.

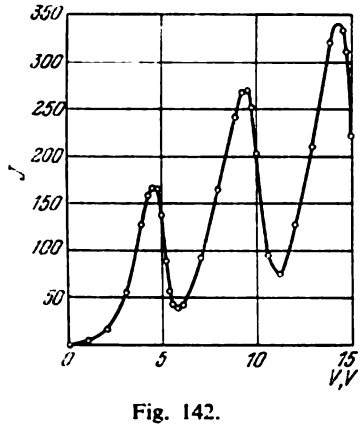


Fig. 142.

Avec l'accroissement du potentiel d'accélération à partir du zéro le courant commençait par croître (fig. 142), la courbe du courant était de la forme des caractéristiques courant-tension obtenues habituellement avec les appareils thermoélectroniques. Mais pour un potentiel d'environ 4,1 V le courant chutait brusquement pour monter ensuite jusqu'au potentiel de 9,0 V pour lequel on obser-

vait de nouveau une chute brusque suivie d'un accroissement jusqu'au potentiel de 13,9 V. C'est ainsi que toute la courbe se présentait sous la forme d'une suite de pics distants de 4,9 V. Le fait que la distance entre deux pics voisins était toujours (avec une incertitude de 0,1 V) de 4,9 V et que le premier pic s'observait pour 4,1 V s'explique facilement par la superposition au potentiel d'accélération de la différence de potentiel de contact qui pour ainsi dire déplace toute la courbe vers la gauche sans modifier la distance entre les pics.

L'interprétation des maximums de la courbe sur la base de ce qui a été dit au § 91 ne présente pas de difficultés. Tant que l'énergie de l'électron n'atteint pas 4,9 V il subit avec les atomes du mercure des collisions élastiques et le courant augmente avec l'élévation du potentiel suivant la loi normale. Quand le potentiel atteint 4,9 V, le choc devient inélastique, l'électron cède à l'atome du mercure au cours de la collision toute son énergie. Ces électrons n'atteignent pas la plaque A, car ils seront attirés par la grille N chargée à $+0{,}5$ V et le courant de la plaque chute brusquement.

Si l'énergie des électrons dépasse de beaucoup 4,9 V, ces électrons, après avoir perdu une partie de leur énergie du fait du choc inélastique, conservent un excès d'énergie suffisant et, nonobstant la présence de la grille chargée positivement, atteignent la plaque A et le courant recommence à monter.

Notons quelle que soit l'énergie des électrons ayant subi leur première collision inélastique ils atteindront tous la plaque A avec la même énergie. Pour fixer les idées supposons que le potentiel de la cathode soit égal à zéro, le potentiel de la plaque A à $+V_p$, le potentiel critique à V_A (dans le cas décrit $V_A=4{,}9$ V) et admettons que la grille N soit enlevée. La chute de potentiel V_p a lieu sur tout le parcours de D à A. Supposons que l'électron subit une collision inélastique au point où le potentiel est V_x. Arrivé à ce point il acquerra une énergie eV_x et en cas d'une collision inélastique il en cédera eV_A. Ainsi donc, après la collision il aura une énergie $e(V_x-V_A)$. La différence de potentiel sur le parcours restant jusqu'à la plaque A sera V_p-V_x; sur ce trajet l'électron acquerra encore une énergie $e(V_p-V_x)$ et, par suite, arrivé à la plaque A il possédera une énergie

$$e(V_x-V_A)+e(V_p-V_x)=e(V_p-V_A).$$

Comme on le voit, cette énergie est tout à fait indépendante du point où a lieu la première collision inélastique. Si le potentiel d'accélération V_p est suffisamment grand de sorte que $V_p-V_A>4{,}9$ V, alors sur le parcours restant l'électron peut subir encore une ou deux (suivant la valeur de V_p-V_A) collisions inélastiques et c'est justement la raison des répétitions périodiques des pics.

On voit ainsi que l'énergie de 4,9 eV joue un rôle particulier pour les atomes de mercure. Ils ne peuvent absorber une énergie inférieure, car s'ils sont bombardés par des électrons possédant cette énergie le choc est élastique; quant à l'énergie de 4,9 eV ils l'absorbent complètement. Cela confirme justement le premier postulat de Bohr d'après lequel l'atome de mercure

ne peut posséder des énergies quelconques mais seulement bien définies. Si E_1 est la réserve d'énergie de l'atome de mercure « non excité », la valeur suivante possible de l'énergie de l'atome sera $E_1+4{,}9$ eV. Le potentiel d'accélération de 4,9 V est appelé « premier potentiel critique » ou « potentiel de résonance » de l'atome de mercure. Des potentiels de résonance analogues furent trouvés pour les autres atomes. Par exemple, pour le potassium le potentiel de résonance est égal à 1,63 V, pour le sodium à 2,12 V, pour l'hélium à 21 V, etc.

Il va de soi qu'outre l'énergie associée au premier potentiel critique les atomes peuvent posséder d'autres niveaux plus élevés d'énergie d'excitation. Ces niveaux plus élevés d'excitation peuvent également être trouvés au moyen de la méthode des collisions électroniques. Cependant la méthode expérimentale permettant d'atteindre ce but doit subir des modifications. On abordera cette question aux paragraphes suivants.

§ 94. Perfections apportées à la méthode expérimentale

Malgré ses multiples avantages la méthode décrite présente des sérieux défauts. En particulier, elle ne permet pas de distinguer les pics très voisins, or fort souvent les niveaux d'excitation sont très rapprochés. Le calcul montre que la forme de la courbe dépend de façon essentielle de la grandeur de la chute de potentiel sur un parcours libre λ, c'est-à-dire de la grandeur $\lambda\frac{dV}{dx}$. Plus cette grandeur est faible, plus le maximum est en pic, mieux se détermine le potentiel critique et mieux se distinguent deux niveaux d'excitation rapprochés. Si, toutefois, on choisit les conditions pour lesquelles $\lambda\frac{dV}{dx}$ est suffisamment petit, il devient alors impossible de déterminer les niveaux d'excitation plus élevés. Pour pallier à ce défaut Franck et Hertz modifièrent leur méthode de façon que l'accumulation d'énergie par l'électron se réalise dans une partie de l'appareil et la collision dans l'autre. Pour y arriver il fut suffisant d'introduire une seconde « grille » N_1 (fig. 143) placée par rapport au filament D à une distance petite devant le libre parcours moyen de l'électron. C'est ainsi que les électrons ayant acquis leur énergie sur le parcours $D-N_1$ arrivent dans l'espace R entre les grilles métalliques échappant à l'action du champ et y subissent de nombreuses collisions avec les atomes du gaz. A la sortie des électrons de cet espace à travers les mailles de la grille N ceux d'entre eux qui ont perdu leur énergie sont de nouveau attirés par la grille chargée à $+0{,}5$ V, et le processus décrit dans le paragraphe précédent se répète.

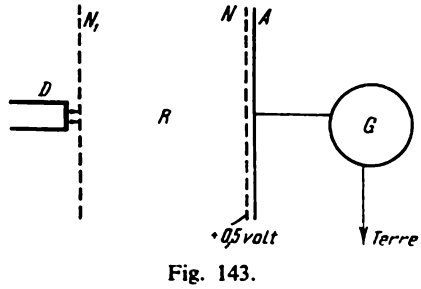


Fig. 143.

La modification la plus élégante

apportée à cette méthode fut l'œuvre de Hertz qui réalisa le montage suivant (fig. 144). Les électrons émis par le filament D étaient accélérés dans l'espace DN_1 et à travers la grille N_1 passaient dans l'espace R non soumis au champ et entouré d'une grille cylindrique N_2. Après de nombreux chocs ces électrons diffusaient à travers la grille N_2 dans l'espace entre N_2 et le cylindre métallique uni P. Au moyen d'un galvanomètre le courant du cylindre était mesuré deux fois: en l'absence du champ entre N_2 et P et sous un potentiel de freinage de $+0{,}2$ V. Dans le premier cas P était heurté par tous les électrons ayant diffusé dans l'espace N_2P, dans le second les électrons ayant perdu leur énergie par chocs inélastiques étaient «repêchés». La différence entre les deux valeurs du courant divisée par le courant primaire devait évidemment produire un maximum pour la valeur critique du potentiel d'accélération, car dans ce cas une grande partie des électrons perdaient leur énergie et le courant en présence du potentiel de freinage devenait très faible. Cette méthode a permis de distinguer des pics séparés par des fractions de volt et de détecter des maximums peu marqués.

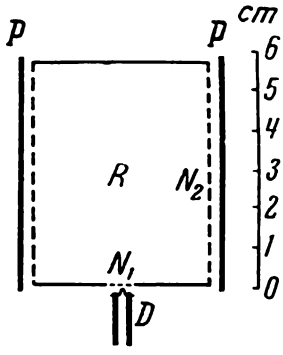


Fig. 144. Montage de Hertz

§ 95. Détermination simultanée de tous les niveaux d'excitation

On a déjà mentionné que les méthodes décrites peuvent être utilisées à la détermination des hauts niveaux d'énergie. Dans ce but il est nécessaire de choisir les conditions d'expériences pour lesquelles la pression du gaz soit la plus petite possible. C'est important car pour des grandes pressions les collisions des électrons avec les atomes du gaz sont si nombreuses qu'il suffit à l'électron d'accumuler une énergie égale ou dépassant quelque peu le premier potentiel critique pour que la probabilité de sa transmission à l'atome devienne très grande. Pour une pression suffisamment basse et un potentiel d'accélération suffisamment grand apparaissaient des possibilités d'excitation jusqu'à des états stationnaires plus élevés.

Toutefois les valeurs du potentiel critique obtenues directement de l'expérience ne fournissent pas encore les vraies valeurs des niveaux d'énergie, car la réalisation de doubles ou de multiples transmissions d'énergie n'est toujours pas exclue. L'exemple suivant le montre clairement. Des observations directes pour des vapeurs de mercure fournissent les valeurs suivantes de potentiels critiques : 4,9; 9,8; 11,2; 13,5; 14,7; 16; 17,6; 19,3; 20,2; 21,2 V. En fait, tous ces potentiels sont des combinaisons de deux potentiels fondamentaux : $a=4{,}9$ V et $b=6{,}7$ V, ce dernier n'étant jamais observé séparément. En effet, il est facile de constater que $9{,}8=2a$; $11{,}2\approx \approx a+b$; $13{,}5=2b$; $17{,}6\approx a+2b$; $21{,}2=3a+b$, etc. L'interprétation des maximums obtenus n'est donc pas si simple.

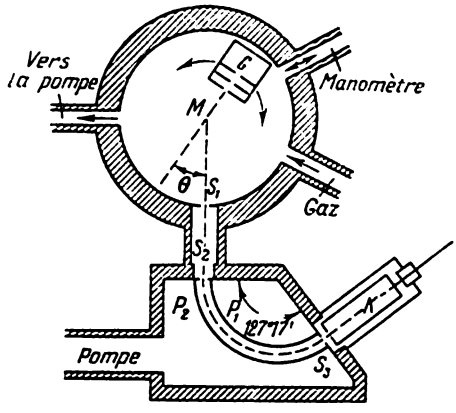


Fig. 145. Schéma de la méthode de détermination de tous les niveaux d'excitation

De façon beaucoup plus sensible les mêmes niveaux d'énergie élevés peuvent être déterminés à l'aide de la méthode proposée par Hughes, Rojanski et MacMillan. L'idée de l'expérience est la suivante: un faisceau d'électrons rigoureusement homogène d'énergie dépassant le niveau d'excitation le plus élevé des atomes étudiés est introduit dans un gaz très raréfié. Au cours des chocs inélastiques certains électrons perdent une partie de leur énergie correspondant à des niveaux d'excitation possibles des atomes. Comme le gaz est fortement raréfié, la probabilité de chocs répétés est faible. Si maintenant on développe en spectre de vitesses le faisceau d'électrons ayant subi des chocs, ce spectre donnera aussitôt toutes les pertes d'énergie et en même temps tous les niveaux d'énergie possibles. Quant à l'expérience elle était réalisée de la façon suivante. Un faisceau d'électrons d'énergie de 50 eV était obtenu à l'aide d'un « canon à électrons» G (fig. 145). Ce faisceau était dirigé suivant le diamètre

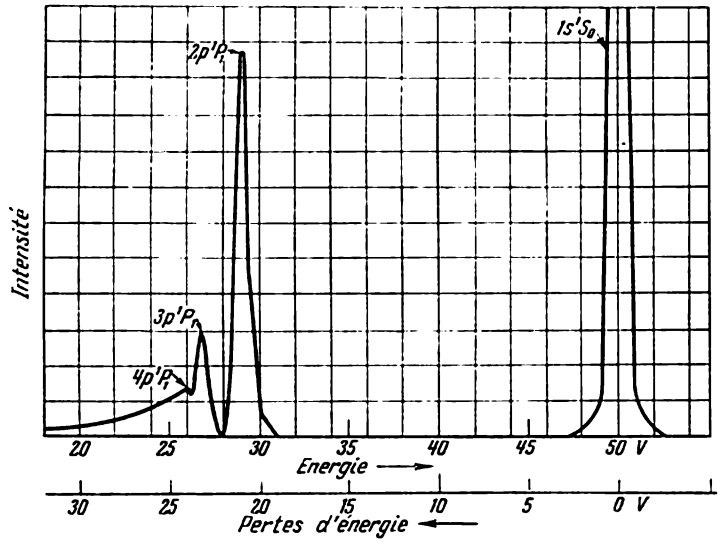


Fig. 146. Spectre de vitesses des électrons à énergie initiale de 50 eV après collisions avec les atomes de l'hélium

du cylindre métallique contenant de l'hélium très raréfié. A travers les fentes S_1 et S_2 ne pouvaient passer que des électrons ayant subi des collisions au centre M du cylindre et, par suite, ayant été déviés de leur direction initiale de l'angle θ. Deux plaques P_1 et P_2 enroulées en forme de cylindre et délimitant l'espace dans lequel pénétraient ensuite les électrons jouaient le rôle de « filtre » de vitesses (voir § 9); après avoir traversé la fente S_3 les électrons pénétraient dans le cylindre de Faraday K dont la charge pouvait être mesurée à l'aide d'un électromètre. Comme pour une différence de potentiel bien définie sur le filtre P_1P_2 ce dernier ne se laissait traverser que par des électrons aux vitesses bien déterminées, on pouvait, en faisant varier l'intensité du champ dans l'espace P_1P_2, trouver la répartition en énergie des électrons diffusés sous l'angle θ. La variation de l'angle θ se réalisait par des déplacements du canon à électrons G dans des directions indiquées par des flèches sur la figure 145.

Le spectre d'énergie des électrons d'énergie initiale de 50 eV obtenu par cette voie après collision avec les atomes de l'hélium est représenté à la figure 146. Comme on le voit dans ce spectre à côté du maximum associé à l'énergie initiale des électrons de 50 eV on observe des maximums pour 28,8; 27,2; 26,38 eV. Il s'ensuit que pour des collisions inélastiques des électrons avec des atomes de l'hélium les électrons ne peuvent céder que des portions d'énergie rigoureusement déterminées à savoir : 50−28,2=21,2; 50−27,2= =22,8; 50−26,4=23,6 eV.

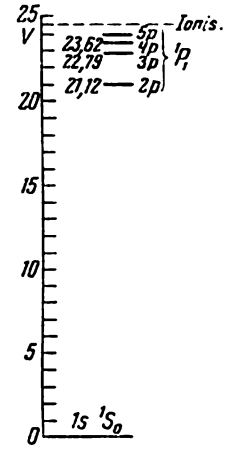


Fig. 147. Schéma des niveaux de l'hélium

Si l'on convient que l'énergie des atomes de l'hélium est égale à zéro avant la collision (état normal) et on représente les états d'énergie possibles par des lignes horizontales se disposant à des hauteurs correspondantes, on obtient le schéma des « niveaux d'énergie » de l'atome d'hélium présenté à la figure 147. L'énergie des différents niveaux indiquée sur ce schéma est calculée d'après les données spectroscopiques. Comme on le voit la correspondance avec les chiffres obtenus par l'expérience des collisions est tout à fait satisfaisante. Ainsi donc, ces expériences peuvent être considérées comme une confirmation expérimentale particulièrement explicite de la justesse du premier postulat de Bohr.

§ 96. Mesure des potentiels d'ionisation

Comme il a été mentionné, toutes les méthodes décrites permettent de trouver les *différences* des valeurs des énergies des états stationnaires différents. Par exemple, on peut dire que pour l'atome de mercure la différence E_2-E_1 *est égale* à 4,9 eV. Mais les valeurs mêmes des énergies E_1, E_2, E_3, ..., E_n ne peuvent pas être trouvées par ces méthodes. Pour trouver ces valeurs il est évidemment suffisant de déterminer l'énergie qu'il faut

dépenser pour extraire un électron de l'atome se trouvant dans un état énergétique déterminé. En d'autres termes, le problème de la recherche des valeurs absolues de l'énergie $E_1, \ldots, E_n$ se ramène au problème de la détermination du potentiel d'*ionisation* des différents états énergétiques.

Pour déterminer les potentiels d'ionisation on a proposé plusieurs méthodes. On ne décrira que la méthode de Hertz se caractérisant par une particulière simplicité et précision. Une modification insignifiante du montage de Hertz décrit au § 94 permet également de trouver au moyen d'un appareillage identique les potentiels d'ionisation. Cette modification consiste en l'adjonction d'un second filament G (fig. 148) placé au sein de l'espace R. Si l'on joint la grille N_2 au cylindre P et on établit une différence de potentiel entre G et N_2, alors le galvanomètre indiquera un courant thermoélectronique entre G et N_2. En augmentant le courant du filament

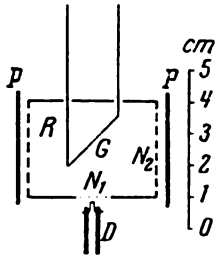


Fig. 148.

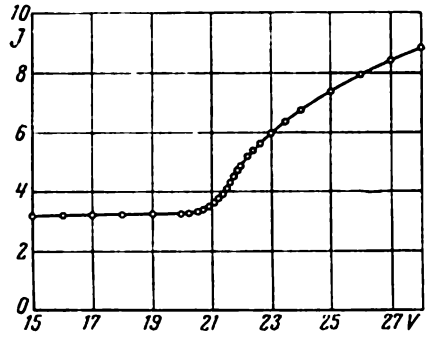


Fig. 149.

G on fait croître le courant thermoélectronique mais seulement jusqu'à une certaine limite, après quoi l'accroissement cesse. Ceci s'explique par le fait que pour des grands courants du filament dans l'espace entourant le filament G il se forme une charge spatiale qui empêche la sortie ultérieure des électrons du filament.

Supposons maintenant que dans l'espace R pénètrent des électrons en provenance de la cathode G accélérés par des potentiels correspondants. Si l'énergie de ces électrons est suffisante pour ioniser les atomes gazeux de R, alors chaque ionisation engendre des ions positifs lourds (par rapport aux électrons) qui se déplacent lentement et compensent une partie de la charge spatiale. Par suite avec l'apparition de ces ions le courant thermoélectronique entre G et N_2 s'accroît brusquement.

Par l'observation du potentiel d'accélération entre D et N_1 pour lequel le courant commence à croître on peut déterminer le potentiel d'ionisation. Sur la figure 149, en qualité d'exemple, on a donné la courbe tracée pour le néon; l'accroissement brusque du courant autour de 21 V saute aussitôt

Tableau X

Potentiels d'ionisation des éléments

Numéro atomique	Elément	Premier potentiel d'ionisation, en eV	Numéro atomique	Elément	Premier potentiel d'ionisation, en eV
1	H	13,539	14	Si	7,39
2	He	24,45	15	P	10,3
3	Li	5,371	16	S	10,31
4	Be	9,50	17	Cl	12,96
5	B	8,34	18	Ar	15,70
6	C	11,217	19	K	4,32
7	N	14,474	20	Ca	6,09
8	O	13,565	21	Sc	6,57
9	F	18,6	22	Ti	6,81
10	Ne	21,482	23	V	6,76
11	Na	5,116	24	Cr	6,74
12	Mg	7,61	25	Mn	7,40
13	Al	5,96	26	Fe	7,83

aux yeux. C'est de cette façon qu'ont été trouvés les potentiels d'ionisation pour un grand nombre d'atomes du système périodique (voir tableau X).

Le potentiel d'ionisation est typique pour les propriétés périphériques de l'atome puisqu'il s'agit de soutirer aux atomes les électrons *extérieurs*. Comme toutes les autres propriétés périphériques les potentiels d'ionisation montrent une dépendance périodique du numéro atomique (fig. 150). Sur la figure 150 on voit que les maximums de la courbe correspondent aux gaz nobles qui sont également chimiquement inactifs. Au contraire, les métaux alcalins (Li, Na, K, Rb, Cs) monovalents et chimiquement très actifs possèdent des potentiels d'ionisation minimaux.

Jusque-là on n'avait en vue que les *premiers* potentiels d'ionisation, c'est-à-dire les énergies de libération d'un électron de l'atome neutre. Les modes de libération du second, du troisième électron, etc., présentent également un intérêt. Les installations décrites permettent de détecter l'apparition des ions positifs (début d'ionisation) mais ne permettent pas de se prononcer sur la nature des ions et en particulier de déterminer le nombre de charges des ions apparus.

Pour l'étude des étapes successives d'ionisation et la détermination de la nature des ions positifs on utilise les méthodes masse-spectrométriques (voir § 15). Etant donné que le spectromètre de masse permet de déterminer le *rapport* de la charge à la masse E/M, l'ion à n charges $E=ne$ correspond à une masse M/n $\left(\frac{ne}{M}=\frac{e}{M/n}\right)$. La courbe représentée sur la figure 151 est un spectre de masse d'ions se formant dans les vapeurs de césium lors du bombardement par des électrons d'énergie égale à 700 eV. Les sept maximums qu'on voit sur la figure correspondent aux sept phases successives

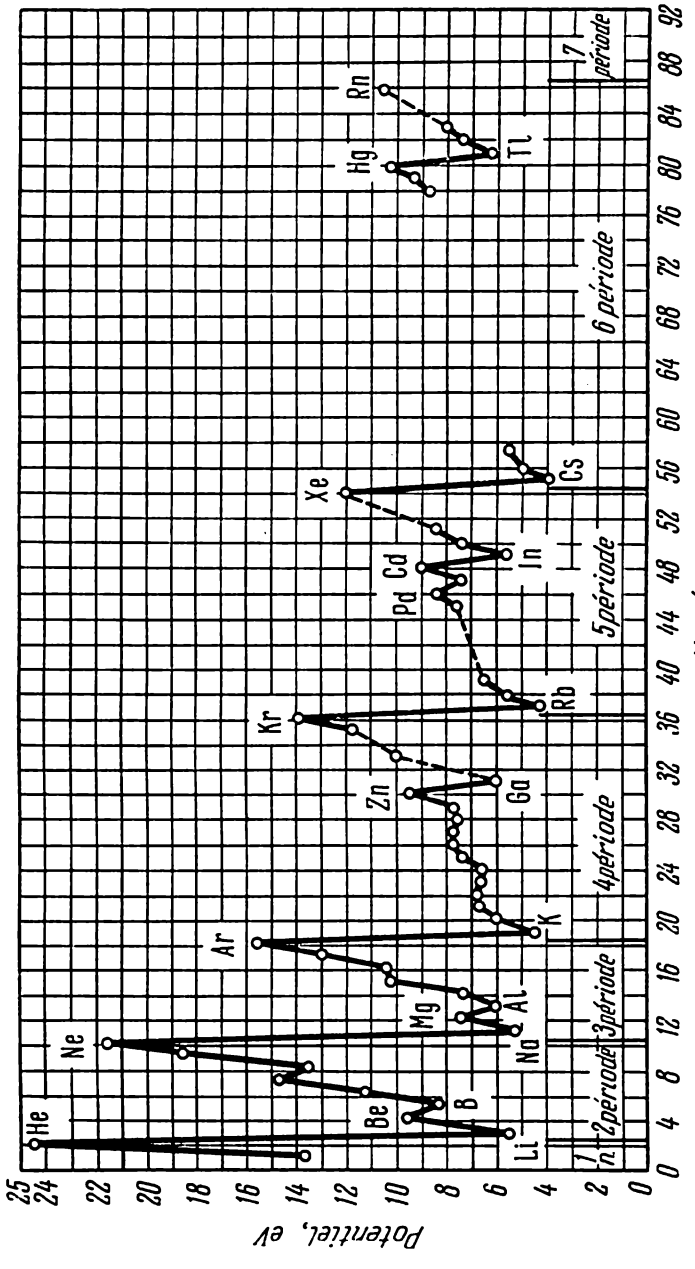


Fig. 150. Premier potentiel d'ionisation représenté comme une fonction du numéro atomique

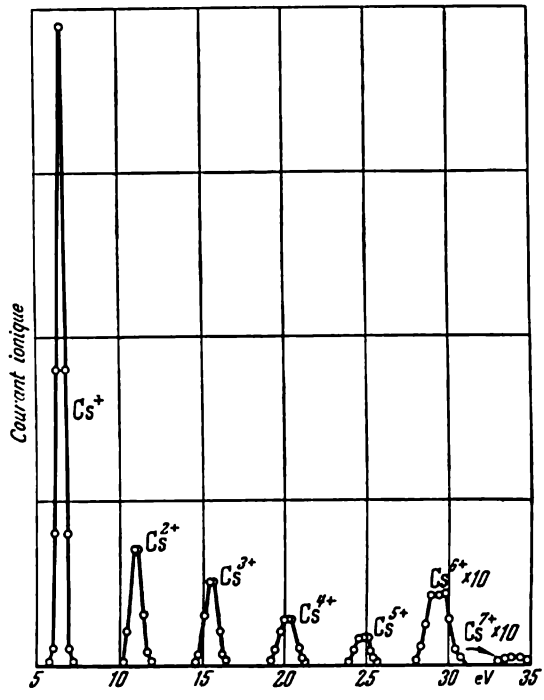


Fig. 151. Analyse des vapeurs de césium ionisées par des électrons d'énergie de 700 eV

d'ionisation de l'atome de césium. Les valeurs des potentiels d'ionisation correspondants sont :

Ion	Cs^+	Cs^{2+}	Cs^{3+}	Cs^{4+}	Cs^{5+}	Cs^{6+}	Cs^{7+}
Potentiel d'ionisation, eV	3,9	27,4	62	113	171	275	410

§ 97. Rayonnement des atomes excités

L'atome ayant reçu un complément d'énergie au cours du choc avec l'électron le conserve pendant un certain temps puis sous l'effet de l'excitation le restitue et revient à son état normal. Si la pression du gaz est suffisamment faible, le mode le plus probable de retour à l'état normal se résout par une émission d'énergie sous forme de lumière. D'où une nouvelle voie expérimentale de vérification du postulat de Bohr. Soit, par exemple, l'atome de mercure. Son premier potentiel critique est égal à 4,9 eV, c'est-à-dire

$$E_2 - E_1 = 4{,}9 \text{ eV}.$$

D'après le second postulat de Bohr toute cette énergie au cours de la transition à l'état normal doit être émise sous forme d'un quantum de lumière monochromatique :

$$E_2 - E_1 = h\nu = hc/\lambda.$$

De là on obtient pour λ

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}} \approx 2520 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 2520 \text{ Å}.$$

Ainsi donc, si la théorie est juste, les vapeurs de mercure bombardées par des électrons d'énergie 4,9 eV devraient donner un spectre composé uniquement d'une raie ultraviolette à $\lambda \approx 2520$ Å. L'expérience décèle effectivement une raie ultraviolette avec $\lambda \approx 2537$ Å.

Le fait que cette raie apparaît au cours de la transition du *premier* état excité à l'état normal peut être confirmé par l'expérience de son excitation optique. Si l'on éclaire des vapeurs de mercure raréfiées par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 2537$ Å, alors, d'après ce qui précède, les atomes absorbants devraient passer à l'état d'énergie de 4,9 eV et, en repassant à l'état normal, rayonner une seule raie de *même longueur d'onde* si entre E_1 et E_2 il n'y a aucun niveau intermédiaire. L'expérience confirme également cette conclusion. Ces raies spectrales s'appellent raies *de résonance*, car leur longueur d'onde est exactement égale à la longueur d'onde absorbée par excitation optique. Il est évident qu'en déterminant la longueur d'onde des raies de résonance il est également possible de calculer le premier potentiel critique.

Une situation analogue a lieu aussi dans le cas d'autres gaz ou vapeurs monoatomiques. Sur la figure 152 on a donné en qualité d'exemple le spectre des vapeurs du magnésium excitées par des chocs des électrons possédant un potentiel d'accélération de 3,2 V. Comme on le voit, pour un

Fig. 152. Spectre des vapeurs de magnésium excitées par des électrons d'énergie de 3,2 eV

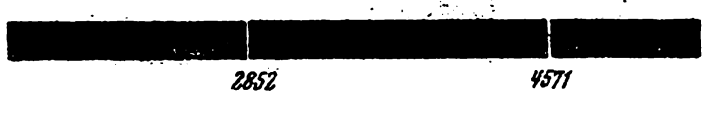


Fig. 153. Spectre des vapeurs de magnésium excitées par des électrons d'énergie de 6,5 eV

potentiel de 3,2 V le spectre comprend une seule raie de 4571 Å (potentiel de résonance de 2,65 V). Sur la figure 153 on voit que pour un potentiel d'excitation de 6,5 V il apparaît déjà deux raies : la raie mentionnée de 4571 Å et une nouvelle raie de longueur d'onde égale à 2852 Å. Pour un potentiel encore plus élevé (10 V) il est possible d'obtenir le spectre complet des vapeurs du magnésium.

§ 98. Emission spontanée

Au paragraphe précédent on a déjà passé de la démonstration de l'existence des niveaux d'énergie et des modes de leur détermination directe à l'étude des transitions entre les différents niveaux. Etant donné l'importance de ces phénomènes de transition il faut maintenant procéder à une analyse plus profonde de leurs bases théoriques. Cette analyse permet de déceler certaines singularités des phénomènes quantiques et en qualité d'application directe des résultats et des méthodes étudiés on produira une déduction simple et rigoureuse de la formule de Planck faite par Einstein.

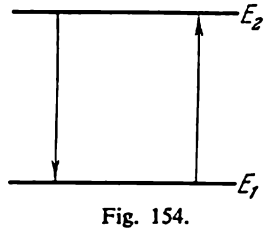


Fig. 154.

Passons donc à l'étude de l'atome en état libre et non soumis aux actions extérieures. L'atome peut se trouver dans des états quantiques différents auxquels correspond une suite discrète de niveaux d'énergie. Pour plus de simplicité on n'examinera que deux de ces états d'énergies E_1 et E_2 (fig. 154). Pour abréger on appellera ces états état 1 et état 2.

Si l'atome à un certain moment t se trouve à l'état excité 2, alors après un intervalle de temps dt il se trouvera soit au même état, soit passera à l'état inférieur 1 en cédant l'excès d'énergie E_2-E_1 sous forme de rayonnement.

Dans ce paragraphe et les suivants on verra que les transitions avec rayonnement peuvent s'accomplir soit indépendamment de l'action du champ extérieur, dans lequel se trouve l'atome excité, soit sous l'action de ce champ. Dans le premier cas les transitions sont dites *spontanées*, dans le second *forcées*.

On commencera par l'étude des transitions spontanées en utilisant la méthode statistique. Cela signifie que l'on ne peut prédire *avec certitude* s'il se produit ou s'il ne se produit pas dans l'*atome considéré* une transition durant la seconde suivant l'instant t et on ne peut qu'indiquer sa *probabilité*. Appelons cette probabilité de transition spontanée $2\to 1$ en l'unité de temps A_{21}. Puisque la transition spontanée est un processus aléatoire, il est supposé que A_{21} est indépendant du temps.

Soit maintenant un ensemble composé d'un grand nombre d'atomes qui, toutefois, forment un gaz suffisamment raréfié pour que l'interaction entre les atomes puisse être négligée. Supposons que N_2 du nombre de ces atomes se trouvent au moment t dans l'état 2. Dans l'intervalle de temps de t à $t+dt$ une partie de ces atomes passera *spontanément* dans l'état 1. Puisque

ces transitions sont des phénomènes aléatoires, on ne peut indiquer *lesquels* de ces atomes accompliront la transition mais connaissant la probabilité A_{21} on peut prévoir *combien* d'atomes en moyenne effectueront ces transitions. C'est précisément le nombre de transitions dZ_{21} durant l'intervalle de temps dt qui sera évidemment proportionnel au nombre d'atomes N_2 se trouvant dans l'état 2

$$dZ_{21} = A_{21} N_2 \, dt. \tag{98.1}$$

Comme à chacune de ces transitions d'après la condition des fréquences de Bohr il est rayonné une énergie $E_2 - E_1 = h\nu$, il sera émis dans le même intervalle de temps une énergie égale à

$$h\nu \, dZ_{21} = A_{21} N_2 h\nu \, dt. \tag{98.2}$$

Maintenant on peut trouver la loi de décroissement du nombre d'atomes excités avec le temps ainsi que la *durée de vie moyenne* de l'atome en état d'excitation.

Il est évident que le nombre de transitions dZ_{21} dans l'intervalle de temps dt est égal à la diminution du nombre d'atomes se trouvant à l'instant t dans l'état d'excitation, $dZ_{21} = -dN_2$. C'est pourquoi la formule (98.1) donne

$$-dN_2 = A_{21} N_2 \, dt. \tag{98.3}$$

En intégrant on trouve

$$N_2 = N_{20} e^{-A_{21} t}, \tag{98.4}$$

où N_{20} est le nombre d'atomes se trouvant dans l'état 2 à l'instant $t = 0$.

En tenant compte de la formule (98.2) on trouve l'énergie émise en l'unité de temps, c'est-à-dire l'intensité d'émission lumineuse

$$J = A_{21} N_{20} e^{-A_{21} t} h\nu = J_0 e^{-A_{21} t}, \tag{98.5}$$

où $J_0 = A_{21} N_{20} h\nu$. Ainsi donc, l'émission lumineuse du gaz excité doit diminuer avec le temps suivant la loi exponentielle.

La durée de vie moyenne dans l'état excité peut donc être calculée de la façon suivante. Le nombre d'atomes accomplissant la transition $E_2 \to E_1$ dans l'intervalle de temps t, $t + dt$ est égal à $A_{21} N_2 \, dt$. C'est également le nombre d'atomes ayant « vécu » dans l'état excité durant t s. La somme de leurs durées de vie est égale par conséquent à $tA_{21} N_2 \, dt$ et la somme des durées de vie de tous les atomes ayant subi la transition durant le temps de 0 à ∞ sera $\int_0^\infty tA_{21} N_2 \, dt$. On en tire la durée de vie moyenne τ

$$\tau = \frac{\int_0^\infty tA_{21} N_2 \, dt}{N_{20}}$$

ou en tenant compte de (98.4)

$$\tau = A_{21} \int_0^\infty t e^{-A_{21} t} dt. \tag{98.6}$$

Intégrant par parties et passant aux limites (voir p. 85) on trouve

$$\tau = \frac{1}{A_{21}}. \tag{98.7}$$

Considérant (98.7) et notant $N_{20} A_{21} h\nu$ par J_0 la formule (98.5) de l'intensité peut être récrite sous la forme

$$J = J_0 e^{-t/\tau}. \tag{98.8}$$

Au § 70 on a déjà étudié l'atténuation du rayonnement d'un oscillateur linéaire du point de vue de l'électrodynamique classique et on a abouti à la formule (70.4′) qui de façon *formelle* est identique à la formule (98.8). La formule (70.4′) contient comme constante caractérisant l'atténuation le temps τ que l'on a appelé temps de relaxation. Or le contenu physique de la notion « durée de vie moyenne » en état d'excitation diffère profondément de celui de « temps de relaxation ». Suivant l'électrodynamique classique tous les dipôles rayonnants exécutent simultanément des vibrations forcées et le temps τ égal au temps de diminution du carré de l'amplitude de e fois est le même pour tous les dipôles du même genre.

Ici on examinera le processus du rayonnement comme un ensemble de transitions quantiques indépendantes subies par différents atomes excités en des temps les plus divers. Se produira-t-il ou ne se produira-t-il pas à un *moment donné* une transition est du ressort des lois aléatoires : un des atomes excités peut revenir à son état normal au bout d'un temps très court, tandis qu'un autre atome peut « survivre » dans cet état très longtemps. Mais comme il arrive toujours pour des processus de masse la durée de vie moyenne des atomes du genre considéré aura une valeur déterminée.

La vérification expérimentale de la loi de l'atténuation de l'émission lumineuse et la détermination de la durée de vie moyenne dans l'état excité ont été réalisées le plus directement par Wien dans ses expériences avec l'émission des rayons positifs. Un faisceau de rayons positifs d'hydrogène traverse une fente large de 0,1 à 0,25 mm et pénètre dans l'espace où un vide très poussé est maintenu de sorte que les atomes excités peuvent s'y « désexciter » pratiquement sans collisions. On obtenait ainsi un faisceau lumineux de rayons positifs dont l'intensité diminuait tout au long du chemin parcouru et qui occupait toute la fente du spectrographe à quartz. Un prisme en quartz décomposait ce faisceau en spectre de sorte que l'extinction de la lueur pouvait être suivie pour chaque raie spectrale séparément. Si v est la vitesse des rayons positifs et y la distance d'un point quelconque à l'origine du faisceau, alors $t = y/v$ et $e^{-t/\tau} = e^{-y/v\tau}$. Ainsi donc, le temps τ peut être déterminé d'après l'intensité décroissant le long du faisceau de rayons positifs.

Par cette méthode on a obtenu pour la raie rouge de l'hydrogène H_α(λ= =6562 Å) $\tau=1{,}5\cdot10^{-8}$ s; pour la raie de résonance du mercure (λ=2537 Å) on a obtenu $\tau=9{,}8\cdot10^{-8}$ s avec une bonne coïncidence avec les résultats de calculs de τ par des voies indirectes.

La nature statistique de l'émission spontanée entraîne une conséquence importante : le *rayonnement spontané est incohérent*. Puisque le rayonnement spontané a lieu dans des atomes spatialement séparés et à des moments du temps variés, entre les phases des ondes émises par les différents atomes il n'y a aucune liaison régulière. Par conséquent, ne peuvent interférer entre elles que des ondes émises par un atome bien défini après séparation de ces ondes en deux flux au moyen d'un artifice quelconque. Les figures d'interférences formées par les ondes émises par des atomes différents sont simplement sommées entre elles. Cette particularité limite la possibilité de réalisation d'interférences même à partir d'une source unique. D'où, par suite, l'importance de l'étalement de la source, la nécessité d'intercaler une fente entre la source et l'interféromètre, etc.*).

§ 99. Absorption et émission forcée

Les transitions spontanées étudiées dans le paragraphe précédent sont indépendantes du champ électromagnétique entourant les atomes excités. Occupons-nous maintenant des processus s'effectuant sous l'action de ce champ.

Les atomes non excités se disposant au niveau d'énergie le plus bas E_1 passeront à l'état excité E_2 sous l'influence du champ en absorbant l'énergie $E_2-E_1=h\nu$ du champ environnant. Ces processus comme les transitions spontanées seront examinés sous l'angle statistique. Il est évident que la probabilité de transition avec absorption dans l'intervalle de fréquences ν, $\nu+d\nu$ sera proportionnelle à la densité d'énergie du champ $\varrho_\nu d\nu$ dans cet intervalle et à un certain coefficient B_{12} définissant la probabilité d'excitation du système atomique donné. Ainsi donc, la probabilité d'absorption (par unité d'intervalle) sera $\varrho_\nu B_{12}$.

Il apparaît toutefois que l'action du champ ne se limite pas au processus d'absorption. C'est Einstein qui le premier remarqua que si l'on ne tient compte dans l'étude de l'influence du champ que de l'absorption, alors en dégageant la loi de rayonnement on obtient la formule de Wien et non pas celle de Planck. C'est pourquoi il introduisit dans ses recherches un nouveau type de processus dus à l'influence du champ : les *transitions radiatives forcées ou induites* (dans les ouvrages de radiophysique ces processus sont souvent appelés transitions stimulées). Les atomes non excités sous l'action du champ ne peuvent effectuer que les transitions avec absorption, tandis que les atomes dans l'état excité (par exemple au niveau E_2) sont capables, selon Einstein, soit d'absorber de l'énergie à partir du champ en

*) Pour l'analyse détaillée de la notion de cohérence et des conditions de sa réalisation voir G. S. Landsberg, *Optique*, M., 1957 (en russe).

passant à un niveau plus élevé, soit, au contraire, de fournir de l'énergie au champ (par exemple l'énergie $E_2-E_1=h\nu$) en revenant au niveau inférieur d'énergie. Ces dernières transitions sont justement induites; elles produisent le rayonnement induit. La probabilité de ces transitions en l'unité de temps est $\varrho_\nu B_{21}$.

L'hypothèse d'un rayonnement forcé se trouve d'autre part justifiée par la référence à l'analogie classique : un oscillateur classique se trouvant dans un champ d'onde dans l'état non stationnaire près de la résonance entre la fréquence du champ et la fréquence propre de l'oscillateur, peut soit absorber de l'énergie provenant du champ, soit lui en fournir. Lequel de ces deux phénomènes doit se produire dépend du rapport des phases du champ et de l'oscillateur.

Actuellement on possède des preuves expérimentales directes de la réalité des transitions induites. On reviendra à cette question au § 101 où l'on étudiera également certaines propriétés importantes du rayonnement induit.

§ 100. Déduction de la formule de Planck d'après Einstein

Abordons maintenant la déduction de la formule de Planck. A la base de cette déduction se trouve le soi-disant *principe de l'équilibre détaillé* (quelquefois également appelé principe de réversibilité microscopique). D'après ce principe en cas d'équilibre thermodynamique on peut associer de façon rigoureuse à chaque processus un processus inverse et le nombre de ces deux processus en l'unité de temps doit être le même.

Considérons un système constitué d'atomes et de rayonnement se trouvant en équilibre et soient comme précédemment N_1 le nombre d'atomes à l'état inférieur (énergie E_1) et N_2 le nombre d'atomes à l'état supérieur (énergie E_2). Les atomes émettent et absorbent le rayonnement électromagnétique en effectuant dans le premier cas des transitions $2\to 1$ (émission) et dans le second $1\to 2$ (absorption). En vertu du principe de l'équilibre détaillé l'équilibre statistique entre les processus d'émission et d'absorption s'établira quand le nombre de transitions $2\to 1$ en l'unité de temps sera égal au nombre de transitions $1\to 2$. Les transitions avec émission sont soit spontanées, soit stimulées. La probabilité complète des deux processus est $A_{21}+B_{21}\varrho_\nu$, et le nombre moyen de transitions en l'unité de temps est égal à

$$dZ_{21}=(A_{21}+B_{21}\varrho_\nu)N_2.$$

La probabilité de transitions avec absorption est $B_{12}\varrho_\nu$ et, par suite, le nombre moyen de transitions $1\to 2$ en l'unité de temps est égal à

$$dZ_{12}=B_{12}\varrho_\nu N_1.$$

Au cas d'équilibre $dZ_{21}=dZ_{12}$ et on obtient :

$$N_2(A_{21}+B_{21}\varrho_\nu)=B_{12}\varrho_\nu N_1. \tag{100.1}$$

D'où

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{B_{12}\varrho_\nu}{A_{21}+B_{12}\varrho_\nu}. \tag{100.2}$$

Mais comme l'équilibre est de nature statistique, le rapport N_2/N_1 des nombres d'atomes dans des états supérieur et inférieur peut être exprimé également au moyen de la distribution de Boltzmann. Plus précisément, si le système se trouve dans des états à suite discrète d'énergies E_1, E_2, ..., E_m, ..., alors la probabilité pour que le système se trouve dans l'état d'énergie E_m (voir l'annexe II, p. 516) est

$$W_m = C' e^{-E_m/kT}, \tag{100.3}$$

où C' est une constante qui est normée de façon que la probabilité pour l'atome de prendre une des valeurs possibles d'énergie (événement certain) soit égale à l'unité.

Pour la suite il est utile d'écrire la formule de Boltzmann sous une forme plus générale. En physique atomique on se présente souvent devant des cas (voir, par exemple, § 113) quand il existe *plusieurs* états différents pour une même énergie de l'atome (les cas dits de dégénérescence). Il est évident que dans ces cas aux différentes valeurs de l'énergie correspond un *poids statistique* différent qui en physique quantique se caractérise par le nombre de niveaux d'énergie coïncidants.

Dans le cas général la formule de Boltzmann s'écrit donc sous la forme

$$W_m = C g_m e^{-E_m/kT}, \tag{100.4}$$

où g_m est justement le poids statistique qui est égal à l'unité au cas des simples (non dégénérés) niveaux d'énergie.

Ainsi donc, sur la base des considérations statistiques générales on a

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}}. \tag{100.5}$$

Confrontant (100.2) et (100.5) il vient :

$$\frac{B_{12}\varrho_\nu}{A_{21} + B_{21}\varrho_\nu} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}}, \tag{100.6}$$

d'où

$$\varrho_\nu = \frac{A_{21} g_2}{B_{12} g_1 e^{(E_2 - E_1)/kT} - B_{21} g_2}. \tag{100.6'}$$

Mais d'après la condition des fréquences de Bohr $E_2 - E_1 = h\nu$ si bien que

$$\varrho_\nu = \frac{A_{21} g_2}{g_1 B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{21} g_2}. \tag{100.7}$$

C'est justement la formule de distribution d'énergie du spectre de rayonnement d'équilibre. Pour déterminer les coefficients A et B on utilise les conditions aux limites suivantes :

Pour $T \to \infty$, c'est-à-dire pour $h\nu \ll kT$, la densité ϱ_ν doit tendre vers l'infini, autrement dit le dénominateur de (100.7) doit tendre vers zéro. Ceci donne immédiatement

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21},$$

ou

$$B_{12}=\frac{g_2}{g_1}B_{21}. \tag{100.8}$$

A la même condition $h\nu \ll kT$ doit se vérifier la formule de Rayleigh-Jeans

$$\varrho_\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT.$$

Tenant compte de (100.8) récrivons (100.7) sous la forme suivante :

$$\varrho_\nu=\frac{g_2A_{21}}{g_1B_{12}}\cdot\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}. \tag{100.9}$$

Pour $h\nu/kT \ll 1$ on a en première approximation

$$e^{h\nu/kT}=1+\frac{h\nu}{kT},$$

et (100.9) prend la forme

$$\varrho_\nu=\frac{g_2A_{21}}{g_1B_{12}}\cdot\frac{kT}{h\nu}.$$

Comparant avec la formule de Rayleigh-Jeans on obtient

$$\frac{g_2A_{21}}{g_1B_{12}}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \tag{100.10}$$

et (100.9) devient

$$\varrho_\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

C'est justement la formule de Planck.

Pour des considérations ultérieures on peut sans restreindre la généralité poser $g_2=g_1=1$, c'est-à-dire considérer les transitions entre des niveaux simples, non dégénérés. Les formules (100.8) et (100.10) établissant la relation entre les coefficients d'Einstein s'écriront dans ce cas sous la forme

$$A_{21}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21}, \quad B_{12}=B_{21}, \tag{100.11}$$

ou en passant des fréquences aux longueurs d'ondes

$$A_{21}=\frac{8\pi h}{\lambda^3}B_{21}, \quad B_{21}=B_{12}. \tag{100.12}$$

On a indiqué plus haut que dans le cas où dans la condition d'équilibre on ne tient compte parmi les transitions avec émission que des transitions spontanées se caractérisant par les coefficients A_{mn} on obtient au lieu de la formule de Planck la formule de Wien. En effet, en supposant nul, dans (100.7), le coefficient de transitions induites B_{21} et en tenant compte de (100.11) on obtient :

$$\varrho_\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-h\nu/kT},$$

c'est justement la formule de Wien [cf. avec (89.7)]. Mais on sait déjà que la formule de Wien décrit de façon satisfaisante les résultats observés dans le domaine des hautes fréquences, c'est-à-dire à l'extrémité de la bande des ondes courtes de la lumière visible et de l'ultraviolet. Il en résulte que dans ce domaine les transitions avec émission forcée jouent un faible rôle et toutes les émissions sont pratiquement dues aux transitions spontanées. D'un autre côté, dans le domaine des fréquences radio-électriques (bandes des microondes) du spectre le rôle des transitions spontanées est infiniment faible par suite de la forte augmentation ($\sim \lambda^3$) du coefficient des transitions induites B_{21} et de l'accroissement de la densité de rayonnement ϱ_ν.

§ 101. Propriétés des émissions induites

Etudions maintenant plus en détail les propriétés des transitions quantiques caractérisées par les coefficients d'Einstein B_{12} et B_{21}, c'est-à-dire des transitions s'accompagnant d'une absorption de la lumière (des ondes électromagnétiques) et, par suite, d'une émission induite (stimulée). On attachera le plus d'importance à l'émission induite, car ces derniers temps elle a acquis un rôle théorique et pratique extrêmement grand. Il suffit de mentionner que les émissions induites constituent le fondement d'une nouvelle branche de la radiophysique et de la radiotechnique en voie de rapide développement, la radiotechnique quantique.

Auparavant on examinera la situation microscopique des formes d'interactions du rayonnement électromagnétique et des atomes de la substance caractérisées par les coefficients B_{mn} après quoi on établira la relation entre ces coefficients et la caractéristique macroscopique de l'absorption.

Avant de passer à la première partie de ce programme, rappelons que, comme il est connu de l'exposé élémentaire de la théorie atomique et comme il sera expliqué en détail plus bas (voir chap. IX), les propriétés quantiques ne se manifestent pas seulement par l'existence dans des systèmes atomiques de niveaux d'énergie discrets mais également par le fait que le rayonnement a double aspect: tout en conservant ses propriétés ondulatoires il se conduit également comme un flux de « corpuscules », de photons, possédant une énergie $h\nu$ et une impulsion $h\nu/c$. Etudions sous ce point de vue les interactions du rayonnement avec les atomes non excités et excités. Sur les figures 155 et 156 on a représenté de façon claire le schéma des interactions en cas d'absorption : sur la figure 155, *a* on a représenté un atome non excité et trois photons avant l'interaction;

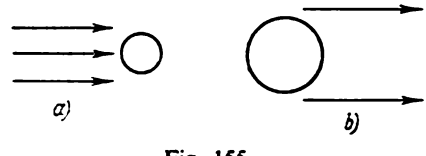


Fig. 155.

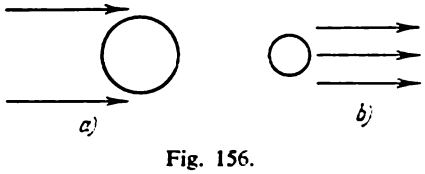


Fig. 156.

sur la figure 155, *b* on a montré le résultat de l'interaction quand l'atome a absorbé un photon (coefficient B_{12}) et est passé à l'état excité $E_1 \rightarrow E_2$, tandis que deux photons continuent leur mouvement sans modifier leurs propriétés ni leur direction. Sur la figure 156 on a représenté le schéma du rayonnement induit : à gauche (fig. 156, *a*) un atome excité possédant une énergie d'excitation $E_2 - E_1 = h\nu$ et deux photons de même énergie $h\nu$ avant l'interaction ; à droite (fig. 156, *b*) on a montré la situation après l'interaction : l'atome est passé à l'état normal en émettant un photon de même énergie $h\nu$ et de même impulsion $h\nu/c$ que le photon incident et les trois photons identiques continuent leur mouvement dans des directions parallèles.

On voit que le premier cas correspond à un affaiblissement, c'est-à-dire à l'absorption du rayonnement, tandis que dans le second cas l'intensité du rayonnement augmente aux dépens des transitions forcées et puisque le photon est émis dans la même direction que le photon incident, on peut parler d'une *absorption négative*. Une analyse plus détaillée du processus montre que le rayonnement électromagnétique émis au cours des transitions induites est identique au rayonnement incident non seulement en fréquence mais qu'il conserve avec ce dernier en permanence la phase : il est cohérent au rayonnement incident.

Cette propriété est si importante qu'il faut s'y arrêter davantage. Il est évident que l'absorption et l'émission forcée sont deux phénomènes mutuellement inverses de façon très exacte. Ceci ressort en particulier de façon très claire des figures 155 et 156 : l'état initial du premier processus correspond à l'état final du second et inversement. Il est également bien connu qu'au cours de l'absorption l'intensité de la lumière diminue mais les propriétés de cohérence se conservent complètement. Ceci découle du fait que dans toutes les expériences d'interférences la traversée par un faisceau incident de lumière d'un milieu absorbant (par exemple, un filtre optique) ne détruit pas la figure d'interférence. Un autre exemple : le filtre placé devant la lentille n'altère pas l'image obtenue. Il s'ensuit qu'après absorption (positive) l'état de cohérence n'est pas perturbé.

Si maintenant on tient compte du fait que l'absorption et l'émission provoquée ou en disant autrement l'absorption positive et négative sont deux processus réciproquement inverses, alors en vertu des lois de symétrie on doit s'attendre à ce que le rayonnement induit soit cohérent au rayonnement incident. Ainsi donc, au cours du passage de la lumière à travers un milieu contenant des atomes excités et susceptible de rayonnement forcé, le flux lumineux, tout au long de son parcours, *augmente continuellement* son intensité tout en restant cohérent, c'est-à-dire que le phénomène doit de façon rigoureusement symétrique reproduire la situation se présentant lors de l'absorption positive au cours de laquelle toutefois l'intensité du flux diminue. Comme on le verra, cette propriété de l'émission forcée est d'une importance capitale pour sa détection expérimentale directe.

Passons maintenant à la seconde partie de notre programme, l'établissement des liens entre la caractéristique d'absorption « macroscopique » habituelle et les coefficients d'Einstein B_{12} et B_{21}. Soit un flux monochroma-

tique parallèle de rayonnement électromagnétique de fréquence ν. Après la traversée d'une couche de substance d'épaisseur Δx l'intensité du rayonnement diminue. D'après la loi fondamentale de photométrie (loi de Bouguer) l'affaiblissement de l'intensité est proportionnel à l'intensité incidente et à l'élément d'épaisseur Δx :

$$-\Delta I_\nu = k_\nu I_\nu \Delta x, \tag{101.1}$$

ou sous la forme intégrale

$$I_\nu = I_{0\nu} e^{-k_\nu d},$$

où d est l'épaisseur totale de la couche. Le facteur k_ν (dimension cm^{-1}) est justement le coefficient d'absorption.

Calculons maintenant la variation d'intensité au moyen des coefficients d'Einstein B_{mn}. Le nombre d'atomes se trouvant au niveau inférieur et contenu dans le volume de section 1 cm^2 et d'épaisseur Δx est égal à $N_1 \Delta x$. Considérant que chaque absorption vraie (positive) enlève au flux de rayonnement un quantum $h\nu$ on trouve que la diminution d'intensité par suite des transitions $E_1 \rightarrow E_2$ est égale à

$$N_1 \Delta x B_{12} \varrho_\nu h\nu.$$

Sur la base de considérations analogues on trouve que dans le cas de transitions induites $E_2 \rightarrow E_1$ le flux reçoit l'énergie

$$N_2 \Delta x B_{21} \varrho_\nu h\nu.$$

Le bilan énergétique des deux sortes d'absorption (positive et négative) est égal à

$$-\Delta I_\nu = (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}) \varrho_\nu h\nu \Delta x. \tag{101.2}$$

La densité de rayonnement ϱ_ν dans un faisceau de rayons parallèles de section 1 cm^2 se propageant avec une vitesse c est évidemment égale à

$$\varrho_\nu = I_\nu / c.$$

Portant cette expression dans (101.2) on obtient

$$-\Delta I_\nu = \frac{h\nu}{c} (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}) I_\nu \Delta x.$$

Comparant avec (101.1) on voit que le coefficient d'absorption s'exprime en fonction des coefficients d'Enstein de la façon suivante :

$$k_\nu = \frac{h\nu}{c} (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}).$$

Comme pour $g_1 = g_2$ on a $B_{21} = B_{12}$ et on trouve

$$k_\nu = \frac{h\nu}{c} N_1 B_{12} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

En cas d'équilibre en vertu de la distribution de Boltzmann

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} = e^{-h\nu/kT},$$

et on obtient

$$k_\nu = \frac{h\nu}{c} N_1 B_{12} (1 - e^{-h\nu/kT}).$$

Le second terme de la parenthèse est inférieur à l'unité; par exemple, pour $\lambda = 4000$ Å, $\nu = 7{,}5 \cdot 10^{15}$ et pour $T = 300$ °K

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{15}}{1{,}4 \cdot 10^{-16} \cdot 300} = 1{,}2 \cdot 10^3,$$

$e^{-1{,}2 \cdot 10^3}$ étant une quantité infiniment petite. C'est manifestement le cas pour toute la partie visible du spectre et pour des températures pas trop élevées. Donc, en cas d'équilibre on a toujours

$$k_\nu > 0,$$

c'est-à-dire que le coefficient d'absorption sommé est toujours positif, autrement dit les absorptions positives prévalent sur celles qui sont négatives. La cause en est, en définitive, dans ce que le nombre d'atomes du niveau normal au cas d'équilibre (distribution de Boltzmann!) est toujours supérieur au nombre d'atomes excités.

Pour créer un milieu d'*absorption négative* et obtenir ainsi expérimentalement des transitions induites il est nécessaire de réaliser un état *hors d'équilibre* pour lequel le nombre d'atomes excités soit supérieur au nombre d'atomes se trouvant à l'état normal. Cet état hors d'équilibre est souvent appelé conventionnellement état de température négative pour la raison suivante. De la distribution de Boltzmann en posant comme précédemment $g_2 = g_1$ (ce qui ne modifie pas la généralité de la déduction) on tire

$$T = -\frac{E_2 - E_1}{k \ln (N_2/N_1)},$$

car d'après la condition $E_2 > E_1$ et $N_2/N_1 < 1$, $T > 0$ comme il fallait s'y attendre (état d'équilibre) mais pour $N_2/N_1 > 1$, $T < 0$, autrement dit la température est négative. Pour des raisons de commodité le terme de « température négative » est largement utilisé, quoique l'expression de température est inapplicable à un état hors d'équilibre. On doit tout simplement interpréter ce terme comme un synonyme d'un état à distribution inversée des atomes en niveaux d'énergie.

Il y a plusieurs procédés permettant de créer un milieu de température négative. Dans ce but on s'efforce de produire par voie indirecte un excès d'atomes au niveau d'énergie plus élevé par rapport à un certain niveau plus bas (il n'est pas nécessaire que ça soit le niveau le plus bas) ou bien inversement en essayant d'abaisser artificiellement le peuplement du niveau inférieur par rapport à un niveau plus élevé. Il est évident que dans les deux cas se réalise une distribution inversée des atomes en niveaux et, par conséquent, une « température négative » pour la paire de niveaux choisie.

La manifestation la plus simple de l'émission induite dans des conditions de température négative consiste dans la réalisation de l'absorption

négative, c'est-à-dire dans la détection du coefficient de transmission supérieur à l'unité. C'est par cette voie que le physicien soviétique V. Fabriquant encore en 1939 est arrivé à détecter des transitions induites dans la partie visible du spectre des vapeurs de mercure excitées par des décharges électriques dans des conditions spéciales. Il a également formulé le premier le principe de l'amplification moléculaire.

§ 102. Sources lumineuses

Les transmissions forcées recoivent des applications pratiques importantes. Sur leur base on créa des générateurs et des amplificateurs moléculaires dans la gamme des ondes radio-électriques centimétriques (masers) de même que des générateurs optiques quantiques (lasers*)) qui sont des sources de lumière dans le domaine ultraviolet, visible et infrarouge possédant des propriétés uniques.

Le choix de la substance utilisée pour la construction des générateurs optiques quantiques est essentiellement guidé par les possibilités d'atteindre une inversion de population pour une paire appropriée de niveaux d'énergie. Le régime de génération est atteint quand l'effet de l'amplification de la lumière compense les pertes d'énergie par dispersion, réabsorption, etc. Pour la génération de la lumière on utilise des cristaux aussi bien que des liquides et des gaz. Nonobstant les différences importantes dans les systèmes des niveaux énergétiques, dans la durée de vie des états excités des divers composés utilisés dans les différents modèles de lasers, les principes généraux de fonctionnement des générateurs optiques quantiques sont les mêmes. Etudions sommairement ces principes ainsi que les propriétés de ces sources lumineuses sur l'exemple d'un laser à rubis.

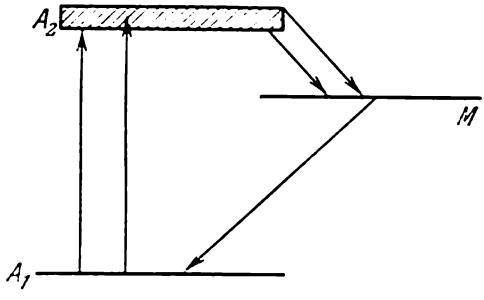


Fig. 157.

Le cristal de rubis est un oxyde d'aluminium dans le réseau cristallin duquel un certain nombre d'atomes de Al est remplacé par des ions chrome trivalents Cr^{3+}. Lors de l'absorption de la lumière les ions chrome passent du niveau normal A_1 au niveau excité A_2 (fig. 157). Ce dernier n'est pas en fait un niveau mais un gradin assez large. Les ions chrome se trouvant

*) Ces dénominations bizarres constituent des abréviations des appellations complètes de maser : *microwave amplification by stimulated emission of radiation* (amplification des microondes par émission stimulée d'une radiation) et de laser : *light amplification by stimulated emission of radiation* (amplification de la lumière par émission stimulée d'une radiation).

sur ce gradin en état excité passent en partie à un certain niveau M sur lequel ils s'attardent durant quelques millisecondes, c'est-à-dire durant le temps de 4 à 5 ordres de grandeur supérieur à la durée de vie normale en état excité (10^{-7} à 10^{-8} s). Grâce à quoi sur ce niveau M (appelé *métastable*) s'accumule un nombre important d'ions excités.

Tant que la concentration d'ions excités n'atteint pas 50 % de leur nombre total, le retour au niveau normal A_1 s'accompagne d'une fluorescence rouge propre au rubis de durée moyenne indiquée plus haut de quelques millisecondes. Mais aussitôt que le nombre d'ions excités dépasse celui des ions à l'état normal il se crée un milieu de température négative et par suite des possibilités de désexcitation aux dépens des transitions forcées.

Pour observer ce phénomène on donne au cristal de rubis la forme d'un barreau ou d'un prisme long de quelques centimètres dont les faces extrêmes optiquement polies sont rigoureusement parallèles et argentées et dont l'une des faces est rendue semi-transparente. Il suffit de quelques photons libérés par des transitions spontanées pour que débute le processus de transitions forcées, les photons libérés engendrant de nouvelles transitions forcées de sorte que le processus s'accroît en avalanche. Ce processus en avalanche est facilité par des réflexions multiples aux deux extrémités du barreau. L'avalanche grossit au cours du mouvement de va-et-vient à l'intérieur du cristal parallèlement à son axe, les photons émis par hasard dans des directions différentes sortant du cristal par les faces latérales. Quand l'intensité de l'avalanche des photons atteint une certaine valeur critique, une partie traverse l'extrémité semi-transparente et sort du cristal en se propageant sous forme d'un pinceau presque rigoureusement parallèle.

Ce rayonnement possède une série de propriétés tout à fait remarquables. Tout d'abord l'angle solide de l'ouverture du pinceau est si faible que le pinceau maintient le parallélisme sans recourir à des moyens optiques tels les miroirs ou les lentilles et sa divergence à une distance d'un kilomètre n'est que de l'ordre d'un mètre*). Et si l'on réduit encore la divergence du pinceau en lui faisant traverser dans le sens inverse un télescope, alors, comme le montre le calcul, on peut projeter sur la Lune une tache de diamètre de l'ordre de 3 kilomètres seulement. Comme le flux d'énergie dans le pinceau dirigé est proportionnel à $I_\nu\, d\Omega$ ($d\Omega$ étant l'angle solide de la divergence du pinceau), alors, par suite de la valeur insignifiante de $d\Omega$, la luminance du pinceau atteint une grandeur énorme.

Grâce à ce phénomène des réflecteurs spéciaux installés sur le véhicule lunaire, le lunakhod, ont permis de réaliser la localisation optique de la Lune.

Ensuite dans cette source lumineuse à rubis directement du cristal on voit sortir un éclair de puissance 10^4 W pour une section inférieure à 1 cm^2.

*) A titre de comparaison notons que le faisceau obtenu avec le miroir d'un projecteur de deux mètres de diamètre a une divergence de $d\Omega = 1°$, ce qui correspond à la distance de 1 km à un faisceau de 17 m de diamètre.

Si ce pinceau est concentré à l'aide d'une lentille de courte focale, alors dans la tache obtenue se développe une puissance des milliers de fois supérieure à celle obtenue par concentration de la lumière du Soleil.

Une propriété importante de cette source de lumière est la possibilité d'obtenir un faisceau parfaitement monochromatique qu'aucun autre procédé ne permet d'atteindre. L'émission forcée est un processus de résonance, il s'excite donc le plus intensément près du pic de la courbe de fréquence. C'est pourquoi l'accroissement en avalanche de l'intensité s'accompagne d'un processus de resserrement de l'intervalle des fréquences. On obtient ainsi un rayonnement monochromatique de largeur spectrale de beaucoup inférieure à la largeur naturelle des raies spectrales (voir p. 225). Dans cette optique le plus efficace est le générateur optique à gaz (hélium+néon) qui donne un rayonnement infrarouge de largeur spectrale inférieure à un kilohertz pour une fréquence portante de 10^5 MHz.

Une autre propriété importante du rayonnement induit est sa cohérence. Comme il a été indiqué, l'émission spontanée d'une source étalée est produite en des points de l'espace se répartissant au hasard et à des moments de temps aléatoires non liés entre eux. Elle est donc incohérente : non seulement les rayons de lumière émanant de sources différentes mais même les rayons de lumière partant des différents points d'une même source n'interfèrent pas entre eux. Pour obtenir des interférences avec un tel rayonnement on doit utiliser une source de très faible dimension puis diviser le faisceau initial en deux ou plusieurs pinceaux qui interféreront ensuite entre eux. Dans ce cas on obtient en réalité les interférences des flux d'ondes émanant d'un seul atome et les différentes franges d'interférences ne font que se sommer entre elles.

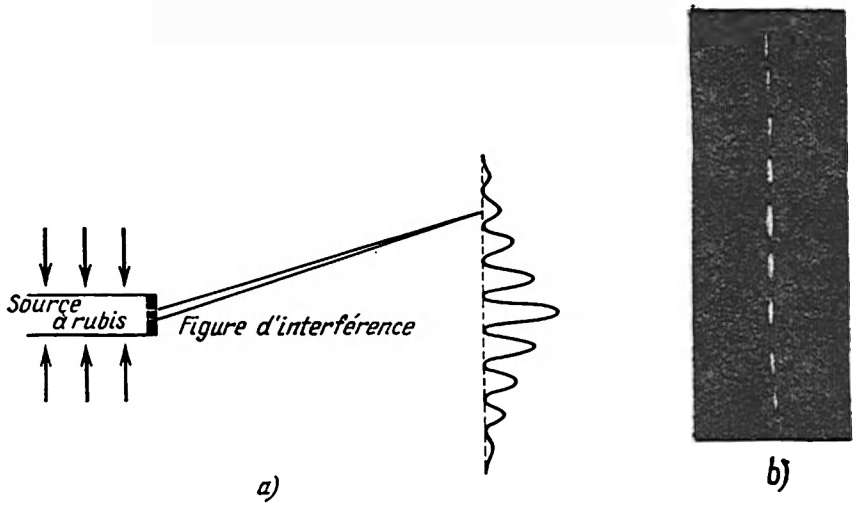


Fig. 158.

L'expérience la plus sensible d'interférences a été réalisée par Young avec deux fentes : la lumière émanant d'une source éloignée de petite dimension (ou d'une fente éclairée par une source éloignée) après avoir traversé deux fentes parallèles produit sur un écran éloigné un phénomène typique d'interférence constitué d'une suite successive de franges brillantes et sombres. Toutefois cette expérience ne réussit pas si la source de lumière est trop grande ou est disposée trop près de l'écran.

Le rayonnement du laser est globalement spatial-cohérent. C'est pourquoi le phénomène d'interférence est toujours réalisé si l'on pratique deux fentes directement sur la surface semi-argentée par laquelle sort à l'extérieur le rayonnement induit. Ceci montre que l'onde sortant du cristal a en réalité un front plan et que les différents points espacés de cette onde sont cohérents. Sur la figure 158 est schématisée l'expérience de Young avec une source à rubis. A droite de la figure on a donné la photographie d'un phénomène d'interférence.

Les propriétés remarquables du rayonnement induit sont largement utilisées dans les recherches scientifiques et les applications. La création de générateurs quantiques a été à l'origine de l'apparition de nouvelles branches de la physique, la radiophysique quantique et l'optique quantique*).

*) Voir par exemple A. Mikaélian, M. Ter-Mikaélian, Y. Tourkov, *Générateurs optiques à corps solide*, M., 1967, G. Birnbaum, *Optical masers*, Academic Press, New York and London, 1964.

CHAPITRE VIII

SÉRIES SPECTRALES ET NIVEAUX D'ÉNERGIE DE L'HYDROGÈNE ATOMIQUE

§ 103. Série de Balmer

Les raies spectrales de l'atome d'hydrogène dans leur succession font preuve de régularités fort simples. Sur la figure 159 on a donné une photographie du spectre d'émission de l'hydrogène atomique obtenue en laboratoire et sur la figure 160 une photographie du même spectre (par absorption) de l'étoile ζ Tauri. Sur les deux photographies on voit aussitôt des liaisons régulières entre les raies spectrales. Et en effet, déjà en 1885, Balmer

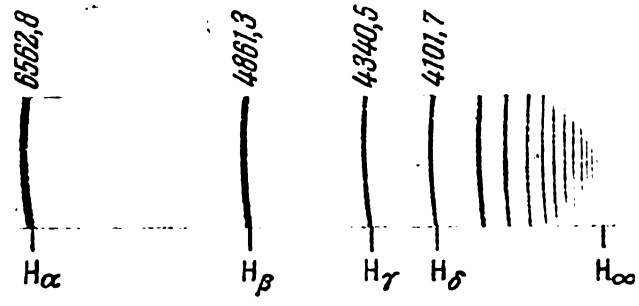


Fig. 159. Série de Balmer du spectre d'émission de l'hydrogène atomique : H_α, H_β, H_γ, H_δ sont les raies de la partie visible du spectre; H_∞ est la limite de la série

montra que les longueurs d'ondes des quatre raies de la partie visible du spectre désignées par les symboles H_α, H_β, H_γ, H_δ (fig. 159) peuvent être décrites très exactement par la formule empirique

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2-4}, \qquad (103.1)$$

où n doit être remplacé par les nombres entiers 3, 4, 5, 6 et B est une constante empirique égale à $3645{,}6\cdot10^{-8}$ cm = 3645,6 Å. La précision des résultats obtenus avec cette formule peut être appréciée par un rapprochement avec des mesures directes des longueurs d'ondes que Balmer connaissait (voir Tableau XI).

Outre les quatre raies visibles on a enregistré à cette époque cinq raies ultraviolettes à partir des sources terrestres et 10 dans les spectres des étoiles

blanches. En portant dans la formule de Balmer les nombres entiers suivants $n=7, 8, \ldots$ on pouvait également obtenir les longueurs d'ondes de ces raies ultra-violettes. Cependant la correspondance entre les longueurs d'ondes calculées et mesurées pour ces raies s'est révélée moins bonne, ce qui d'ailleurs peut s'expliquer uniquement par l'imprécision avec laquelle ces raies étaient alors mesurées.

Fig. 160. Série de Balmer par absorption (étoile ζ Tauri) de H_γ à la limite de la série

La régularité exprimée par la formule de Balmer devient particulièrement apparente si l'on donne à cette formule la forme habituellement utilisée aujourd'hui. Dans ce but la formule doit être transformée de façon à permettre le calcul non pas des longueurs d'ondes mais des fréquences ou des nombres d'ondes. D'après une formule connue la fréquence (nombre d'oscillations par s) s'exprime sous la forme

$$\nu=\frac{c}{\lambda_0}\,\mathrm{s}^{-1},$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et λ_0 la longueur d'onde également dans le vide. Le *nombre d'onde* est l'inverse de la longueur d'onde ou le nombre d'ondes contenues dans 1 cm :

$$\nu=\frac{1}{\lambda_0}\,\mathrm{cm}^{-1}.$$

On utilise de préférence en spectroscopie les nombres d'ondes (en cm^{-1}), car les longueurs d'ondes sont actuellement déterminées avec une très grande précision et, par suite, on obtient avec une précision identique aussi les nombres d'ondes alors que la vitesse de la lumière et, par conséquent, la fréquence sont obtenues avec des précisions de beaucoup inférieures.

Tableau XI

Raies	Calculées d'après la formule de Balmer, Å	D'après les mesures d'Angstrœm, Å	Différence, Å
H_α	6562,08	6562,10	+0,02
H_β	4860,80	4860,74	−0,06
H_γ	4340,00	4340,10	+0,10
H_δ	4101,30	4101,20	−0,10

De (103.1) on obtient

$$\nu=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{B}\,\frac{n^2-4}{n^2}=\frac{4}{B}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\right). \qquad (103.2)$$

Désignons la constante $4/B$ par R (la première lettre du nom du spectroscopiste suédois célèbre Rydberg dont cette constante porte le nom) et récrivons (103.2) de la façon :

$$\nu=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right) \quad (n=3, 4, 5, \ldots), \qquad (103.3)$$

ce qui est bien la forme habituelle de la formule de Balmer.

De la formule (103.3) on voit qu'à mesure que n augmente la différence entre les nombres d'onde des raies voisines diminue et pour $n=\infty$ on obtient une valeur constante $\nu=R/2^2$. Ainsi donc, les raies doivent se resserrer progressivement en tendant vers une position limite $\nu=(R/4)$ cm^{-1}. On le

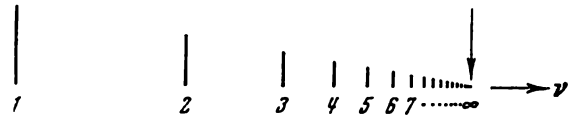


Fig. 161. Schéma général de la série spectrale

voit très bien sur les photographies des figures 159 et 160; la position théorique de la limite de la série est indiquée sur la figure 159 par le symbole H_∞. En outre les observations montrent qu'avec l'accroissement du numéro de la raie n on constate une diminution régulière de son intensité. Ainsi, si schématiquement on représente la disposition des raies spectrales embrassées par la formule (103.3) en exprimant conventionnellement par la longueur des raies leur intensité on obtient l'image de la figure 161.

L'ensemble des raies spectrales dont la succession et la répartition régulière des intensités est représentée schématiquement à la figure 161 est en général dénommé *série spectrale*. Le nombre d'onde limite autour duquel les raies se groupent pour $n\to\infty$ est appelé *limite de la série*.

L'obtention d'un grand nombre de raies de l'atome d'hydrogène à partir des sources terrestres présente de grandes difficultés expérimentales. C'est pourquoi, seulement en 1920 Wood a réussi de photographier 22 et de mesurer 20 termes de la série de Balmer. La plus grande quantité des raies de cette série a pu être mesurée dans le spectre de la chromosphère et des protubérances du Soleil (jusqu'à 37 termes).

§ 104. Séries de Lyman, de Paschen, etc. Formule généralisée de Balmer

A côté de la série de Balmer on a détecté dans le spectre de l'hydrogène atomique d'autres séries définies par des formules analogues. Ainsi, dans l'ultraviolet extrême Lyman découvrit la série

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n=2, 3, \ldots). \tag{104.1}$$

Dans l'infrarouge on trouva trois séries :

série de Paschen

$$\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n=4, 5, \ldots), \tag{104.2}$$

Tableau XII

Longueurs d'onde des différentes séries de l'hydrogène atomique

Série de Lyman $\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ_{vide} (obser.)	λ_{vide} (cal.)	ν (cal.)
2	1215,7	1215,68	82 258,31
3	1026,0	1025,73	97 491,36
4	972,7	972,54	102 822,94

Série de Balmer $\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ_{air} (obser.)	λ_{vide} (cal.)	ν (cal.)
3	6562,8473	6562,798	15 233,216
	6562,7110		
4	4861,3578	4861,327	20 564,793
	4861,2800		
5	4340,497	4340,466	23 032,543
	4340,429		
6	4101,7346	4101,738	25 181,055
7	3970,0740	3970,075	24 373,343
8	3889,0575	3889,052	25 705,957
9	3835,397	3835,387	26 065,61
10	3797,910	3797,900	26 322,90

Suite

Série de Paschen $\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ_{air} (obser.)	λ_{air} (cal.)	ν (cal.)
4	18 751,3	18 751,1	5 331,58
5	12 817,6	12 818,1	7 799,33
6	1,09 μm	10 938,1	9 139,84
7	10 049,8	10 049,4	9 948,13
8	9 546,2	9 546,0	10 472,74
9	9 229,7	9 229,1	10 832,40
10	9 015,3	9 014,9	11 089,69
11	8 863,4	8 862,9	11 280,03

Série de Brackett $\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ_{air} (obser.)	λ_{air} (cal.)	ν (cal.)
5	4,05 μm	40 510,4	2467,75
6	2,63 μm	26 251,6	3808,26

Série de Pfund $\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ (obser.)	λ (cal.)	ν (cal.)
6	7,40 μm	74 578,0	1340,512

série de Brackett

$$\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n=5, 6, \ldots), \tag{104.3}$$

série de Pfund

$$\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n=6, 7, \ldots). \tag{104.4}$$

Il en découle que toutes les séries connues de l'hydrogène atomique peuvent être représentées par une formule générale

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{104.5}$$

où m prend dans chaque série une valeur constante ($m=1, 2, 3, 4, 5$), et n la série des nombres entiers commençant par le nombre d'une unité supérieur à m. La formule (104.5) est dite formule généralisée de Balmer.

Au tableau XII on a donné les longueurs d'ondes pour différentes séries de l'atome d'hydrogène, calculées et mesurées directement (pour la série de Balmer on a donné 10 termes sur les 36 termes mesurés). Ce tableau permet de juger de la précision avec laquelle les formules des raies spectrales permettent de calculer les longueurs d'ondes.

§ 105. Termes spectraux. Principe de combinaison

En rapprochant entre elles les formules (104.1) à (104.4) il est facile de remarquer que le premier terme constant de chacune de ces formules constitue le terme variable de la suivante formule. Par exemple, le terme constant de la formule de la série de Paschen $R/3^2$ est le premier terme des termes variables possibles de la formule de la série de Balmer et est le second terme de la formule de la série de Lyman; le terme constant de la série de Balmer est à son tour l'un des termes variables de la formule de la série de Lyman, etc. Ce fait est particulièrement net dans l'expression de la formule généralisée de Balmer (104.5) où on voit que le nombre d'onde de toute raie spectrale du spectre de l'hydrogène peut être défini comme une différence entre deux termes du type R/m^2 pour deux valeurs entières quelconques de m. C'est la formulation actuelle du *principe* dit de *combinaison*.

Introduisant les désignations

$$T(m)=\frac{R}{m^2}, \quad T(n)=\frac{R}{n^2}, \tag{105.1}$$

on peut écrire (104.5) sous la forme d'une différence de deux fonctions des nombres entiers

$$\nu=T(m)-T(n). \tag{105.2}$$

Les nombres $T(m)$ et $T(n)$ sont dits *termes spectraux* ou plus simplement termes. Pour l'hydrogène atomique tout le système de termes est obtenu au moyen d'une seule formule générale

$$T=\frac{R}{n^2} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{105.3}$$

Il découle de (105.3) qu'en connaissant le système de termes pour un atome donné on peut obtenir le nombre d'onde pour toute raie spectrale comme la différence de deux termes de ce système.

On peut donner au principe de combinaison un énoncé un peu différent : si l'on connaît les nombres d'ondes de deux raies spectrales de la même série, leur différence sera également un nombre d'onde d'une troisième raie spectrale appartenant au même atome. Soient, par exemple, les nombres d'ondes de deux raies de la série de Lyman :

$$\nu_1=T_1-T_2 \quad \text{et} \quad \nu_2=T_1-T_3.$$

La différence $\nu_2-\nu_1$ sera le nombre d'onde de la première raie de la série de Balmer

$$\nu_2-\nu_1=T_2-T_3, \quad \text{etc.}$$

En effet, de la dernière colonne du tableau XII on tire

$$\nu_1=82\,258{,}31, \qquad \nu_2=97\,491{,}36.$$

La différence entre ces nombres est $\nu_2-\nu_1=15\,233{,}05$. Dans le même tableau pour le premier terme de la série de Balmer ($n=3$) on trouve $\nu=15\,233{,}216$, nombre coïncidant avec $\nu_2-\nu_1$ aux erreurs d'observation près.

Le principe de combinaison a été découvert de façon purement empirique et comme un grand nombre d'autres régularités découvertes dans les spectres fut au début considéré comme une curiosité numérique. Le sens profond de ce principe n'a été compris qu'après la formulation des postulats quantiques de Bohr.

Il n'est pas difficile de constater que la loi des fréquences exprimée par ce principe est en contradiction manifeste avec la physique classique. En effet, si l'on attribue à l'électron un seul degré de liberté, le spectre devrait alors être constitué d'une seule fréquence et de ses harmoniques; si les liaisons de l'électron sont telles qu'il faut lui attribuer trois degrés de liberté, on aurait alors trois fréquences fondamentales et leurs harmoniques. Or en réalité dans les spectres des atomes on n'observe pas d'harmoniques, c'est-à-dire de fréquences constituant une série harmonique.

C'est Bohr qui pour la première fois a indiqué de façon claire que le principe de combinaison est une expression explicite des singulières lois quantiques régissant les mouvements interatomiques. En généralisant et en formulant de façon plus précise l'hypothèse de Planck, exprimée pour le cas particulier de l'oscillateur linéaire, il vit dans le principe de combinaison une indication de ce que les atomes ne peuvent se trouver qu'à des états déterminés dont les énergies constituent une suite discrète. Ainsi donc, à chaque terme correspond un état stationnaire d'énergie bien déterminé et la condition des fréquences de Bohr formulée au § 90 n'est rien d'autre que le principe de combinaison exprimé de façon différente et, plus précisément, de façon que chaque fréquence émise soit liée à deux états stationnaires. Si l'on désigne par ν le nombre d'ondes exprimé en cm^{-1}, la fréquence exprimée en s^{-1} sera égale à $c\nu$ et la condition des fréquences (90.1) prendra la forme

$$hc\nu=E_n-E_m,$$

d'où

$$\nu=E_n/hc-E_m/hc. \tag{105.4}$$

Si l'on pose

$$T(n)=-E_n/hc, \tag{105.5}$$

(105.4) prendra alors la forme

$$\nu=T(m)-T(n),$$

c'est-à-dire qu'on obtient la formule connue du principe de combinaison. Le signe moins de (105.5) a un sens conventionnel: comme on le sait, l'énergie (non relativiste) de l'électron lié par le champ de Coulomb est toujours négative (§ 51), tandis qu'il est plus commode d'attribuer aux termes le signe plus.

En portant dans (105.4) l'expression du terme exprimé au moyen de la constante de Rydberg suivant la définition de (105.1) on peut aussi exprimer l'énergie des atomes en fonction de cette constante :

$$E_n = -Rhc/n^2. \tag{105.6}$$

Dans cette formule h et c sont des constantes universelles, n un nombre entier et seul R est une constante empirique. On attribuera à cette formule un contenu physique clair et exhaustif si l'on pouvait exprimer également la constante de Rydberg R en fonction des constantes universelles. C'est bien à quoi Bohr a déjà abouti dans sa première théorie schématique de la structure de l'atome.

§ 106. Quantification des orbites circulaires

A la base de la théorie de Bohr se trouvent des postulats quantiques formulés au § 90 et, précisément, le postulat sur l'existence d'états stationnaires et la condition des fréquences. Ces postulats, comme on l'a déjà dit à maintes reprises, sont en nette contradiction avec les lois de la physique classique. En effet, alors que les postulats de Bohr exigent l'existence d'une suite discrète de niveaux d'énergie auxquels s'associe dans l'atome une série appropriée d'orbites *quantiques*, la mécanique classique conduit à une multitude continue d'orbites. Cette contradiction est de nature générale. Tout un ensemble de faits montre de façon univoque que les phénomènes du monde atomique se déroulent de façon discrète et se caractérisent par une quantité finie (non égale à zéro) de la constante de Planck. Au contraire, pour les phénomènes macroscopiques, autrement dit de grande échelle, la continuité des phénomènes est la règle.

On aboutit donc à la conclusion que la mécanique classique avec ses grandeurs variant de façon continue est inapplicable au monde des atomes. Dans la suite on verra au chapitre X que cette rupture est très profonde, car il apparaît que les particules très fines, les électrons, les protons, etc., au cours de leurs mouvements obéissent à des lois quantiques très singulières se différenciant de façon brutale des lois de la mécanique classique. Toutefois cette situation ne fut aperçue que seulement douze ans après l'établissement des postulats de Bohr. Aux premiers stades de développement de la mécanique atomique il a fallu utiliser la méthode logiquement contradictoire suivante : au début le problème était résolu sur la base de la mécanique classique (complètement inapplicable aux mouvements interatomiques), puis de la multitude continue d'états de mouvement auxquels conduisait la mécanique classique on extirpait, sur la base d'un postulat spécial, des états quantiques choisis. Malgré l'imperfection de cette méthode

elle fut couronnée de grands succès. Il a suffi de détecter certains traits singuliers des processus atomiques et d'en tirer des conclusions adéquates pour pouvoir déchiffrer les règles compliquées régissant les spectres atomiques et moléculaires ainsi que mieux saisir la nature des processus chimiques, etc.

Formulons tout d'abord ce postulat spécial sur la base duquel la théorie de Bohr permettait de choisir les orbites quantifiées. On partira pour cela du modèle le plus simple de l'atome : un noyau central chargé positivement autour duquel gravite un électron sur une orbite circulaire. Le cas plus compliqué d'orbite élliptique sera analysé brièvement plus bas, au § 113.

Le postulat permettant le choix des orbites quantifiées qu'on doit énoncer est une généralisation logique du postulat de Planck établi pour la détermination des états quantiques de l'oscillateur linéaire. Suivant ce dernier postulat, de tous les états possibles de l'oscillateur linéaire ne peuvent se réaliser que ceux pour lesquels l'énergie est égale à

$$E_n = nh\nu. \tag{106.1}$$

Formulons auparavant cette condition applicable seulement à l'oscillateur linéaire de façon quelque peu différente. Pour cela récrivons-la sous la forme

$$E/\nu = nh. \tag{106.2}$$

Ecrite de cette façon cette condition sera interprétée comme une exigence générale de ce que dans les systèmes atomiques la grandeur mécanique de dimension $\left[\frac{\text{énergie}}{\text{fréquence}}\right]$, ou ce qui revient au même [énergie×temps], et appelée action soit un multiple de la constante de Planck h. Le problème se ramène alors au choix approprié de cette grandeur pour chaque cas particulier.

Pour déterminer la règle générale aboutissant automatiquement au choix des états convenables on reprendra de nouveau l'exemple de l'oscillateur linéaire. Son état dans la mécanique classique se caractérise par la coordonnée cartésienne x et la quantité de mouvement associée $m\dot{x}$. Désignons ces paramètres d'état par q et p et représentons l'état de l'oscillateur par un point de l'espace de phase comme c'est l'habitude en mécanique statistique. Puisque dans le cas considéré l'état du système est complètement défini par deux paramètres p et q, l'« espace » de phase est un plan et chaque état du système caractérisé par les deux valeurs considérées p et q sera représenté par un point de ce plan. En se déplaçant dans le système ce point va-

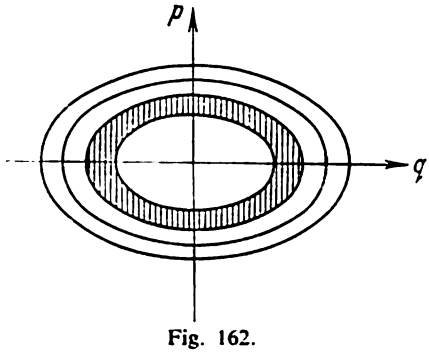


Fig. 162.

riera continuellement sa position en décrivant une certaine trajectoire de phase (fig. 162). Voyons quelle est cette trajectoire pour un oscillateur possédant l'énergie considérée E. Ecrivons l'expression de l'énergie totale $(T+U)$ de l'oscillateur (voir § 46)

$$E=T+U=\frac{mq^2}{2}+\frac{fq^2}{2}=\frac{p^2}{2m}+\frac{fq^2}{2}. \tag{106.3}$$

Divisons les deux membres de (106.3) par E :

$$\frac{p^2}{2mE}+\frac{q^2}{2\frac{E}{f}}=1;$$

introduisant les notations

$$a=\sqrt{2mE} \quad \text{et} \quad b=\sqrt{\frac{2E}{f}} \tag{106.4}$$

on obtient

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1. \tag{106.5}$$

Mais (106.5) est l'équation de l'ellipse, de sorte que la trajectoire de phase de l'oscillateur linéaire est une ellipse dont les axes d'après (106.4) pour l'oscillateur donné (m et f sont connus) sont définis par l'énergie E. Calculons maintenant l'aire de cette ellipse. L'aire limitée par la courbe $y=f(x)$ est $\int y\,dx$; d'autre part, l'aire de l'ellipse est égale à πab. Donc $\oint p\,dq=\pi ab$; le cercle de l'intégrale indique que le calcul doit être mené suivant un contour fermé. Mais d'après (106.4)

$$\pi ab=\pi\sqrt{2mE}\sqrt{2E/f}=2\pi E\sqrt{m/f}.$$

Or comme pour un oscillateur harmonique $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}}$, alors

$$\oint p\,dq=\pi ab=2\pi E\sqrt{m/f}=E/\nu \tag{106.6}$$

ou en tenant compte de (106.2)

$$\oint p\,dq=nh. \tag{106.7}$$

Il nous reste maintenant à faire le dernier pas : la formule (106.7) sera considérée comme une condition générale de la quantification de tout système à un seul degré de liberté sous la condition que par q et p on entende la coordonnée *généralisée* et l'impulsion généralisée qui lui est associée.

Appliquons cette condition générale au modèle considéré de l'électron

gravitant sur une orbite circulaire. Il est logique dans ce cas de choisir pour coordonnée l'angle polaire φ définissant la position de l'électron sur l'orbite. L'impulsion généralisée associée sera [voir (57.5)] le moment cinétique $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$. Si maintenant on porte dans (106.7) φ et p_φ au lieu de q et p et on considère que d'après la loi de la conservation du moment cinétique $p_\varphi = \text{const}$, on obtient

$$nh = \oint p\, dq = \int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$p_\varphi = n\frac{h}{2\pi}. \tag{106.8'}$$

C'est bien la « règle de quantification » cherchée pour les orbites circulaires : de toutes les orbites classiques possibles ne se réalisent, en réalité, que celles pour lesquelles le moment cinétique est un multiple de $h/2\pi$. Cette dernière quantité $h/2\pi$ représente ainsi l'unité quantique du moment cinétique. Il est convenu de la noter par $\hbar$.

Dans ce cas la formule (106.8') prend la forme :

$$p_\varphi = n\hbar. \tag{106.8}$$

§ 107. Théorie de Bohr

Abordons maintenant l'étude de la théorie de Bohr. Examinons un atome dit « hydrogénoïde », c'est-à-dire un système composé d'un noyau de charge $+Ze$ (Z étant un nombre entier) et d'un électron. Pour $Z=1$ ce système est constitué par l'atome d'hydrogène, pour $Z=2$ on a l'atome d'hélium He^+ simplement ionisé, pour $Z=3$ on a l'atome doublement ionisé du lithium Li^{++}, pour $Z=4$ on a Be^{+++}, etc.

De la théorie cinétique des gaz on sait que les « dimensions » des atomes sont de l'ordre de 10^{-8} cm. D'autre part, des expériences de Rutherford sur la diffusion des particules α (§ 27) il suit que la loi de Coulomb agit jusqu'à la distance de 10^{-12} cm; on peut donc considérer que l'interaction de l'électron avec le noyau dans le modèle choisi obéit à la loi de Coulomb, c'est-à-dire que la force avec laquelle le noyau retient l'électron doit être égale à Ze^2/r^2. Si l'on admet que le mouvement de l'électron dans l'atome obéit aux lois de la mécanique classique, alors on peut appliquer au modèle choisi toutes les solutions du problème de Kepler en mécanique classique (§ 51); en particulier l'énergie totale (cinétique+potentielle) de ce système doit être égale à

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}, \tag{51.19}$$

où a est le demi grand axe de l'ellipse ou, dans le cas considéré, le rayon

de l'orbite circulaire. D'après la troisième loi de Kepler (§ 51) le rayon a est lié à la période de révolution T par la relation*)

$$\frac{a^3}{T^2} \equiv a^3\nu^{*2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}. \tag{51.24}$$

La seconde relation est donnée par la règle de quantification établie au paragraphe précédent :

$$p_\varphi = n\hbar. \tag{106.8}$$

Puis, par définition,

$$p_\varphi = ma^2\dot{\varphi} = ma^2\omega = 2\pi ma^2\nu^*, \tag{107.1}$$

d'où considérant (106.8)

$$a^2\nu^* = \frac{n\hbar}{2\pi m}. \tag{107.2}$$

Combinant (107.2) et (51.24) on trouve facilement

$$a = n^2 \frac{\hbar^2}{mZe^2}. \tag{107.3}$$

Pour $Z=1$ et $n=1$ (première orbite de l'atome d'hydrogène) on trouve

$$a_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}528 \cdot 10^{-8} \text{ cm}. \tag{107.4}$$

Cette combinaison des constantes universelles se rencontrera aussi dans la suite au cours des calculs; on la désignera toujours par a_1. Portant la valeur de (107.3) dans (51.19) on obtient

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}; \tag{107.5}$$

en donnant à n les valeurs entières d'une suite naturelle 1, 2, 3, ..., on obtient les valeurs quantifiées de E_1, E_2, ...

Profitant de la condition des fréquences $hc\nu = 2\pi\hbar c\nu = E_n - E_k$ et en y portant les expressions de E_n et de E_k tirées de (107.5) on obtient la formule généralisée de Balmer pour les atomes hydrogénoïdes sous la forme

$$\nu = \frac{mZ^2e^4}{4\pi\hbar^3 c}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{107.6}$$

---

*) Dans le cas *d'orbites circulaires* la relation (51.24) peut être obtenue très simplement de la façon suivante. Egalant la force d'attraction de Coulomb entre le noyau et l'électron à la force centrifuge d'inertie on a

$$mv^2/a = Ze^2/a^2.$$

Considérant que $v = a\omega = 2\pi a\nu^*$, on obtient facilement

$$a^3\nu^{*2} = Ze^2/4\pi^2 m$$

qui est la formule (51.24).

Afin de la différencier du nombre d'ondes, la fréquence mesurée en s^{-1} y est notée par ν^*.

En y posant $Z=1$ on obtient la formule de Balmer spécialement applicable à l'atome d'hydrogène, le facteur devant la parenthèse étant l'expression cherchée de la constante de Rydberg exprimée en fonction des constantes universelles :

$$R=\frac{2\pi^2me^4}{h^3c}=\frac{me^4}{4\pi\hbar^3c}. \tag{107.7}$$

Pour le calcul de R utilisons les valeurs actuelles les plus précises des constantes universelles e, e/m, $\hbar$, c :

$c=2{,}99793\cdot10^{-10}$ cm/s, $\hbar=1{,}0544\cdot10^{-27}$ erg·s.

$e=4{,}8030\cdot10^{-10}$ U. E. S. C. G. S.,

$$\frac{e}{m}=1{,}7589\cdot10^{7}\ \text{U. E. M. C. G. S.}\cdot g^{-1}; \tag{107.8}$$

la formule (107.7) donnera alors la valeur théorique suivante de R :

$$R=109\,737{,}303\ \text{cm}^{-1}, \tag{107.9}$$

alors que la quantité R_H obtenue empiriquement par des mesures spectroscopiques les plus fines est

$$R_H=109\,677{,}581\ \text{cm}^{-1}. \tag{107.10}$$

La correspondance des valeurs de R obtenues par un calcul théorique et expérimentalement est si proche qu'elle ne laisse aucun doute sur la justesse de la formule (107.5) trouvée par Bohr pour des niveaux d'énergie des atomes hydrogénoïdes. En fait cette correspondance est meilleure qu'elle n'apparaît du rapprochement direct de (107.9) et de (107.10). En effet ces deux valeurs sont incomparables entre elles, car lors du dégagement de la formule (107.7) on a admis une hypothèse injustifiable en regard de précision des mesures spectroscopiques actuelles. Notamment, on avait supposé que le noyau de l'atome hydrogénoïde était immobile, or d'après les lois de la mécanique il faut considérer le mouvement de l'électron et du noyau autour de leur centre d'inertie commun. La convention d'un noyau immobile ne serait justifiée (voir § 50) qu'au cas où la masse du noyau aurait pu être considérée comme infiniment grande par rapport à celle de l'électron. Or, en réalité, le rapport entre la masse du noyau d'hydrogène et celle de l'électron est égal à

$$M_H/m=1836{,}1,$$

et, étant donné la précision des mesures spectroscopiques actuelles, il est inadmissible de négliger la grandeur finie de la masse du noyau.

Il n'est cependant pas difficile d'apporter des corrections qui tiennent compte de cette circonstance. Comme on l'a vu au § 53 pour la solution correcte du problème de deux corps dans la formule (107.5) il faut introduire au lieu de la masse de l'électron la masse réduite de l'électron et du noyau :

$$m'=\frac{mM_Z}{m+M_Z},$$

où M_Z est la masse du noyau de numéro atomique Z. La formule (107.7) prend alors la forme

$$R_Z=\frac{m'e^4}{4\pi\hbar^3c}=\frac{mM_Ze^4}{4\pi\hbar^3c(m+M_Z)}=\frac{me^4}{4\pi\hbar^3c(1+m/M_Z)}. \qquad (107.11)$$

Pour l'hydrogène $M_Z=M_H$ et

$$R_H=\frac{me^4}{4\pi\hbar^3c(1+m/M_H)}. \qquad (107.12)$$

Pour $M_Z=\infty$ la formule (107.11) se transforme en la formule (107.7). C'est pourquoi, si l'on désigne la quantité R de la formule (107.7) par R_∞, alors (107.12) prend la forme

$$R_H=\frac{R_\infty}{1+m/M_H}, \qquad (107.13)$$

et la formule générale (107.11) devient :

$$R_Z=\frac{R_\infty}{1+m/M_Z}. \qquad (107.14)$$

A l'aide de la formule (107.13) on peut justifier définitivement la théorie de la manière suivante : portons dans (107.13) la valeur expérimentale la plus précise de $R_H=109\,677{,}581$ et, d'après (107.13), calculons R_∞; en adoptant $m/M_H=1/1836{,}5$ on obtient

$$R_\infty=R_H\left(1+\frac{m}{M_H}\right)=109\,677{,}581\left(1+\frac{1}{1836{,}5}\right)=109\,736{,}807\ \text{cm}^{-1}.$$

Rapprochant cette valeur de 109 737,303 calculée directement d'après la formule (107.7) on voit que la coïncidence ne peut pas être meilleure.

§ 108. Série de Pickering et spectres des ions hydrogénoïdes

En 1897 l'astronome Pickering decouvrit dans le spectre de l'étoile ζ de Puppis une série spectrale qui rappelait fortement la série de Balmer. L'histoire de cette série est en relation avec l'une des brillantes victoires de la théorie quantique de la structure de l'atome. La figure 163 où on a représenté schématiquement les deux séries montre que les raies de la série

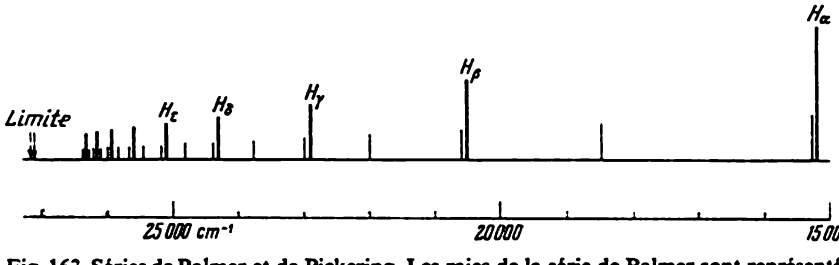


Fig. 163. Séries de Balmer et de Pickering. Les raies de la série de Balmer sont représentées par des traits plus longs

de Pickering peuvent être divisées en deux groupes : les raies du groupe qu'on obtient en sautant une raie coïncident presque avec les raies de la série de Balmer, quant aux raies intermédiaires elles n'ont pas d'analogues dans la série de Balmer. Rydberg montra que cette série peut être définie par la formule de Balmer dans laquelle n prend toutefois des valeurs entières et celles des 1/2 :

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n=2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ \ldots); \tag{108.1}$$

aux valeurs entières correspondent des raies coïncidant avec celles de la série de Balmer et aux valeurs avec 1/2 les raies intermédiaires.

Toutes les tentatives d'obtenir cette série avec l'hydrogène terrestre se sont soldées par un échec. C'est pourquoi la série de Pickering fut attribuée à l'hydrogène des étoiles s'y trouvant dans un état particulier. Finalement on arriva à obtenir cette série en laboratoire, mais pour y parvenir on a dû mélanger, obligatoirement, à de l'hydrogène de l'hélium. Cet ensemble de faits contradictoires ne fut démêlé que par Bohr qui supposa que la série de Pickering appartenait non pas à de l'hydrogène mais à de l'hélium ionisé. En effet, puisque sur la base de (107.6) ν est proportionnel à Z^2 et pour l'hélium $Z=2$, les séries spectrales de l'hélium ionisé He^+ devraient répondre à la formule

$$\nu = 4R_{He}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{108.2}$$

Si l'on y pose $m=4$, la formule prend la forme

$$\nu = 4R_{He}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n=5,\ 6,\ \ldots),$$

mais on peut également l'écrire sous la forme

$$\nu = R_{He}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n/2)^2}\right)$$

ou si l'on désigne $n/2$ par k

$$\nu = R_{He}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2}\right) \qquad (k=2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 4;\ \ldots).$$

Mais c'est justement la formule de la série de Pickering. Par suite de la différence des masses de l'hydrogène et de l'hélium la constante de Rydberg R_{He} doit différer de peu de R_H. Pour des valeurs entières de k les raies de la série de Pickering devraient donc être légèrement déplacées par rapport aux raies de Balmer de l'hydrogène.

Ces prévisions de Bohr furent confirmées par Paschen qui montra qu'on peut obtenir facilement la série de Pickering avec de l'hélium pur sans trace d'hydrogène, mais qu'elle ne peut être obtenue avec de l'hydrogène pur et que les raies de cette série, pour des valeurs entières de k, sont déplacées par rapport aux raies de Balmer vers le violet comme il fallait s'y

attendre d'après la formule (108.2). Une illustration de ce déplacement se trouve dans le tableau XIII donnant les valeurs précises des longueurs d'ondes mesurées par Paschen pour le spectre de l'hélium ionisé et à côté des longueurs d'ondes de la série de Balmer pour l'hydrogène, correspondant aux valeurs entières de n.

Tableau XIII

k	He^+	H
3	6560,1	6562,8 (H_α)
3,5	5411,6	—
4	4859,3	4861,3 (H_β)
4,5	4561,6	—
5	4338,7	4340,5 (H_γ)
5,5	4199,9	—
6	4100,0	4110,7 (H_δ)

Les ions hydrogénoïdes suivant He^+ sont l'ion doublement ionisé du lithium Li^{++} ($Z=3$) et l'ion triplement ionisé du béryllium Be^{+++} ($Z=4$). Leurs séries spectrales doivent répondre aux formules

$$\nu = 9R_{Li}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\nu = 16R_{Be}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

Les premiers termes de la série de Lyman ($m=1$) ne furent trouvés pour ces ions que dans l'ultraviolet lointain du spectre.

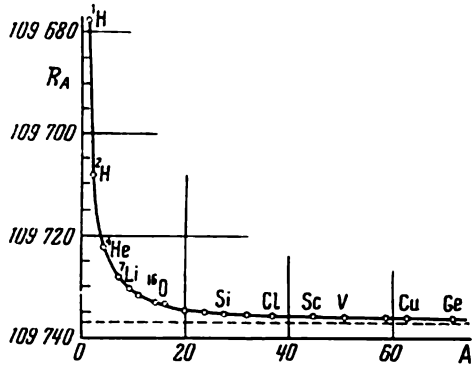


Fig. 164. Variation de la constante de Rydberg en fonction de la masse du noyau

Sur la figure 164 on a représenté graphiquement les variations de la constante de Rydberg en fonction de la masse du noyau.

Exercices : 1. La longueur d'onde de la première raie de la série de Lyman pour l'hélium ionisé est égale à $\lambda = 303{,}797$ Å. Calculer : a) la constante de Rydberg pour une masse infiniment grande; b) l'énergie d'ionisation de l'ion He^+ en l'exprimant en électrons-volts.

2. Les longueurs d'ondes mesurées dans les spectres des ions Li^{++} et Be^{+++} sont (en Å) :

Li^{++}			Be^{+++}		
$n_1=1$	$n_2=2$	135,01	$n_1=1$	$n_2=2$	75,94
$n_1=1$	$n_2=3$	113,92			

Calculer les trois premiers termes de l'ion Li^{++} et les deux premiers termes de Be^{+++}.

§ 109. Application de la théorie précédente. Découverte de l'isotope lourd de l'hydrogène

La relation entre la constante de Rydberg et la masse du noyau fut utilisée pour la découverte de l'isotope lourd de l'hydrogène. Les étapes de cette découverte rappellent l'histoire de la découverte des gaz nobles, en commençant par l'argon, dans l'atmosphère; l'impulsion fut donnée, comme on le sait, par une petite différence entre les valeurs du poids atomique de l'azote atmosphérique et le poids atomique de l'azote obtenu en laboratoire à partir des divers composés chimiques. Cette histoire sert de démonstration de l'utilité des déterminations précises des constantes et confirme la remarque judicieuse d'un naturaliste de la fin du XIX^{e} siècle : « combien de découvertes se cachent encore autour du sixième chiffre après la virgule! »

L'histoire de la découverte de l'hydrogène lourd est sommairement la suivante. La détermination du poids atomique de l'hydrogène effectuée par Aston au moyen d'un spectrographe de masse a donné $1{,}007\,78 \pm 0{,}000\,015$ par rapport au poids atomique de l'oxygène qui par convention était estimé à 16,000 00. Cette grandeur correspondait très bien au poids atomique de l'hydrogène trouvé sur la base des déterminations chimiques : $1{,}007\,77 \pm 0{,}000\,02$.

A l'époque où ont été effectuées ces mesures on admettait que l'oxygène ne possédait pas d'isotopes. Mais bientôt on s'est aperçu que l'oxygène atmosphérique était un mélange de deux isotopes : ^{16}O et ^{18}O, dont les quantités s'y trouvaient dans un rapport constant de 630 : 1. Prenant en considération cette circonstance Birge et Menzel remarquèrent que la coïncidence des valeurs du poids atomique de l'hydrogène obtenu au moyen du spectrographe de masse et par des déterminations chimiques était en réalité illusoire et se basait sur une erreur de principe. En effet, chaque raie du spectrographe de masse correspond à un isotope bien déterminé. La raie à laquelle correspond la masse de 16,000 00 appartient en réalité à l'isotope de l'oxygène ^{16}O, tandis que dans les mesures chimiques la masse 16 est attribuée de façon erronée au mélange $^{16}O + 1/630\ ^{18}O$. Si par convention on attribue à la raie de l'oxygène dans le spectre de masse cette masse moyenne obtenue dans les expériences chimiques, c'est-à-dire $^{16}O + 1/630\ ^{18}O$, on obtiendra alors pour le poids atomique de l'hydrogène, réduit ainsi à l'échelle chimique, un nombre manifestement *inférieur* : 1,007 56. Le fait que le poids atomique de l'hydrogène déterminé par les voies chimiques est de $1{,}007\,77 - 1{,}007\,56 = 0{,}000\,21$, c'est-à-dire d'à peu près 0,02 % supérieur, a incité Birge et Menzel de formuler l'hypothèse que l'hydrogène ordinaire, qu'utilisent les chimistes dans leurs expériences, est en réalité un mélange d'au moins deux isotopes : de l'hydrogène léger de masse d'environ 1 et de l'hydrogène lourd de masse (en chiffres ronds) 2. De la différence des poids atomiques obtenus au moyen du spectrographe de masse et par voie chimique ils déduisirent le rapport des quantités d'isotopes dans l'hydrogène ordinaire et obtinrent $^{1}H : {}^{2}H = 4500 : 1$.

La découverte de l'isotope lourd fut énormément facilitée par le rapport remarquablement favorable des masses de deux isotopes. Tandis qu'habituellement la différence des masses des isotopes est relativement très faible et, par suite, leurs propriétés sont si proches que l'accumulation de l'un des isotopes est rendue difficile, ici la masse de l'un des isotopes est double de l'autre. De sorte que leurs propriétés diffèrent de façon sensible. Profitant de cette circonstance Urey et ses collaborateurs sont arrivés à augmenter artificiellement le pourcentage de l'hydrogène lourd de la manière suivante : ils procédèrent avec grand soin à l'évaporation de 3 l d'hydrogène liquide sous la pression de quelques mm de mercure. Comme la vitesse d'évaporation de l'hydrogène léger devait dépasser celle de l'hydrogène lourd, à mesure que l'évaporation se prolongeait ce dernier devait augmenter dans le mé-

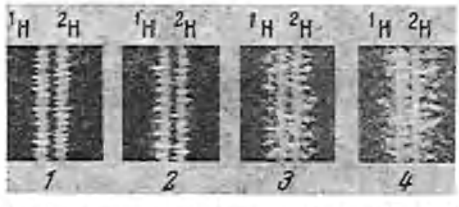


Fig. 165. Photographie des quatre premiers termes de la série du Lyman d'un mélange d'hydrogène léger et lourd

lange. Quand la quantité de l'hydrogène liquide de 3 l se réduisit à quelques fractions du centimètre cube, ils firent passer ce reste dans un tube à décharge et en photographièrent le spectre en escomptant que par suite de la différence de grandeur de la constante de Rydberg, la raie de l'hydrogène lourd serait déplacée par rapport à celle de l'hydrogène léger. Cela se confirma en fait. Sur la figure 165 on a donné la photographie des quatre premiers termes de la série de Lyman d'un mélange d'hydrogène léger (^1H) et lourd (^2H). Le déplacement de la raie s'y observe de façon nette. Les longueurs d'ondes correspondantes sont données dans le tableau XIV où les raies de l'hydrogène lourd sont notées par λ_D (l'hydrogène lourd a reçu une appellation particulière de deutérium et son symbole chimique est D). Dans les deux dernières colonnes du tableau sont données les différences $\Delta\lambda$ mesurées et calculées au moyen des valeurs de la constante de Rydberg pour H et D. La coïncidence des valeurs calculées et mesurées de $\Delta\lambda$ y est également très satisfaisante.

Tableau XIV

λ_D(en Å)	λ_H (en Å)	$\Delta\lambda$ calculé	$\Delta\lambda$ observé
1215,664	1215,334	0,330	0,330
1025,718	1025,439	0,279	0,279
972,533	972,269	0,264	0,266

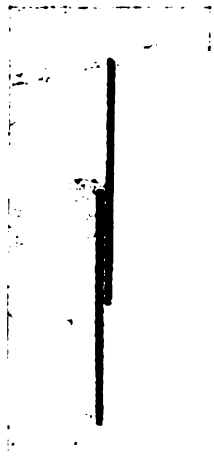


Fig. 166. Rapprochement des longueurs d'onde H_α (raie inférieure) et D_α (raie supérieure)

La figure 166 est la photographie de la première raie (H_α) de la série de Balmer de l'hydrogène léger et lourd.

L'hydrogène lourd, le deutérium, présente un intérêt non seulement comme un remplaçant de l'hydrogène léger dans divers composés, mais offre des applications importantes dans la physique nucléaire où le noyau de deutérium, le deutéron, constitue le « projectile » le plus commode utilisé pour la fission des noyaux.

§ 110. Détermination spectroscopique de la charge massique de l'électron

Au § 39 on a déjà indiqué que les données spectroscopiques permettent de déterminer la charge massique de l'électron. Montrons maintenant comment on le fait.

Ecrivons l'expression de la constante de Rydberg pour deux atomes quelconques, par exemple, pour l'hydrogène (H) :

$$R_{\mathrm{H}}=\frac{R_\infty}{1+m/M_{\mathrm{H}}}, \tag{110.1}$$

et le deutérium (D) :

$$R_{\mathrm{D}}=\frac{R_\infty}{1+m/M_{\mathrm{D}}}, \tag{110.2}$$

où M_{H} et M_{D} sont les masses atomiques des noyaux. De (110.1) et de (110.2) on obtient

$$\frac{R_{\mathrm{D}}}{R_{\mathrm{H}}}=\frac{1+m/M_{\mathrm{H}}}{1+m/M_{\mathrm{D}}},$$

$$\frac{R_{\mathrm{D}}-R_{\mathrm{H}}}{R_{\mathrm{H}}}=\frac{m}{M_{\mathrm{H}}}\cdot\frac{M_{\mathrm{D}}-M_{\mathrm{H}}}{M_{\mathrm{D}}+m},$$

d'où

$$\frac{m}{M_{\mathrm{H}}}=\frac{(R_{\mathrm{D}}-R_{\mathrm{H}})(M_{\mathrm{D}}+m)}{R_{\mathrm{H}}(M_{\mathrm{D}}-M_{\mathrm{H}})}. \tag{110.3}$$

Les masses des noyaux M_{D} et M_{H} entrant dans cette formule sont exprimées au moyen des masses atomiques de H et D et la masse de l'électron de la façon suivante :

$$M_{\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{H}}{N}-m, \qquad M_{\mathrm{D}}=\frac{\mathrm{D}}{N}-m$$

(N étant le nombre d'Avogadro).

La charge de Faraday F est le produit de la charge de l'électron par le nombre d'Avogadro

$$F=Ne. \tag{110.4}$$

De (103.3) et de (103.4) on obtient

$$\frac{e}{m}=\frac{F}{Nm}=\frac{FR_{\mathrm{H}}(M_{\mathrm{D}}-M_{\mathrm{H}})}{N(R_{\mathrm{D}}-R_{\mathrm{H}})(M_{\mathrm{D}}+m)M_{\mathrm{H}}}=\frac{FR_{\mathrm{H}}(\mathrm{D}-\mathrm{H})}{(R_{\mathrm{D}}-R_{\mathrm{H}})\,\mathrm{D}(\mathrm{H}-Nm)}. \qquad (110.5)$$

Comme le produit Nm (« poids atomique » de l'électron) est une quantité petite par rapport à H et D,

$$Nm=6{,}022\cdot10^{23}\cdot9{,}108\cdot10^{-28}=5{,}48\cdot10^{-4},$$

on peut avec une précision suffisante utiliser pour le calcul de e/m au lieu de (110.5) la formule suivante :

$$\frac{e}{m}=F\frac{R_{\mathrm{H}}}{(R_{\mathrm{D}}-R_{\mathrm{H}})\mathrm{H}}\,\frac{\mathrm{D}-\mathrm{H}}{\mathrm{D}}.$$

Si l'on y porte les valeurs précises des constantes, alors sur la base des dernières mesures des spectres de H et de D on trouve

$$\frac{e}{m}=1{,}7589\cdot10^{7}\ \text{U.E.M. C.G.S.}\cdot\mathrm{g}^{-1}.$$

Comme on voit, les valeurs les plus précises de e/m obtenues dans les expériences avec la déviation des électrons par les champs électromagnétiques sont proches de cette valeur spectroscopique de e/m.

§ 111. Diagrammes des niveaux d'énergie

En faisant le bilan de ce qui a été dit aux paragraphes précédents on constate que le résultat le plus important de l'analyse du spectre est l'établissement d'un système de termes. En effet, en combinant les termes deux à deux on obtient directement les nombres d'ondes des raies spectrales; en multipliant les nombres exprimant les termes en cm^{-1} par hc on obtient les valeurs positives des énergies de l'atome aux différents états quantiques. Etant exprimées en électrons-volts ces valeurs d'énergie donnent les potentiels d'ionisation de l'atome aux différents états, quant à leurs différences elles constituent les potentiels d'excitation.

Pour embrasser rapidement l'ensemble des informations concernant l'atome obtenues ainsi, il est le plus commode d'utiliser des diagrammes des niveaux d'énergie. Le plus simple de ces diagrammes est donné pour l'atome d'hydrogène à la figure 167. On y a marqué par des lignes horizontales les différents états énergétiques. Pour mener ces lignes il suffit, en se rapportant à ce qui a été dit, de porter en ordonnées les valeurs de R/k^2. A mesure que k croît la distance entre les niveaux successifs diminue et à la limite devient nulle. Au-dessus de la réunion de ces lignes se dispose le domaine continue des énergies positives non quantifiées. A droite et à gauche se trouvent les échelles des énergies et des termes. La lecture sur les deux échelles s'effectue à partir du point de l'union des niveaux, mais puisque pour les états quantifiés les énergies sont négatives et les termes positifs, l'énergie diminue de bas en haut, tandis que les termes

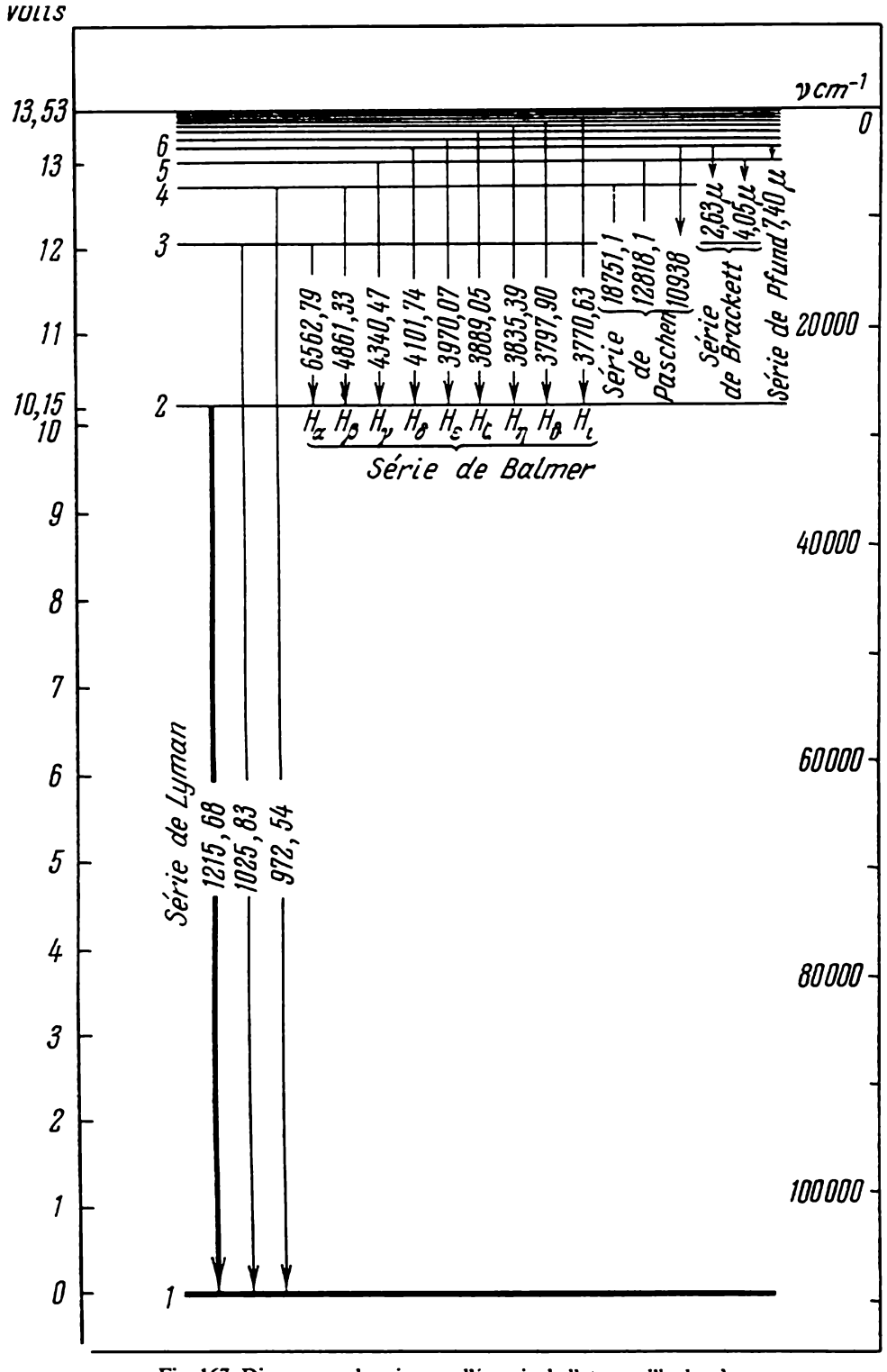


Fig. 167. Diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

(égaux au travail d'ionisation) augmentent dans la même direction. Sur le diagramme on a montré par des flèches les transitions possibles entre les niveaux avec l'indication des séries formées. Chaque série apparaît avec le passage au niveau inférieur de tous les niveaux supérieurs. Les nombres d'ondes des raies spectrales sont lus sur l'échelle de droite sous forme de différences des termes correspondant à l'état final et initial.

§ 112. Spectre continu limite de l'atome d'hydrogène

A tout spectre discret à la frontière de la série, c'est-à-dire au point de resserrement des raies, est contigu un spectre continu s'étendant vers les ondes courtes. Ce spectre continu peut être observé en émission et en absorption. Son apparition est liée aux transitions des électrons de l'état à énergie positive à l'état à énergie négative ou inversement. Comme on le sait déjà, dans tous les états quantifiés, l'électron possède une énergie négative. Le signe moins est ici en rapport avec le choix arbitraire de l'état à énergie potentielle nulle. Habituellement l'énergie potentielle nulle est attribuée à l'électron se trouvant au repos à une distance infiniment grande du noyau. C'est pourquoi le signe moins de l'énergie totale n'indique simplement que l'énergie de l'électron dans ces états est inférieure à son énergie dans le cas où il est séparé de l'atome et se trouve au repos à des distances infiniment grandes, c.-à-d. qu'on a affaire à un électron lié*). Il en résulte que l'énergie positive doit appartenir à un électron séparé de l'atome et ayant un excès d'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle. D'après la mécanique classique un tel électron doit décrire autour du noyau une orbite hyperbolique (fig. 168). Or le premier postulat de Bohr exige qu'au cours du déplacement sur cette orbite l'électron n'émette pas de rayonnement; le rayonnement n'est émis que dans le cas où l'électron saute de cette orbite hyperbolique sur une orbite fermée (par exemple circulaire). D'autre part, suivant les principes généraux de la théorie des quanta (voir le paragraphe suivant) ne sont soumis à la quantification que les mouvements périodiques ou conventionnellement périodiques, ce qui fait que les électrons décrivant les orbites hyperboliques peuvent posséder des réserves d'énergie quelconques se répartissant de façon continue. Cela explique justement la nature continue du spectre.

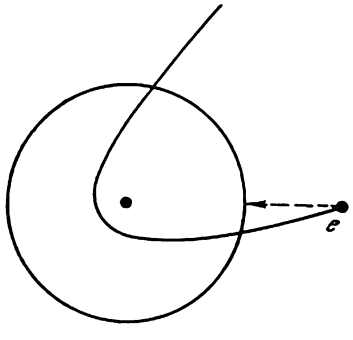


Fig. 168.

*) En fait l'énergie totale de l'électron comprend également l'énergie correspondant à la masse au repos de l'électron m_0c^2 égale à $0{,}5 \cdot 10^6$ eV, c'est-à-dire de beaucoup supérieure à l'énergie potentielle négative de l'état normal.

En effet, le nombre d'onde correspondant à la transition de l'état quantifié à l'état d'énergie nulle sera égal à R/m^2 (limite de la série), tandis que le nombre d'onde correspondant à la transition de l'état quantifié à l'état à énergie positive ΔE sera

$$\nu=\frac{R}{m^2}+\frac{\Delta E}{2\pi\hbar c}.$$

Comme $\Delta E>0$ et varie de façon continue, ν sera supérieur au nombre d'onde de la limite de la série et se modifiera continuellement, autrement dit on obtiendra un spectre continu contigu à la limite de la série du côté des ondes courtes. Il est de même évident que le *spectre d'absorption continu* traduit un processus de séparation de l'électron de l'atome avec une énergie cinétique finie, c'est-à-dire l'ionisation, quant au *spectre d'émission continu* il témoigne d'un processus inverse, c'est-à-dire d'une recombinaison de l'ion positif et de l'électron. Enfin, l'énergie correspondant au nombre d'onde du début du spectre continu du côté des ondes longues, ou, ce qui revient au même, au nombre d'ondes de la limite de la série, doit être égale à l'énergie d'ionisation, c'est-à-dire à l'énergie nécessaire à la séparation de l'électron de l'atome et à sa transition à l'état d'énergie cinétique nulle. Ainsi donc, le nombre d'onde de la limite de la série de Lyman pour l'hydrogène

$$\nu=\frac{R_H}{1^2}=R_H=109\,678\ \text{cm}^{-1}$$

donne immédiatement l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental le plus stable. Si l'on exprime ce nombre d'onde en électrons-volts, on obtient 13,527 eV qui correspond au travail d'ionisation, directement mesuré par des méthodes examinées au chapitre VII, de l'atome d'hydrogène dans l'état normal et qui est égal à 13,54 eV.

§ 113. Quantification de l'atome hydrogénoïde suivant Bohr et Sommerfeld

Aux paragraphes précédents on a examiné un grand nombre de conséquences de la théorie de Bohr qui lui assurèrent un succès remarquable. Sommerfeld fit le pas suivant dans le développement de la théorie. Tandis que dans la théorie initiale de Bohr ne furent examinées que les orbites circulaires, Sommerfeld fit appel à la solution générale du problème de Kepler de la mécanique classique, c'est-à-dire qu'il a tenu compte également des orbites elliptiques. Pour cela il a fallu tout d'abord élargir les règles de quantification formulées au § 106. En effet, tant qu'on a étudié seulement les mouvements circulaires de l'électron on pouvait se contenter de la règle de quantification à un seul degré de liberté. Mais si l'on veut également tenir compte des orbites elliptiques, il faut posséder des règles de quantification pour des systèmes à deux degrés de liberté car la position de l'électron sur l'orbite est alors définie par deux paramètres : le rayon vecteur r et l'angle polaire (azimut) φ. Enfin, si l'on veut tenir compte de l'orientation spatiale de l'orbite, on doit attribuer à l'électron trois degrés de liberté.

Ainsi donc, le premier problème qu'il fallait résoudre consistait à trouver les règles de quantification pour un système à plusieurs degrés de liberté. Ce problème fut résolu par Sommerfeld et indépendamment de lui par G. A. Wilson pour un cas assez général de systèmes dits systèmes conventionnellement périodiques.

Un exemple simple de ce système nous est fourni par l'oscillateur dit anisotrope. Soit une particule de masse m qui se meut dans le plan de façon que ses projections sur deux axes de coordonnées mutuellement perpendiculaires effectuent des oscillations harmoniques simples de fréquences différentes ν_x et ν_y. Dans ce cas les équations du mouvement de la particule seront

$$m\ddot{x} = -f_1 x, \qquad m\ddot{y} = -f_2 y,$$

d'où

$$x = a_1 \cos(2\pi\nu_x t + \delta_1), \quad y = a_2 \cos(2\pi\nu_y t + \delta_2),$$

et les fréquences seront

$$\nu_x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f_1}{m}}, \qquad \nu_y = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f_2}{m}}.$$

Si les deux constantes f_1 et f_2 de la force quasi élastique étaient égales, les fréquences ν_x et ν_y seraient de même identiques et on aurait un oscillateur isotrope ordinaire. On suppose, toutefois, que $f_1 \neq f_2$: dans ce cas l'oscillateur est dit anisotrope. Le mouvement le plus général d'un tel oscillateur s'obtient quand ν_x et ν_y sont incommensurables. Dans ces conditions la particule décrit une courbe complexe (figure de Lissajous) composée de plusieurs boucles (fig. 169) et jouissant d'une propriété intéressante : cette courbe ne se ferme jamais; elle remplit le rectangle $a_1 a_2$ avec une densité uniforme de sorte qu'un point en mouvement peut devenir infiniment voisin de n'importe quel point intérieur au rectangle. Au contraire, si ν_x et ν_y sont commensurables, on obtiendrait un mouvement purement périodique; par exemple, pour $\nu_x = \nu_y$ la particule effectue soit des oscillations suivant une droite, soit décrit un cercle ou une ellipse. Pour un autre rapport rationnel quelconque entre les fréquences on obtient en général une courbe compliquée mais toujours fermée; en partant d'un point déterminé après avoir décrit une trajectoire plus ou moins compliquée la particule reviendra au même point et le mouvement se répétera. Dans tous ces cas on a affaire en réalité non pas à deux fréquences fondamentales ν_x

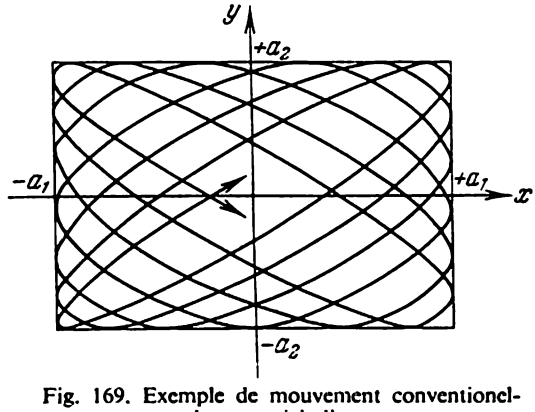


Fig. 169. Exemple de mouvement conventionellement périodique

et ν_y mais à une fréquence, car par suite de la nature rationnelle du rapport ν_x/ν_y la seconde fréquence peut être exprimée en fonction de la première. Il s'ensuit qu'un mouvement purement périodique est un cas particulier du mouvement conventionnellement périodique et de plus un cas *singulier* : au lieu de deux fréquences propres qui devraient caractériser le système à deux degrés de liberté on a ici affaire à une seule fréquence, et la trajectoire ne remplit pas uniformément tout le rectangle. On dit habituellement que le mouvement purement périodique est un cas *dégénéré* du mouvement conventionnellement périodique.

Dans le cas le plus simple de mouvement conventionnellement périodique examiné, ce dernier se réduit à deux oscillations harmoniques simples. C'est pourquoi la règle de quantification (106.7) peut être maintenant appliquée à chacune de ces oscillations en exigeant que

$$\oint p_x\,dx=n_x h, \qquad \oint p_y\,dy=n_y h,$$

où n_x et n_y sont des nombres entiers 1, 2, 3, ...

Il apparaît que dans des nombreux cas de systèmes à plusieurs degrés de liberté on peut trouver des coordonnées généralisées telles que $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_f$ pour lesquels, comme dans l'exemple étudié de l'oscillateur anisotrope, le mouvement est constitué de f oscillations harmoniques; dans ces cas la règle de quantification trouvée au § 106 peut être appliquée à chaque degré de liberté. On obtiendra ainsi f *conditions quantiques :*

$$\oint p_1\,dq_1=n_1 h, \quad \oint p_2\,dq_2=n_2 h, \quad \ldots, \quad \oint p_f\,dq_f=n_f h. \qquad (113.1)$$

Les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_f$ sont dits *nombres quantiques.*

Reprenons maintenant l'atome hydrogénoïde. Suivant le schéma de la théorie de Bohr il faut auparavant résoudre dans le cadre de la mécanique classique le problème du mouvement de l'électron dans le champ coulombien du noyau. La solution a été fournie de façon exhaustive au § 51 où on a trouvé les relations suivantes :

$$E=-\frac{Ze^2}{2a}, \qquad (51.19)$$

$$E=-\frac{mZ^2e^4(1-\varepsilon^2)}{2P^2}. \qquad (51.18)$$

De cette multitude de valeurs continues d'énergie il faut choisir, en appliquant les conditions quantiques, une suite de valeurs discrètes.

Puisque en examinant le mouvement orbital de l'électron on a dû lui attribuer deux degrés de liberté correspondant à deux coordonnées indépendantes r et φ, il faut donc faire appel à deux conditions quantiques :

$$\oint p_r\,dr=n_r h; \qquad \oint p_\varphi\,d\varphi=n_\varphi h. \qquad (113.2)$$

Sur la base du § 57 les impulsions généralisées p_r et p_φ sont :

$$p_r=m\dot{r}, \qquad p_\varphi=mr^2\dot{\varphi}.$$

Comme suivant la loi de la conservation du moment cinétique $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$, on obtient de la seconde condition (113.2)

$$n_\varphi h = \oint p_\varphi \, d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

d'où

$$p_\varphi = n_\varphi \frac{h}{2\pi} = n_\varphi \hbar. \tag{113.3}$$

L'application de la première condition quantique (113.2) exige des calculs assez compliqués qu'on omet ici. Ces calculs aboutissent à l'expression suivante de l'excentricité de l'orbite ε en fonction des nombres quantiques n_r et n_φ :

$$1-\varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{(n_r+n_\varphi)^2}.$$

La somme des deux nombres quantiques n_r et n_φ est appelée *nombre quantique principal*. En le désignant par n on a

$$n_r + n_\varphi = n,$$

$$1-\varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{n^2}. \tag{113.4}$$

Portant cette expression dans (51.18) et remplaçant $P = p_\varphi$ par $n_\varphi \hbar$ on obtient

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}. \tag{113.5}$$

On voit que nonobstant l'application de deux conditions quantiques, le résultat final ne diffère guère de celui obtenu au § 107 pour le cas des orbites circulaires : l'énergie dépend d'un seul nombre quantique n appelé *nombre quantique principal*, et qui est la somme des nombres quantiques n_r et n_φ. Ce résultat est la conséquence du fait que le mouvement elliptique de l'électron est un cas dégénéré du mouvement conventionnellement périodique. En effet, un mouvement conventionnellement périodique plan non dégénéré doit se dérouler suivant la figure non fermée de Lissajous, alors que la révolution suivant une ellipse est un mouvement purement périodique. On verra maintenant que le résultat exprimé par la formule (113.5) signifie que pour chaque valeur du nombre quantique principal n il existe *n niveaux d'énergie coïncidant en valeur*.

Pour s'en convaincre montrons qu'à chaque valeur de n correspondent n orbites différentes de même demi grand axe. En effet, l'expression du demi grand axe de l'orbite a été obtenue à partir de la formule (51.19). En y portant les valeurs quantifiées de l'énergie (113.5) on a

$$a = -\frac{Ze^2}{2E} = n^2 \frac{\hbar^2}{mZe^2} \tag{113.6}$$

soit en utilisant les notations simplifiées introduites au § 107 pour le « rayon de Bohr » a_1 [formule (107.4)]

$$a=n^2\frac{a_1}{Z} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{113.7}$$

Ainsi, la valeur du demi grand axe pour des états quantiques différents est proportionnelle au carré du nombre quantique principal.

Pour calculer le demi petit axe b prenons la formule connue en géométrie analytique $b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ et portons-y les valeurs quantiques déjà trouvées de a et de $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ tirées de (113.4) et de (113.7) :

$$b=n^2\frac{a_1}{Z}\,\frac{n_\varphi}{n}=nn_\varphi\frac{a_1}{Z}. \tag{113.8}$$

Le rapprochement de (113.7) et de (113.8) montre que le demi grand axe n'est fonction que du nombre quantique principal, tandis que le demi petit axe dépend aussi bien du nombre quantique principal que du nombre quantique azimutal.

Examinons maintenant les valeurs que peut prendre le nombre quantique azimutal. Pour $n_\varphi=n$ (113.8) se transforme en (113.7) et l'orbite devient circulaire; pour $n_\varphi=0$ et $b=0$ l'orbite elliptique dégénère et devient une trajectoire rectiligne le long de laquelle l'électron aurait dû effectuer des mouvements pendulaires. Dans la théorie de Bohr une telle orbite est exclue, car dans le mouvement sur une pareille orbite l'électron devrait entrer en collision avec le noyau. Ainsi donc, la valeur la plus petite de n_φ est 1 et la plus grande $-n$:

$$n_\varphi=1, 2, 3, \ldots, n. \tag{113.9}$$

Il s'ensuit qu'à chaque valeur de n, c'est-à-dire qu'à chaque demi grand axe correspondent n orbites différentes aux valeurs variées de l'excentricité : de l'ellipse allongée au cercle. Par exemple,

$$n=1, \quad a=\frac{a_1}{Z}, \quad n_\varphi=1, \quad b=\frac{a_1}{Z}=a \quad - \text{ cercle},$$

$$n=2, \quad a=4\frac{a_1}{Z}\begin{cases} n_\varphi=1, & b=2\dfrac{a_1}{Z} \quad - \text{ ellipse}, \\ n_\varphi=2, & b=4\dfrac{a_1}{Z} \quad - \text{ cercle}, \end{cases}$$

$$n=3, \quad a=9\frac{a_1}{Z}\begin{cases} n_\varphi=1, & b=3\dfrac{a_1}{Z} \quad - \text{ ellipse}, \\ n_\varphi=2, & b=6\dfrac{a_1}{Z} \quad - \text{ ellipse}, \\ n_\varphi=3, & b=9\dfrac{a_1}{Z} \quad - \text{ cercle}. \end{cases}$$

Sur la figure 170 on a tracé les orbites pour $n=1, 2, 3$. Notons que les orbites elliptiques s'approchent au périgée d'autant plus près du foyer (noyau) que n_φ est plus petit.

On voit ainsi que pour chaque valeur du nombre quantique principal on trouve n orbites différentes ayant un même demi grand axe. D'après la formule (113.5) à toutes ces n orbites correspond une même valeur de l'énergie ou, plus précisément, n valeurs égales de l'énergie. C'est justement en quoi consiste la dégénérescence. Mais si, toutefois, une perturbation intervient, les orbites se déforment de façon différente et les n niveaux d'énergie qui auparavant coïncidaient se clivent. On dit dans ce cas que la perturbation *lève* la dégénérescence.

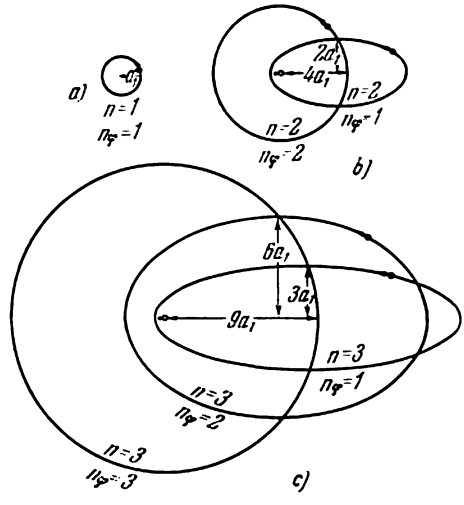


Fig. 170. Orbites des électrons suivant Bohr

Jusque-là on ne s'est intéressé qu'au mouvement de l'électron dans le plan de l'orbite et, par suite, on attribuait à l'électron deux degrés de liberté. Or la position de l'électron dans l'espace est caractérisée par trois coordonnées. En tenant compte de ces trois degrés de liberté on arrive à décrire non seulement le mouvement de l'électron sur son orbite mais également l'orientation spatiale de l'orbite elle-même.

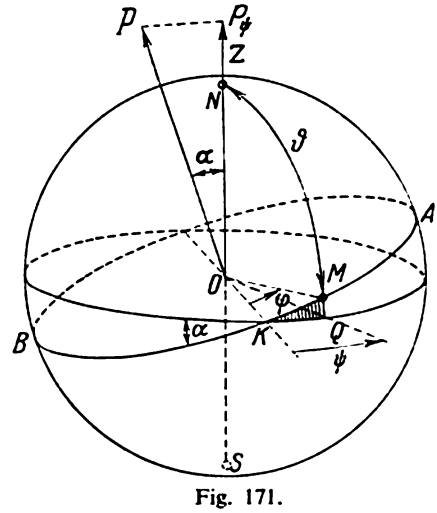


Fig. 171.

La position de l'électron dans l'espace est caractérisée par trois coordonnées polaires r, ϑ et ψ (fig. 171). C'est pourquoi les conditions quantiques prennent dans ce cas la forme

$$\oint p_r\,dr=n_r h, \quad \oint p_\vartheta\,d\vartheta=n_\vartheta h; \quad \oint p_\psi\,d\psi=n_\psi h. \qquad (113.10)$$

Les impulsions généralisées p_r, p_ϑ, p_ψ se calculent suivant la règle générale

(§ 57) : il faut écrire l'expression de l'énergie cinétique en coordonnées polaires r, ϑ, φ :

$$E_k \equiv T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) \tag{113.11}$$

et trouver les dérivées par rapport aux vitesses généralisées :

$$p_r = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}. \tag{113.12}$$

Examinons maintenant l'impulsion généralisée p_φ. Sur la figure 171 on voit que la coordonnée φ caractérise le mouvement de la projection de l'électron sur l'équateur et l'impulsion généralisée p_φ qui lui correspond est la projection du moment cinétique complet P sur l'axe z. La direction de cet axe peut par exemple être définie physiquement par un champ magnétique extrêmement faible coïncidant en direction avec l'axe z. On verra tout de suite que p_φ conserve sa valeur, $p_\varphi = \text{const}$. Dans ce but écrivons la fonction de Hamilton en tenant compte de l'expression de l'énergie cinétique (113.11) et de l'expression des impulsions généralisées (113.12) :

$$H = T + U = E_k + E_p = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{r}. \tag{113.13}$$

Puisque la coordonnée φ n'entre pas dans cette expression, c'est donc une coordonnée cyclique. Il s'ensuit que l'impulsion associée est constante (§ 60), $p_\varphi = \text{const}$. De ce fait la condition de quantification $\oint p_\varphi\, d\varphi = n_\varphi h$ donne :

$$\oint p_\varphi\, d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi = n_\varphi h,$$

$$p_\varphi = n_\varphi \frac{h}{2\pi} = n_\varphi \hbar. \tag{113.14}$$

On voit donc que la projection du moment cinétique sur la direction du champ acquiert une signification quantique. Cela montre que l'orientation des orbites AB dans l'espace ne peut être arbitraire mais qu'il existe une suite discrète d'orientations possibles. En effet, en introduisant à la place du nombre essentiellement positif n_φ le nombre m qui lui est égal en valeur absolue et qui peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives on obtient

$$\cos\alpha = \frac{p_\varphi}{P} = \frac{m\hbar}{n_\varphi \hbar} = \frac{m}{n_\varphi}.$$

Soit, par exemple, $P = \hbar/2\pi$; alors $n_\varphi = 1$ et

$$\cos\alpha = m/n_\varphi = +1,\ 0,\ -1.$$

Ainsi pour $n_\varphi = 1$ on ne peut avoir que trois orientations différentes de l'orbite; pour $n_\varphi = 2$ le nombre de ces orientations est de cinq ($m = +2,\ +1,$

0, −1, −2), pour $n_\varphi=3$ elles sont au nombre de sept et en général pour n_φ quelconque le nombre d'orientations possibles est égal à $2n_\varphi+1$.

Il est toutefois facile de se convaincre que les deux nouveaux nombres quantiques introduits, le nombre « équatorial » n_ϑ et le nombre « latitudinal » n_ψ, sont liés par une relation simple au nombre quantique azimutal n_φ. Et, précisément,

$$n_\varphi=n_\vartheta+n_\psi.$$

On a vu en effet au § 59 que l'énergie cinétique T peut s'exprimer de la façon suivante :

$$2T=\sum_k \dot{q}_k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{59.9}$$

En désignant l'énergie cinétique par E_{cin} et considérant que $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=p_k$ on obtient

$$2E_{\text{cin}}=\sum_k \dot{q}_k p_k.$$

En intégrant cette égalité sur t dans les limites de la période, c'est-à-dire de 0 à τ, on trouve

$$2\int_0^\tau E_{\text{cin}}\,dt=\sum_k\int_0^\tau p_k\,dq_k=\sum_k\oint p_k\,dq_k. \tag{113.15}$$

Si l'on choisit en quantité de coordonnées q_k les coordonnées polaires du plan (r et φ), alors d'après (113.15)

$$2\int_0^\tau E_{\text{cin}}\,dt=\oint p_r\,dr+\oint p_\varphi\,d\varphi. \tag{113.16}$$

Dans le cas de coordonnées polaires sphériques on a

$$2\int_0^\tau E_{\text{cin}}\,dt=\oint p_r\,dr+\oint p_\vartheta\,d\vartheta+\oint p_\psi\,d\varphi.$$

En égalant entre eux les seconds membres on trouve après simplification

$$\oint p_\varphi\,d\varphi=\oint p_\vartheta\,d\vartheta+\oint p_\psi\,d\varphi$$

ou, en tenant compte des conditions quantiques (113.2),

$$n_\varphi=n_\psi+n_\vartheta. \tag{113.17}$$

Ceci montre que l'expression de l'énergie totale de l'électron (113.5) peut être récrite sous la forme

$$E=-\frac{mZ^2e^4}{n^2 2\hbar^2}=-\frac{mZ^2e^4}{(n_r+n_\varphi)^2 2\hbar^2}=-\frac{mZ^2e^4}{(n_r+n_\vartheta+n_\psi)^2 2\hbar^2}.$$

Par suite, au cas où l'on tient compte de l'orientation spatiale de l'orbite tout comme dans le cas du problème plan, l'énergie totale dépend uniquement de la somme de tous les nombres quantiques et non pas des nombres quantiques eux-mêmes. En d'autres termes, la dégénérescence est en réalité plus importante que dans le cas de l'étude du problème plan : non seulement toutes les ellipses de même demi grand axe mais également toutes ces ellipses différemment orientées dans l'espace possèdent une même énergie en l'absence d'un champ magnétique extérieur.

Puisqu'avec l'introduction de toutes ces précisions (orbites elliptiques, orientation spatiale) le résultat final reste le même que dans le cas le plus simple d'orbites circulaires, il peut paraître fastidieux de discuter toutes ces complications. Mais en réalité il n'en est rien. Avec l'apparition d'un champ magnétique extérieur la dégénérescence est levée par rapport au nombre quantique équatorial n_φ (ou magnétique m) : les orbites orientées différemment prennent des énergies différentes. Un calcul conduit conséquemment permet d'expliquer l'effet Zeeman normal. Puis, dans les atomes complexes possédant plusieurs électrons la perturbation du mouvement de l'électron périphérique par les autres électrons conduit à ce que dans l'expression de l'énergie de l'atome apparaît à côté du nombre quantique principal égal à la somme n_r+n_φ également le nombre quantique azimutal. Par suite, les niveaux d'énergie au même nombre quantique principal et aux nombres azimutaux différents, coïncidant dans le cas d'atomes à un seul électron, se clivent. Ce résultat permet d'expliquer les singularités des spectres des atomes complexes ne possédant qu'un seul électron de valence (éléments du premier groupe du système périodique Li, Na, K, etc.). On ne s'arrêtera pas sur le développement postérieur de la théorie de Bohr, car malgré ces succès indéniables dans nombre de cas particuliers elle n'a aujourd'hui qu'une signification historique. Les phénomènes déjà mentionnés (spectres des atomes complexes, effet Zeeman) reçurent une explication différente dans le cadre de faits de nature plus générale. On abordera cette explication au cours de l'exposé ultérieur.

§ 114. Principe de correspondance

Revenons maintenant à la question abordée au § 106 et, précisément, à la question des rapports mutuels entre les lois de la physique classique et quantique. Comme on l'a vu la non-égalité à zéro de la constante de Planck h conduit à ce que les grandeurs mécaniques caractérisant des systèmes de dimensions atomiques (énergie, moment cinétique) ne peuvent, en général, varier de façon continue et prennent une suite discrète de valeurs que les conditions quantiques permettent de choisir.

De façon analogue les lois de l'électrodynamique classique sont également inapplicables aux systèmes atomiques. En effet, d'après les lois de l'électrodynamique classique l'électron gravitant sur son orbite doit émettre des ondes électromagnétiques. Ce rayonnement engendre une perte d'énergie et par suite l'électron doit progressivement s'approcher du noyau. Au

contraire, les postulats quantiques exigent que le rayonnement ne se manifeste qu'au cas de transition d'une orbite stationnaire à l'autre. Ainsi donc, dans le modèle classique l'électron se précipite de façon continue vers le noyau suivant une orbite en spirale en rayonnant continuellement durant tout son trajet, tandis que dans le modèle de la mécanique quantique il descend par degrés de valeur finie en ne rayonnant que durant ces « sauts ».

Il existe cependant des conditions pour lesquelles les deux modèles fournissent les mêmes résultats. Supposons que la distance entre les niveaux successifs soit petite par rapport à la hauteur des niveaux eux-mêmes. Alors les « échelons » suivant lesquels s'effectue la descente seront très petits et la descente suivant ces échelons différera très peu d'un glissement continu vers le bas. Ce qui est bien le cas pour des grands nombres quantiques. En effet, examinons, par exemple, les niveaux d'énergie de Balmer :

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Comme l'énergie est négative, avec l'accroissement de n elle augmente. Puis de (100.5) pour le cas de $n \gg 1$ on trouve

$$\Delta E_n = \frac{mZ^2e^4}{\hbar^2 n^3}\Delta n.$$

Il en découle que pour des valeurs suffisamment grandes de n les niveaux voisins ($\Delta n = 1$) se disposent de façon serrée et le resserrement est d'autant plus grand que n est important. Si n est très grand, on aura pratiquement affaire à une suite continue de niveaux et la nature singulière discrète des processus quantiques est complètement estompée.

On verra maintenant que les résultats obtenus aux paragraphes précédents satisfont complètement à cette exigence. Commençons par l'atome hydrogénoïde et montrons que pour des grands nombres quantiques les fréquences de rayonnement calculées d'après les lois classiques et quantiques coïncident entre elles. Pour cela profitons des formules du § 107. En combinant les formules*)

$$a_n^2 \nu_n^* = \frac{n\hbar}{2\pi m} \tag{107.2}$$

et

$$a_n = \frac{n^2\hbar^2}{mZe^2}, \tag{107.3}$$

on trouve

$$\nu_n^* = \frac{mZ^2e^4}{2\pi\hbar^3 n^3}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

*) Rappelons que ν^* désigne la fréquence exprimée en s^{-1} à la différence de ν (nombre d'ondes) exprimé en cm^{-1}.

Cette formule donne la fréquence de rotation de l'électron sur sa n-ième orbite stationnaire. D'après l'électrodynamique classique on doit obtenir une fréquence identique pour le rayonnement électromagnétique. On a donc

$$\nu^*_{cl}=\nu^*_n=\frac{mZ^2e^4}{2\pi\hbar^3n^3}\,s^{-1}. \tag{114.1}$$

On récrira cette formule de façon plus compacte en profitant de l'expression de la constante de Rydberg :

$$R=\frac{me^4}{4\pi\hbar^3c}\,cm^{-1}. \tag{107.7}$$

La formule (114.1) peut maintenant être récrite sous la forme

$$\nu^*_{cl}=\frac{2RcZ^2}{n^3}\,s^{-1}. \tag{114.2}$$

La fréquence quantique au cours de la transition $n\to k$ se calcule, comme on le sait, avec la formule de Balmer et est égale à

$$\nu^*_{quan_i}=RcZ^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n^2}\right)s^{-1} \tag{114.3}$$

(le facteur c apparaît parce qu'on calcule la fréquence vraie en s^{-1} alors que R est habituellement exprimé en cm^{-1}).

A titre de comparaison avec (114.1) il est commode de donner à (114.3) la forme suivante :

$$\nu^*_{quan}=RcZ^2\frac{n^2-k^2}{k^2n^2}=RcZ^2\frac{(n-k)(n+k)}{k^2n^2}. \tag{114.4}$$

On voit que les expressions (114.2) et (114.3) pour ν^*_{cl} et ν^*_{quan} diffèrent fortement. Supposons, toutefois, que n est un grand nombre :

$$n\gg 1 \tag{114.5}$$

et soit de plus $n-k=1$; alors, par suite de (114.5), $k=n+1\approx n$. A cette condition (114.4) prend la forme

$$\nu^*_{quan}=\frac{2RcZ^2}{n^3}\quad\text{ou}\quad\frac{2RcZ^2}{k^3}. \tag{114.6}$$

Rapprochant (114.6) et (114.2) on voit que si les nombres quantiques sont grands, alors pour des transitions entre états quantiques voisins

$$\nu^*_{quan_i}=\nu^*_{cl}. \tag{114.7}$$

Si au cours de la transition le nombre quantique principal varie non pas de 1 mais de 2, 3, ... et en général de Δn à condition que $\Delta n\ll n$, alors

$$\nu^*_{quan_i}=\frac{2RcZ^2}{n^3}\Delta n=\nu^*_{cl}\Delta n\quad(\Delta n=2,\,3,\,\ldots),$$

c'est-à-dire que les fréquences $2\nu^*_{cl}$, $3\nu^*_{cl}$, ... émises au cours de ces transitions correspondront à la première, à la seconde et aux harmoniques plus élevés de la fréquence classique. Pour des petits nombres quantiques on

n'observe pas de telles coïncidences mais il *existe une correspondance* et à chaque harmonique classique on peut faire correspondre une fréquence quantique déterminée.

La relation entre les lois quantiques et classiques peut être encore exprimée sous une forme très nette de la façon suivante. Soit un système à un degré de liberté. La fréquence de rayonnement émis par ce système d'après les lois quantiques se détermine au moyen de la condition des fréquences $E_n - E_k \equiv \Delta E = h\nu$

$$\nu_{\text{quan}} = \Delta E/h. \tag{114.8}$$

Quant aux états stationnaires d'énergies E_k et E_n ils s'obtiennent par application de la condition quantique $\oint p\,dq = nh$. Désignant par I l'intégrale $\oint p\,dq$ ayant la dimension de l'action on a $I = nh$. Pour deux états stationnaires on obtient

$$I_k = kh, \quad I_n = nh$$

et

$$I_k - I_n \equiv \Delta I = (k-n)h.$$

Si $n-k=1$, c'est-à-dire si l'on examine des états voisins, alors $\Delta I = h$. Portant cette valeur dans (114.8) on a

$$\nu^*_{\text{quan}} = \frac{\Delta E}{\Delta I}. \tag{114.9}$$

Pour le calcul de l'expression correspondante de la fréquence classique on s'adressera au cas d'un oscillateur linéaire harmonique. L'énergie de l'oscillateur est égale à $E = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{p^2}{2m} + U$, d'où $p = \sqrt{2m(E-U)}$. L'intégrale d'action sera dans ce cas

$$I = \oint p\,dx = \oint \sqrt{2m(E-U)}\,dx.$$

Considérant l'énergie E comme un paramètre variant de façon continue cherchons la dérivée

$$\frac{dI}{dE} = \oint \frac{m}{\sqrt{2m(E-U)}}\,dx = \oint \frac{m}{p}\,dx = \oint \frac{dx}{v} = \oint \frac{dx}{dx/dt} = \oint dt = T,$$

où T est la période d'oscillation. On en tire l'expression remarquable suivante pour la fréquence classique

$$\nu^*_{\text{cl}} = 1/T = dE/dI. \tag{114.10}$$

On peut montrer que la relation (114.10) est vraie pour *tous* systèmes périodiques à un degré de liberté. Mais comme la démonstration générale exige l'utilisation d'un appareil mathématique supposé inconnu du lecteur on se limitera pour sa justification à des exemples particuliers présentés comme exercices à la fin de ce paragraphe.

Comparant (114.9) et (114.10) on aboutit au résultat suivant. Dans le cas de la théorie classique comme dans celui de la théorie quantique les fréquences peuvent être calculées comme des rapports de l'accroissement de l'énergie à l'accroissement de l'action, mais si dans le premier cas on prend des accroissements infiniment petits, on doit prendre dans le second des différences finies.

La figure 172 illustre fort bien ce fait. La courbe continue de ce dessin représente l'énergie comme fonction de l'intégrale d'action I. Les états quantiques correspondent seulement aux points de cette courbe qui répondent aux valeurs entières de l'action $I=1h$, $2h$, $3h$. Il est évident que la fréquence quantique $\Delta E/\Delta I$ sera égale à la tangente de l'angle de pente de la sécante réunissant deux points correspondant aux états quantiques, quant à la fréquence classique elle est égale à la tangente de la pente de la droite tangente à la courbe, de sorte que

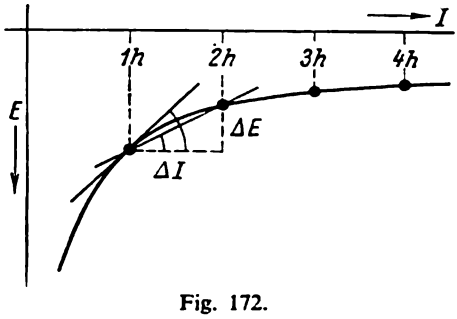


Fig. 172.

$$\nu_{cl}^{*}=dE/dI.$$

Dans ce cas pour des grands nombres quantiques, quand la différence entre la pente des tangentes et des sécantes disparaît, on a $\nu_{cl}=\nu_{quan}$.

Ce fait est également bien illustré au tableau XV où sont données les fréquences classiques de rotation pour deux valeurs entières voisines de n calculées à l'aide de la formule (114.2) et les fréquences quantiques associées calculées d'après la formule (114.3). On voit que les fréquences quantiques pour des n petits ne coïncident pas avec les fréquences classiques, mais se situent entre elles. Cependant la différence entre les fréquences classiques et quantiques diminue à mesure que n croît et pour des valeurs de n suffisamment grandes devient infiniment petite.

Le résultat obtenu peut être résumé de façon différente. De la formulation

Tableau XV

Etat initial	Etat final	Fréquence de rotation à l'état initial s^{-1}	Fréquence quantique s^{-1}	Fréquence de rotation à l'état final s^{-1}
$n=2$	$n=1$	$0{,}82\cdot10^{15}$	$2{,}47\cdot10^{15}$	$6{,}58\cdot10^{15}$
6	5	$3{,}04\cdot10^{13}$	$4{,}02\cdot10^{12}$	$5{,}26\cdot10^{13}$
10	9	$6{,}58\cdot10^{12}$	$7{,}71\cdot10^{12}$	$9{,}02\cdot10^{12}$
25	24	$4{,}21\cdot10^{11}$	$4{,}48\cdot10^{11}$	$4{,}76\cdot10^{11}$
101	100	$6{,}38\cdot10^{9}$	$6{,}48\cdot10^{9}$	$6{,}58\cdot10^{9}$
501	500	$5{,}23\cdot10^{7}$	$5{,}25\cdot10^{7}$	$5{,}26\cdot10^{7}$

générale des conditions quantiques donnée au § 106 il suit que la cause principale de la discontinuité des grandeurs mécaniques pour des systèmes extrêmement petits réside dans « l'atomisme » de l'action : il existe une grandeur minimale d'action égale à la constante de Planck $h=2\pi\hbar=$ $=6{,}62\cdot10^{-27}$ erg·s; elle est justement cet « atome » d'action. Si les dimensions du système et les masses des particules sont telles que l'action d'un tel système est comparable à h, la nature quantique du phénomène apparaît complètement; si, au contraire, l'action est si grande qu'on peut poser $h=0$, alors la discontinuité devient insensible et les lois de la mécanique classique doivent être satisfaites.

Ce résultat est un cas particulier du principe général qui joue un rôle important dans la physique théorique contemporaine et qui est appelé le *principe de correspondance*. Ainsi, par exemple, les formules de la mécanique de la théorie de la relativité restreinte se transforment automatiquement en des formules de la mécanique newtonienne pour $v\ll c$, c'est-à-dire si les vitesses sont si petites qu'on peut poser $c\to\infty$. Le principe de correspondance implique, en général, que toute théorie non classique dans le cas limite correspondant passe à la théorie classique.

Exercices : 1. Démontrer que la formule (114.10) s'applique à un rotateur, c'est-à-dire à une particule en rotation sur un cercle autour d'un centre immobile. (*Conseil.* L'intégrale d'action dans le cas d'un rotateur est $I=\oint p_\varphi\,d\varphi$, avec $p_\varphi=\sqrt{2EA}$, où A est le moment d'inertie.)

2. Utilisant la formule (100.5) donnant l'énergie d'un atome hydrogénoïde $E_n=$ $=-\dfrac{2\pi^2mZ^2e^4}{n^2h^2}=-\dfrac{2\pi^2mZ^2e^4}{I^2}$, où $I=nh$ est l'intégrale d'action, et supposant que I varie continûment calculer à l'aide de (114.10) la fréquence classique de rotation de l'électron sur la n-ième orbite et montrer que le résultat ainsi obtenu coïncide avec (114.2).

§ 115. Crise de la théorie de Bohr

La théorie de Bohr exposée dans ce chapitre fut un pas très important dans le développement de la théorie de la structure de l'atome. Elle montra de façon évidente l'inapplication de la physique classique aux phénomènes intra-atomiques d'une part et en second lieu le rôle primordial des lois quantiques pour les systèmes microscopiques. Elle fut le point de départ d'un grand nombre de travaux expérimentaux qui aboutirent à des résultats très importants; mais c'est son rôle heuristique qu'il faut le plus souligner : même dans les cas où la théorie s'est avérée incapable d'expliquer quantitativement tel ou tel groupe de phénomènes elle fournissait le fil directeur pour leur nette classification et leur interprétation qualitative. C'est ainsi, par exemple, que l'énorme quantité de faits spectroscopiques, aussi bien de nature atomique que moléculaire, grâce aux travaux d'une série de chercheurs parmi lesquels on doit citer les travaux importants du savant russe, l'académicien Rojdestvenski et des adeptes de son école, fut rassemblée en un système logique et clair.

A côté de ces aspects positifs et d'un grand nombre d'autres conséquences fort utiles la théorie présentait des défauts importants qui d'ailleurs furent évidents dès le début. Parmi ces défauts il faut avant tout mentionner les contradictions internes de la théorie. En effet, la théorie de Bohr ne fut ni conséquemment classique, ni conséquemment quantique. Suivant l'expression badine de Bragg, on devait utiliser le lundi, le mercredi et le vendredi les lois classiques et le mardi, le jeudi et le samedi les lois quantiques!

Il n'est pas étonnant qu'après les premiers succès de la théorie on a de plus en plus ressenti ses défauts. Même dans le cas le plus simple d'atomes hydrogénoïdes la théorie de Bohr n'a permis de calculer que les fréquences des raies spectrales, mais non pas leurs intensités. Pour le calcul des intensités il a fallu faire appel au principe de correspondance en l'étendant également aux petits nombres quantiques et en faisant les calculs suivant les principes de l'électrodynamique classique.

L'échec le plus flagrant fut celui des tentatives de formuler la théorie de l'atome neutre de l'hélium, de l'un de ces atomes les plus simples du système périodique suivant immédiatement l'atome d'hydrogène et composé de trois particules, du noyau et de deux électrons. Bien que le problème de trois corps n'ait pu être résolu de façon précise dans le cadre de la mécanique classique, on a depuis longtemps mis au point en mécanique céleste d'excellentes méthodes approximatives permettant d'obtenir des résultats de précision suffisante pour la confrontation avec l'expérience. Néanmoins, de nombreuses tentatives de construire la théorie de l'atome de l'hélium se sont soldées par un échec cuisant.

Actuellement, après la découverte des singulières propriétés ondulatoires de la matière, dont on abordera l'étude aux chapitre X, il est tout à fait évident que la théorie de Bohr qui s'appuie sur la mécanique classique ne pouvait constituer qu'une étape intermédiaire sur la voie de la création d'une théorie conséquente des phénomènes atomiques.

CHAPITRE IX

QUANTA DE LUMIÈRE

§ 116. Fluctuations du champ de radiation

Jusque-là on s'est intéressé aux manifestations singulières des lois quantiques au cours des *mouvements* des particules microscopiques. On a constaté entre autres que le processus d'émission de la lumière par l'atome s'effectuait de façon discontinue durant les transitions entre les différents états stationnaires, quant à la question de nature de l'énergie lumineuse on ne l'avait pas abordée. Or déjà en 1905 Einstein indiqua qu'il existait un grand nombre de faits expérimentaux ainsi que de fondements théoriques sérieux qui de façon inévitable conduisaient à la conclusion que le rayonnement lui-même était de nature discontinue. On commencera par l'exposé des considérations *théoriques* d'Einstein. Ces considérations se basent sur l'étude des vibrations aléatoires (fluctuations) de la densité de rayonnement.

Examinons tout d'abord un gaz matériel placé dans un récipient fermé de volume V. Isolons maintenant une certaine partie de ce volume $v<V$ et suivons en pensée, aux différents moments, les variations du nombre de molécules gazeuses se trouvant à l'intérieur de v. Du point de vue de la statistique moléculaire ce nombre n'est aucunement rigoureusement constant mais subit des variations. Soit $\bar{n}$ le nombre moyen de particules contenues dans le volume v. Si ce volume est suffisamment grand et le gaz y est à la pression normale, alors les écarts instantanés de ce nombre moyen n sont relativement si faibles que l'on peut, en général, les négliger. Diminuons maintenant ce volume v. Si en fin de compte on imagine ce volume si petit qu'il ne peut contenir qu'un nombre très réduit de particules (disons 10 en moyenne), les écarts aléatoires de la moyenne deviennent déjà suffisamment sensibles. Ces écarts aléatoires portent le nom de fluctuations. Leur étude constitue un des chapitres des plus intéressants et importants de la physique statistique contemporaine.

Smoloukhovski qui s'était beaucoup intéressé aux fluctuations avait, par exemple, étudié le problème suivant : quelle est la probabilité pour que toutes les molécules du gaz contenu dans le volume V se groupent dans une partie v de ce volume? Il n'est pas difficile de répondre à cette question*).

*) Voir l'Annexe IV à la fin du livre.

Si le volume V ne contenait qu'une molécule, la probabilité de la retrouver dans la partie v serait évidemment proportionnelle à v et égale à

$$w_1=\frac{v}{V}. \tag{116.1}$$

En effet, si $v=V$, alors $w_1=1$, ce qu'on devait avoir, car la présence de la molécule dans tout le volume V est un événement certain. Soit, toutefois, n le nombre de molécules indépendantes contenues dans le volume V. La probabilité de retrouver *une* de ces molécules dans la partie v de ce volume est exprimée par la formule (116.1); la probabilité d'y retrouver n molécules indépendantes d'après le théorème des probabilités composées est

$$w_n=\left(\frac{v}{V}\right)^n. \tag{116.2}$$

Cette formule montre que si, par exemple, $v=1/2\ V$, alors pour des valeurs quelque peu grandes de n la probabilité w_n égale à

$$w_n=\frac{1}{2^n}$$

est infiniment petite.

Einstein a étudié un problème analogue pour le cas de rayonnement. Soit un volume fermé V rempli de rayonnement noir à la température T. L'énergie de rayonnement de la bande de fréquences ν, $\nu+d\nu$, enfermée au sein de ce volume, est

$$E=V\varrho_\nu\, d\nu,$$

où ϱ_ν est la densité spectrale de rayonnement. Le problème consiste à calculer la probabilité de la concentration de toute l'énergie dans la partie v du volume. Utilisant la thermodynamique statistique ainsi que la formule de Wien pour la densité de rayonnement (*qui est vérifiée pour des hautes fréquences*)

$$\varrho_\nu\, d\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-h\nu/kT}\,d\nu,$$

Einstein trouva que la probabilité cherchée est égale à

$$w=\left(\frac{v}{V}\right)^{E/h\nu}.$$

En comparant ce résultat à la formule (116.2) on voit que le rayonnement de longueur d'onde suffisamment petite se conduit comme s'il aurait été composé de $n=E/h\nu$ corpuscules indépendants!

Einstein a par la suite examiné le problème des fluctuations de la densité de rayonnement. Supposons tout d'abord que le rayonnement soit réellement constitué d'« atomes » isolés de grandeur $h\nu$ qu'on appellera *photons*. Dans ce cas la densité de rayonnement sera égale au nombre de photons contenus dans l'unité de volume multiplié par $h\nu$. Mais le nombre de photons dans le volume choisi doit, comme le nombre de molécules, subir des variations aléatoires, des fluctuations. Déterminons tout d'abord la mesure de ces

fluctuations. Si $\bar{n}$ est le nombre moyen de particules contenues dans le volume v, alors n_k, nombre de particules se trouvant à l'instant considéré dans ce volume, sera en général différent de $\bar{n}$; il sera soit supérieur, soit inférieur à $\bar{n}$. L'écart de la moyenne

$$\Delta n_k = n_k - \bar{n}$$

sera donc ou positif, ou négatif et, d'autre part, aura des valeurs absolues différentes. Cependant la valeur moyenne de Δn ne peut servir de mesure de la fluctuation, car elle est évidemment égale à zéro

$$\overline{\Delta n} = \overline{(n_k - \bar{n})} = \bar{n} - \bar{n} = 0.$$

Il est donc plus commode d'utiliser en qualité de mesure de l'écart le carré $(n_k - \bar{n})^2$ qui est toujours positif. La valeur moyenne du carré de l'écart

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(n_k - \bar{n})^2}$$

est la mesure de la « dispersion » des valeurs isolées de n_k, de leur écart de la moyenne; $\overline{\varepsilon^2}$ est par suite appelé fluctuation quadratique ou dispersion. L'écart de la moyenne peut être également caractérisé par la racine carrée de $\overline{\varepsilon^2}$ prise avec le signe plus :

$$\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\overline{(n_k - \bar{n})^2}},$$

que les physiciens appellent erreur moyenne quadratique et les mathématiciens erreur normale. Toutes ces définitions s'appliquent évidemment non seulement au cas d'écarts du nombre de particules mais à toutes fluctuations aléatoires.

On démontre en statistique mathématique une loi fort simple s'appliquant à tout écart aléatoire et se formulant ainsi : si la valeur moyenne des grandeurs variant aléatoirement est $\bar{n}$, alors la fluctuation quadratique $\overline{\varepsilon^2}$ est aussi égale à $\bar{n}$*) et, par suite, l'écart moyen quadratique $\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\bar{n}}$. Le sens de cette loi s'éclaircit par des exemples numériques. Soit $\bar{n}$ comme auparavant le nombre moyen de *particules*. Si $\bar{n} = 100$, alors $\overline{\varepsilon^2}$ est aussi égal à 100 et $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10$, autrement dit, la variation du nombre de particules constitue en moyenne 10 % de leur nombre; mais si $\bar{n} = 10^{10}$, alors $\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10^5$ ou 10^{-3} % $\bar{n}$, et pour $\bar{n} = 10^{20}$ on a $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10^{10}$ ou 10^{-8} % $\bar{n}$.

Si l'on s'intéresse aux variations de l'énergie, alors en admettant que l'énergie est consituée d'atomes isolés de grandeur $h\nu$ on a $\bar{E} = \bar{n}h\nu$ et par suite

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\Delta E^2} = \overline{\Delta n^2}(h\nu)^2 = (\bar{n} \cdot h\nu)h\nu = \bar{E} \cdot h\nu. \qquad (116.3)$$

Les fluctuations d'énergie sont toutefois possibles également au cas où le rayonnement est de nature ondulatoire. En effet, dans ce cas on considère

*) Voir l'Annexe IV à la fin du livre.

que la cavité V est sillonée dans toutes les directions par des ondes électromagnétiques. Parmi ces ondes il se trouve des ondes proches en direction et en fréquence qui interfèrent entre elles. Or comme les directions et les phases de ces ondes varient de façon aléatoire, il s'ensuit que le résultat de ces interférences varie également de façon désordonnée : la distribution des maximums et des minimums dans l'espace et le temps ne reste pas constante. C'est justement pourquoi on appelle ces ondes incohérentes. Les instruments macroscopiques utilisés fournissent des résultats moyens du phénomène d'interférence en continuelle variation et donnent l'impression que les interférences n'ont pas lieu. Or du point de vue microscopique on est dans ce cas en présence d'un cas typique de fluctuations d'énergie.

L'amplitude au point donné résultant de l'interférence d'ondes d'amplitudes a_1 et a_2 varie de la valeur maximale a_1+a_2 à la valeur minimale a_1-a_2. Mais en même temps varie également l'énergie de $(a_1+a_2)^2$ à $(a_1-a_2)^2$ en passant par des valeurs intermédiaires suivant la différence de phase; en moyenne elle est égale à $a_1^2+a_2^2$. Puisque la valeur moyenne de l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude, la fluctuation quadratique de l'énergie est proportionnelle à la quatrième puissance de l'amplitude, c'est-à-dire au carré de l'énergie. Le calcul précis*) donne pour $\overline{\varepsilon^2}$ la formule suivante :

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{c^3}{8\pi\nu^2 V\,d\nu}\overline{E^2}. \tag{116.4}$$

La thermodynamique statistique permet de trouver l'expression de la fluctuation quadratique de l'énergie sans l'aide des images sensibles utilisées jusque-là. Et précisément, sur la base de principes les plus généraux de la statistique physique (distribution de Gibbs) on obtient pour la fluctuation quadratique de l'énergie la formule suivante**) :

$$\overline{\varepsilon^2}=kT^2\frac{d\bar{E}}{dT}. \tag{116.5}$$

Mais comme $\bar{E}=V\varrho_\nu\,d\nu$, alors suivant la formule utilisée pour la densité d'énergie on obtient par le calcul des résultats différents.

On sait que dans le domaine des hautes fréquences la formule de Wien se justifie complètement :

$$\varrho_\nu\,d\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-h\nu/kT}\,d\nu,$$

tandis que dans le domaine des basses fréquences il est possible d'utiliser la formule de Rayleigh-Jeans :

$$\varrho_\nu\,d\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\,d\nu$$

*) Ce calcul est assez compliqué, c'est pourquoi on ne l'a pas donné ici. Ceux qui veulent satisfaire leur curiosité peuvent s'adresser au livre de H. A. Lorentz, *Les théories statistiques en thermodynamique*, conférences faites au Collège de France en novembre 1912, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner Libraire-Editeur, 1916.

**) Voir sa déduction dans l'Annexe IV à la fin du livre.

qui pour des longueurs d'ondes suffisamment grandes fournit des résultats coïncidant avec ceux des expériences; enfin la formule de Planck

$$\varrho_\nu\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3\, d\nu}{c^3}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

donne des résultats corrects *pour tout le spectre.*

Calculons maintenant $\overline{\varepsilon^2}$ à l'aide de la formule (116.5) en utilisant successivement les trois lois de distribution de l'énergie $\varrho_\nu\, d\nu$.

Commençons par la formule de Wien. Dans ce cas on a

$$\bar{E} = V\,\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,e^{-h\nu/kT}\,d\nu,$$

$$\frac{d\bar{E}}{dT} = V\,\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{h\nu}{kT^2}\,e^{-h\nu/kT}\,d\nu = \frac{h\nu}{kT^2}\,V\varrho_\nu\,d\nu = \frac{h\nu}{kT^2}\,\bar{E}.$$

Portant dans (116.5) il vient

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu\cdot\bar{E}, \tag{116.6}$$

c'est-à-dire la formule (116.3). Ceci montre que le rayonnement obéissant à la formule de Wien se conduit en effet comme un ensemble d'« atomes rayonnants ».

Examinons maintenant un autre cas extrême : prenons pour la densité de rayonnement la formule de Rayleigh-Jeans. On a

$$\bar{E} = V\,\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,kT\,d\nu,$$

$$\frac{d\bar{E}}{dT} = V\,\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,k\,d\nu$$

et

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2\,\frac{d\bar{E}}{dT} = k^2T^2V\,\frac{8\pi\nu^2}{c^2}\,d\nu. \tag{116.7}$$

Comme dans ce cas

$$\bar{E} = V\varrho_\nu\,d\nu = V\,\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,kT\,d\nu,$$

il est facile de ramener (116.6) à la forme

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V\,d\nu}\,\overline{E^2} \tag{116.8}$$

qui constitue un résultat coïncidant avec la formule (116.4) obtenue sur la base de l'hypothèse de la nature ondulatoire du rayonnement.

On voit ainsi que la statistique conduit au résultat singulier suivant : dans le domaine des ondes courtes (domaine d'application de la loi de Wien) le rayonnement se conduit comme un ensemble de particules, de photons; dans le domaine des ondes longues où agit la formule de Rayleigh-Jeans il doit se comporter comme des ondes. Or, les deux lois de rayonnement utilisées sont des lois limites. Prenons enfin la formule de Planck valable

pour toutes les longueurs d'ondes et calculons au moyen de cette formule, en utilisant toujours la formule statistique (116.5), la fluctuation quadratique. Dans ce cas

$$\bar{E}=V\frac{8\pi h\nu^3\,d\nu}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

Pour calculer $\overline{\varepsilon^2}$ il faut rechercher la dérivée $d\bar{E}/dT$. Désignant pour simplifier

$$\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}=f$$

on a

$$\frac{df}{dT}=\frac{h\nu}{kT^2}\cdot\frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2}.$$

Par un calcul direct il est facile de se convaincre que

$$\frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2}=f+f^2.$$

En se guidant de ces remarques le lecteur obtiendra facilement pour $\overline{\varepsilon^2}$ la formule suivante composée de deux termes :

$$\overline{\varepsilon^2}=h\nu\bar{E}+\frac{c^3}{8\pi\nu^2\,d\nu V}\overline{E^2}. \qquad (116.9)$$

Le premier terme correspond à la formule (116.6), c'est-à-dire à la conception corpusculaire de la nature de la lumière. Le second terme correspond à la formule (116.8) et par suite à la conception purement ondulatoire. On aboutit ainsi à une conclusion étonnante que la lumière doit avoir deux aspects : corpusculaire et ondulatoire. Le premier se manifeste de façon particulièrement nette dans la partie du spectre correspondant aux ondes courtes et le second dans celui des ondes longues. Aucun de ces aspects ne peut fournir un modèle complet de la nature de la lumière; seul leur union permet d'expliquer complètement toutes ses manifestations.

Dans ce chapitre on s'intéressera exclusivement à l'aspect corpusculaire de la lumière. On doit se convaincre qu'il existe un grand nombre de faits dont l'explication est directement fournie si l'on considère la lumière comme un flux de photons. Quant aux phénomènes traduisant l'aspect ondulatoire de la lumière (interférence, diffraction) ils sont déjà suffisamment connus de l'optique classique.

§ 117. Effet photoélectrique et relation d'Einstein

Au nombre de phénomènes où apparaît la nature corpusculaire de la lumière appartient avant tout le phénomène de libération des électrons sous l'influence de la lumière ou l'effet photoélectrique.

En 1888 Heinrich Hertz a remarqué que le passage de l'étincelle entre deux boules en zinc de l'éclateur est énormément facilité si l'une d'elles est éclairée par une lumière ultraviolette. Ce phénomène a été étudié en

détail dans les travaux classiques du physicien russe A. Stolétov qui a mis au point une méthode d'investigation de l'effet photoélectrique (condensateur de Stolétov) et a établi une série de régularités importantes. Il apparut que ce phénomène était le résultat de la suppression de l'électricité *négative* à la surface du métal sous l'effet de la lumière ultraviolette. Des études postérieures permirent d'élucider l'essence de l'effet photoélectrique en montrant qu'il consistait en un phénomène de libération des *électrons*. Ceci fut montré de façon particulièrement élégante et claire par le physicien soviétique A. Ioffé dans des expériences sur l'effet photoélectrique avec des grains de poussière métalliques. Des particules microscopiques de métal détachées des électrodes entre lesquelles s'établit un arc électrique étaient introduites dans un condensateur. La différence de potentiel entre les armatures du condensateur était choisie de façon à maintenir en équilibre un de ces grains de poussière dans le champ visuel du microscope. Eclairé aux rayons ultraviolets ce grain de poussière modifiait sa charge de temps en temps en perturbant l'équilibre : en recherchant de nouveau un potentiel convenable on ramenait le grain de poussière au centre du champ visuel. Connaissant les potentiels d'équilibre on pouvait calculer la grandeur de la charge perdue chaque fois par le grain de poussière (voir § 3). Il apparut que cette charge constituait toujours un multiple entier de la charge de l'électron.

L'explication qualitative de l'effet photoélectrique du point de vue de la théorie ondulatoire ne présente pas de difficulté à *première vue*. En effet, cette explication pouvait être formulée de la façon suivante : une onde électromagnétique incidente engendre une oscillation forcée des électrons dans le métal; en cas de résonance entre la période propre des oscillations de l'électron et la période de l'onde incidente l'amplitude des oscillations de l'électron devient si grande qu'il peut quitter le métal. Il est évident que si cette vision est juste, alors l'énergie cinétique avec laquelle l'électron quitte le métal doit être empruntée à l'onde incidente et il est naturel de s'attendre que l'énergie du photoélectron présente des liaisons directes avec l'intensité de la lumière incidente. Or, dans la pratique, de nombreuses expériences ont montré que l'énergie des photoélectrons est *complètement indépendante* de l'intensité de la lumière : avec l'augmentation de l'intensité c'est le *nombre* de photoélectrons qui s'élève en quantité rigoureusement proportionnelle à l'intensité et non pas leur vitesse. Cette dernière ne dépend que de la fréquence de la lumière incidente et, précisément, avec l'accroissement de la fréquence l'énergie des photoélectrons augmente aussi *linéairement*.

Toutes ces régularités de l'effet photoélectrique paraissent incompréhensibles du point de vue de la nature ondulatoire de la lumière. On a tenté d'expliquer l'indépendance de l'énergie des photoélectrons de l'intensité de la lumière en attribuant à la lumière le rôle de la « gâchette », autrement dit en supposant que l'électron accumulait de l'énergie non pas aux dépens de l'onde incidente, mais aux dépens des mouvements thermiques dans le métal, de sorte que le rôle de la lumière se réduisait à la libération des

électrons. Mais dans ce cas il reste complètement incompréhensible l'influence de la fréquence de la lumière et, en outre, si ce serait vrai, l'effet photoélectrique aurait dû fortement dépendre de la température du métal, ce qui n'a pas lieu en réalité.

Einstein a montré que toutes ces difficultés disparaissaient quand on considérait la lumière comme un flux de photons de grandeur $h\nu$, c'est-à-dire si l'on se plaçait sur le point de vue purement corpusculaire. La vision qualitative du mécanisme de l'effet photoélectrique est de ce point de vue la suivante : le photon une fois absorbé transmet son énergie à l'électron et si cette énergie est suffisante pour que l'électron s'arrache des liaisons qui le retiennent, il s'échappera des limites de la surface du métal. Comme la probabilité de l'absorption simultanée de deux photons par un même électron est très faible, chaque électron libéré n'emprunte son énergie qu'à un *seul photon* (le phénomène inverse, en général, ne se produit pas, c'est-à-dire que chaque photon absorbé ne libère pas nécessairement un électron).

C'est pourquoi le *nombre* de photoélectrons libérés doit être proportionnel au nombre de photons absorbés, c'est-à-dire proportionnel à l'intensité de la lumière (loi de Stolétov). Mais l'*énergie* du photoélectron ne dépend que de l'énergie du photon absorbé; cette dernière est égale à $h\nu$ d'où il suit que l'énergie du photoélectron doit dépendre linéairement de la fréquence et non pas de l'intensité (nombre de photons).

Le bilan énergétique de l'absorption du photon peut être exprimé dans le cas le plus général par la simple équation suivante qu'on appelle habituellement relation d'Einstein :

$$h\nu = P_1 + P_2 + eV. \tag{117.1}$$

P_1 est ici l'énergie d'arrachement de l'électron de l'atome (énergie d'ionisation); P_2 est le travail nécessaire pour arracher l'électron de la surface du corps et eV l'énergie cinétique du photoélectron libéré.

Les métaux ont ceci de particulier qu'ils possèdent un grand nombre d'électrons libres; c'est pourquoi pour des métaux P_1 peut être pris égal à zéro. Mais pour quitter la surface du métal l'électron doit surmonter un champ grâce auquel les électrons sont pour ainsi dire bouclés à l'intérieur du métal comme dans une boîte. Le travail dépensé à surmonter ce champ est justement le travail d'extraction P_2. Ainsi donc, pour les métaux la relation d'Einstein prend la forme

$$h\nu = eV + P_2. \tag{117.2}$$

Il est évident que si $h\nu < P_2$, l'électron ne pourra quitter la surface du métal. Cela signifie qu'il existe une fréquence minimale $h\nu_0 = P_2$ encore capable de produire l'effet photoélectrique; pour des fréquences inférieures il ne s'observe pas (limite rouge de l'effet photoélectrique).

La nécessité de dépenser du travail pour libérer l'électron du métal n'apparaît pas seulement dans le cas de l'effet photoélectrique, mais aussi au cas d'émission d'électrons par des corps chauffés (émission thermio-

nique). Le travail d'extraction peut être déterminé expérimentalement sans recourir à l'effet photoélectrique et précisément au moyen de l'étude de l'émission thermionique. Il est de l'ordre de quelques électrons-volts.

Au tableau XVI on donne quelques exemples de valeurs du travail d'extraction.

Tableau XVI

Métal	Travail d'extraction (en électrons-volts)	Métal	Travail d'extraction (en électrons-volts)
Li	2,4	W	4,5
Na	2,1	Pd	5,0
K	2,0	Pt	6,3
Cs	0,7		

Il faut noter que la grandeur du travail d'extraction est fortement influencée par l'état de la surface du métal et tout particulièrement par la présence d'une pellicule de gaz adsorbé. Les chiffres donnés au tableau se rapportent aux métaux aux surfaces dégazées.

Connaissant le travail d'extraction on peut calculer la longueur d'onde de la limite rouge de l'effet photoélectrique, λ_0 :

$$P_2 = h\nu_0 = hc/\lambda_0.$$

Ces calculs montrent que pour des métaux alcalins λ_0 appartient au spectre visible (par exemple, pour le potassium $\lambda_0 = 0{,}6$ μm) et pour le tungstène, le platine et les autres métaux avec un travail d'exctraction de l'ordre de 5 à 6 eV, à l'ultraviolet (par exemple, pour le tungstène $\lambda_0 = 0{,}27$ μm).

Exercice. Calculer les longueurs d'ondes de la limite rouge pour tous les métaux donnés au tableau XVI.

§ 118. Vérification expérimentale de la relation d'Einstein

La relation d'Einstein admet une vérification expérimentale. D'après (117.2) entre la fréquence de la lumière incidente et l'énergie des photoélectrons eV arrachés il doit exister une liaison linéaire. Ainsi, en créant l'effet photoélectrique au moyen des longueurs d'ondes variées et en mesurant l'énergie des photoélectrons libérés on peut s'assurer de la justesse de la relation d'Einstein et, en outre, déterminer la valeur numérique de h d'après la tangente de l'angle de pente de la droite obtenue.

Pour mesurer l'énergie des photoélectrons on a recours dans la plupart des cas à la méthode du « potentiel ralentisseur » décrite au § 91.

Si tous les électrons libérés possédaient une même vitesse, la variation de l'intensité du courant photoélectrique en fonction du potentiel ralentisseur, serait représentée par la courbe de la figure 173 : tant que le potentiel ralentisseur n'atteigne pas une certaine valeur $V = V_g$ l'intensité du courant

reste indépendante du potentiel. Pour $V=V_g$ le courant devient aussitôt égal à zéro. C'est justement ce potentiel V_g pour lequel l'énergie cinétique de l'électron est égal au travail que ce dernier doit effectuer pour vaincre le champ ralentisseur

$$\frac{1}{2}mv^2=eV_g.$$

Ainsi donc, ce potentiel limite V_g sert de mesure de l'énergie du photoélectron : elle est égale à eV_g électrons-volts.

Dans la réalité cette chute brusque du courant ne s'observe jamais. La courbe de variation du courant en fonction du potentiel ralentisseur a en général la forme représentée à la figure 174.

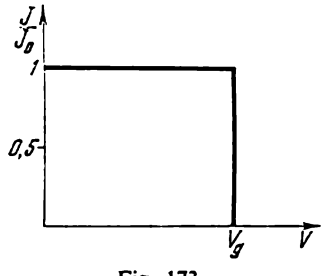


Fig. 173

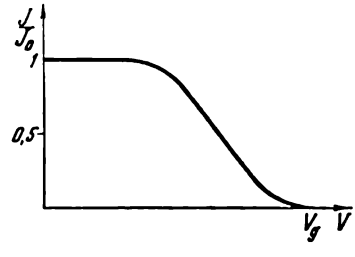


Fig. 174.

La chute progressive du courant s'explique par le fait que les électrons sont libérés non pas à une vitesse déterminée, mais qu'il existe un ensemble continu de vitesses. Dans ce cas la courbe de la figure 174 qui est une caractéristique courant-tension permet de retrouver la distribution des électrons suivant les énergies. Pour cela il faut effectuer la dérivation graphique de la caractéristique courant-tension comme cela fut déjà expliqué au § 91. Cependant en vérifiant expérimentalement la relation d'Einstein on s'est préoccupé non pas de la distribution des électrons en fonction de l'énergie, mais de l'énergie *maximale* qui est précisément l'énergie de libération des photoélectrons quittant la surface du métal.

Deux circonstances freinent l'obtention de résultats précis. En premier lieu, la courbe expérimentale J/J_0, fonction de V_g, ne coupe pas l'axe des abscisses comme c'est montré sur la figure 174, mais s'en approche asymptotiquement, ce qui fait que le potentiel ralentisseur maximal se trouve en quelque sorte indéterminé. En second lieu, comme dans toutes les expériences analogues, la différence de potentiel de contact, difficile à déterminer avec précision, produit un déplacement de toute la courbe.

L'inévitable présence de cette différence de potentiel de contact difficilement évaluée, toute une série d'autres difficultés expérimentales et de nombreuses sources d'erreurs expliquent pourquoi la vérification rigoureuse de la relation d'Einstein n'a pu être obtenue immédiatement. Après plusieurs travaux préparatoires, ayant suscité de nombreuses objections, Millikan

est arrivé au moyen d'une installation ingénieuse mais fort compliquée à trouver la preuve expérimentale recherchée ainsi qu'à déterminer avec précision h.

Actuellement, grâce aux perfections de la technique du vide poussé et à l'utilisation de la méthode commode du condensateur sphérique les mesures se sont grandement simplifiées. L'avantage de la méthode du condensateur sphérique mis au point pour la première fois par P. Loukirski et utilisée pour la vérification expérimentale de la relation d'Einstein par P. Loukirski et S. Priléjaev consiste dans le fait que vu les singularités du mouvement des électrons dans le champ d'un tel condensateur, la courbe du courant tombe brusquement à zéro en fonction du potentiel ralentisseur, de sorte que le potentiel ralentisseur maximal peut être déterminé de façon très précise.

Sur la figure 175 on a représenté le schéma de montage de l'expérience. Ici L est la source de lumière (tube à mercure en quartz), FM le monochromateur à quartz ne laissant passer qu'une seule raie du spectre. Par l'ouverture quartzique A la lumière pénètre à l'intérieur de la sphère en verre S argentée de l'intérieur et qui sert d'armature extérieure au condensateur. Une bille métallique N en métal étudié joue le rôle de l'armature

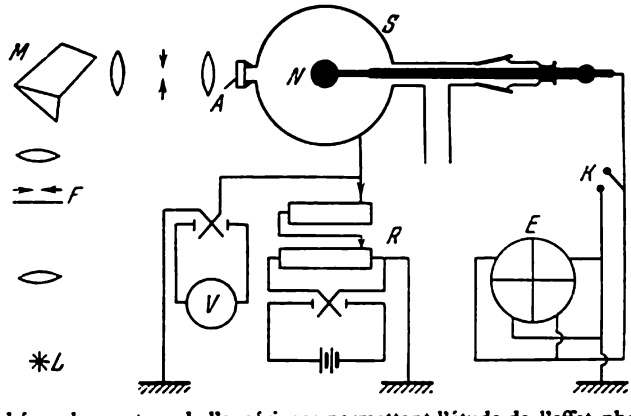


Fig. 175. Schéma de montage de l'expérience permettant l'étude de l'effet photoélectrique par la méthode du condensateur sphérique

intérieure et est éclairée par une lumière monochromatique. Un potentiomètre R permet d'appliquer à l'armature du condensateur S un potentiel approprié mesuré au voltmètre V. Pour mesurer l'intensité du courant photoélectrique on utilisa la « méthode de charge » : à mesure que de la bille N se libéraient des électrons le potentiel positif de la bille augmentait. La vitesse d'accroissement du potentiel de la bille mesurée à l'aide de l'électromètre à quadrants E servait de mesure de l'intensité du courant photoélectrique. Pratiquement pour caractériser la vitesse de la mise en charge on mesurait la déviation de l'électromètre durant un certain intervalle de

temps (de 1,5 à 2 minutes). Sur la figure 176 on donne trois courbes obtenues au cours de l'éclairement de la bille de zinc par les longueurs d'ondes : *1* — 2302 Å, *2* — 2537 Å et *3* — 3130 Å. La descente des courbes débutait pour un même potentiel indépendamment de la longueur d'onde. Ce potentiel est justement égal à la différence de potentiel de contact qui est ainsi déterminée sans recourir à des mesures spéciales. Si à l'aide de ces courbes on trouve l'énergie maximale des photoélectrons et on construit

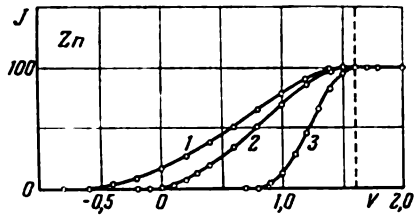


Fig. 176. Effet photoélectrique obtenu par éclairement du zinc

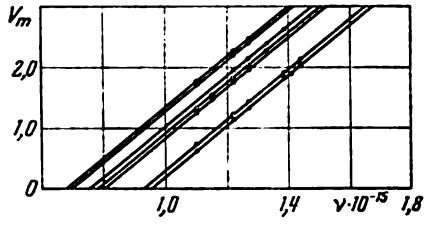


Fig. 177.

le graphique des variations de cette énergie en fonction de la fréquence, on obtient les droites représentées à la figure 177. On confirme la liaison linéaire entre $h\nu$ et eV; la tangente de l'angle de pente de ces droites est égale à h/e de sorte qu'une fois l'angle de pente déterminé on peut calculer h connaissant e.

§ 119. Longueur d'onde limite du spectre continu de rayons X

Si l'énergie de liaison des électrons intérieurs est de beaucoup inférieure à l'énergie du photon $h\nu$ engendrant l'effet photoélectrique, alors dans la relation d'Einstein on peut négliger la quantité P_2 et la quantité P_1 par rapport à $h\nu$. Dans ce cas la relation d'Einstein prend la forme la plus simple

$$h\nu = eV. \tag{119.1}$$

Si cette relation est lue de gauche à droite, elle montre quelle est l'énergie de l'électron libéré par le photon $h\nu$. Si maintenant on la lit de droite à gauche, elle traduit qu'aux dépens de l'électron d'énergie eV on obtient un photon $h\nu$. Ce processus de transformation de l'énergie de l'électron rapide en énergie du photon constitue le phénomène d'apparition des rayons X par freinage des électrons. En réalité le mécanisme du phénomène n'est pas si simple, car au cours du freinage des électrons apparaît tout un spectre continu de rayons X. Cependant la relation d'Einstein exige sans contestation que l'énergie maximale des photons ainsi obtenus satisfasse à la condition (119.1).

L'expérience montre que la distribution de l'énergie dans un spectre continu de rayons X prend la forme représentée à la figure 178 où est donnée une série de spectres continus pour des potentiels différents appliqués aux

électrodes d'un tube de Rœntgen à anticathode en tungstène. Chacun de ces spectres est brusquement coupé du côté des ondes courtes (hautes fréquences). On a trouvé empiriquement que la longueur d'onde ν_{min} associée à la limite quantique est liée au potentiel appliqué par la relation

$$\lambda_{min}V=\text{const}, \tag{119.2}$$

qui est évidemment identique à la relation d'Einstein (119.1). En effet, en remplaçant dans (119.1) ν par c/λ on obtient

$$\lambda_{min}V=ch/e=\text{const}. \tag{119.3}$$

La relation (119.3) peut être appliquée pour la détermination de h; les valeurs ainsi obtenues sont les plus certaines.

§ 120. Détermination précise de la constante de Planck

Comme les lois quantiques d'échange d'énergie s'observent dans un grand nombre de phénomènes, il existe une multitude de procédés pour calculer h d'après des données expérimentales. Indiquons avant tout que les lois de rayonnement d'un corps noir offrent déjà une telle possibilité. Par exemple, dans les formules de Planck et de Wien exprimées en longueur d'onde entre la constante $c_2=hc/k$. La détermination expérimentale de cette constante donne

$$c_2=1{,}4384 \text{ cm·degrés},$$

d'où, en utilisant les valeurs de c et de k :

$c=2{,}99793\cdot10^{10}$ cm·s^{-1},

$k=1{,}3806\cdot10^{-16}$ erg·degrés^{-1},

on obtient

$$h=6{,}558\cdot10^{-27} \text{ erg·s}.$$

De manière plus directe h peut être obtenu en utilisant l'effet photoélectrique. En effet, la pente des droites de la figure 177 donne h/e de sorte que la précision de la détermination de h par cette voie dépend toujours, indépendamment de la précision de l'expérience, de la rigueur de la détermination de la constante e, tandis que dans la méthode examinée plus haut il fallait connaître encore deux constantes c et k. La méthode de l'effet photoélectrique donne

$$h=6{,}547\cdot10^{-27} \text{ erg·s}.$$

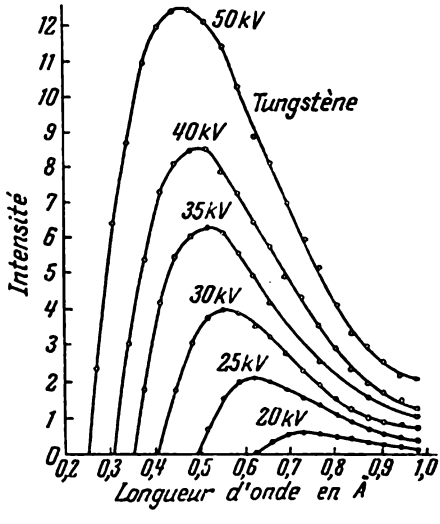


Fig. 178. Longueur d'onde limite du spectre continu de rayons X pour des potentiels différents

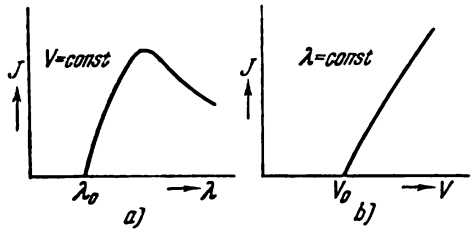


Fig. 179. *a)* Courbe de distribution d'énergie dans le spectre continu de rayons X. *b)* Ligne isochromatique

La méthode la plus précise de détermination de h est celle qui se base sur la détermination de la limite quantique du spectre de rayons X. La détermination s'effectue soit d'après les courbes semblables à celles représentées à la figure 178, autrement dit d'après la distribution de l'énergie dans le spectre pour un potentiel constant (fig. 179, *a*), soit à l'aide de la méthode des « lignes isochromatiques ». La méthode des « lignes isochromatiques » est la suivante : un spectromètre de rayons X est réglé de façon que dans la chambre d'ionisation ne pénètrent que des rayons de même longueur d'onde bien déterminée et on mesure l'intensité suivant le potentiel appliqué au tube. Sur la base de la relation d'Einstein

$$eV=h\nu=hc/\lambda,$$

la longueur d'onde choisie n'apparaît que pour un potentiel rigoureusement déterminé $V_0=hc/\lambda e$; avec l'accroissement du potentiel l'intensité augmente suivant une courbe, dite « isochromatique » (fig. 179, *b*). La différence entre la méthode de détermination de λ_{min} à partir de la courbe spectrale et la méthode des lignes isochromatiques est illustrée à la figure 179. Quelques lignes isochromatiques types sont données à la figure 180. En extrapolant chacune des courbes jusqu'à leur intersection avec l'axe des abscisses on trouve V_0 puis à l'aide de la relation d'Einstein on obtient également h. Les mesures les plus précises réalisées ces derniers temps ont donné

$$\frac{h}{e}=(1{,}37920\pm 0{,}00009)\cdot 10^{-17}\ \text{erg}\cdot\text{s U.E.S. C.G.S.}^{-1}.$$

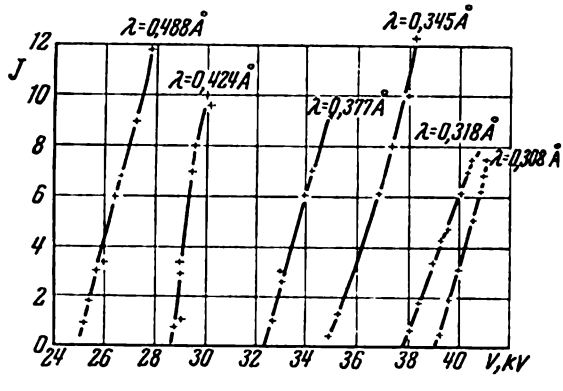


Fig. 180. Exemples de lignes isochromatiques

D'où en posant $e=4{,}8030\cdot10^{-10}$ U.E.S. C.G.S. on trouve

$$h=6{,}626\cdot10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s}.$$

Et, par suite, pour $\hbar=h/2\pi$ on obtient la valeur donnée à la page 317 :

$$\hbar=\frac{h}{2\pi}=\frac{6{,}626\cdot10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s}}{2\pi}=1{,}054\cdot10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s}.$$

§ 121. Autres expériences dégageant la nature corpusculaire de la lumière

Au § 116 on a vu que la nature corpusculaire de la lumière devait se manifester le plus nettement dans les expériences avec les rayonnements à ondes courtes. Ce n'est pas par hasard que les propriétés ondulatoires des rayons X ne furent définitivement décelées que 17 ans après la découverte des rayons eux-mêmes.

De nombreuses expériences avec les rayons X et le rayonnement γ dégageant le plus nettement la nature corpusculaire de ces rayons on n'examinera que deux : la première fut effectuée par A. Ioffé et N. Dobronravov, la seconde par Bothe.

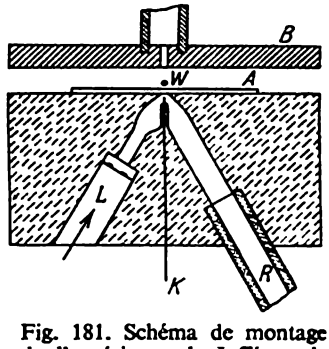


Fig. 181. Schéma de montage de l'expérience de Ioffé et de Dobronrarov

Sur la figure 181 on a représenté schématiquement un tube de Rœntgen miniaturisé utilisé dans les expériences de Ioffé et de Dobronravov. Dans une plaque épaisse en ébonite on a pratiqué deux ouvertures R et L. Par R de la cavité formée on aspirait l'air; par L bouché par une fenêtre en quartz on éclairait à la lumière ultraviolette l'extrémité d'un fil en aluminium K d'une épaisseur de 0,2 mm. Les électrons arrachés de cette façon étaient accélérés par un potentiel de 12 000 V appliqué au fil K, puis freinés par une mince feuille en aluminium A fermant par le haut la cavité. Cette feuille était si mince ($5\cdot10^{-3}$ mm d'épaisseur) qu'elle n'absorbait pratiquement pas les rayons X se formant par ralentissement des électrons. L'éclairement du fil était choisi suffisamment faible pour que le nombre de photoélectrons émis soit de 1000 par seconde et, par suite, le nombre d'impulsions X soit de l'ordre de 1000 par seconde.

La feuille en aluminium A servait en même temps d'armature inférieure au condensateur de Millikan AB dans lequel était maintenu en équilibre un grain de poussière microscopique de bismuth de rayon $3\cdot10^{-5}$ cm environ à la distance d'à peu près 0,02 cm de l'anticathode A.

L'expérience a montré que de temps en temps l'équilibre du grain de poussière était rompu, autrement dit que les rayons X en arrachaient un photoélectron ayant acquis une énergie, suivant la relation d'Einstein,

de l'ordre de 12 000 eV. Cela se produisait, en moyenne, toutes les 30 minutes. Durant ces 30 minutes le grain de poussière était traversé par environ $1{,}8 \cdot 10^6$ impulsions X. Si l'énergie de ces impulsions se propageait sous forme d'ondes sphériques, alors chacune d'entre elles transmettrait au grain de poussière une très faible partie de son énergie, par suite de la faible grandeur de l'angle solide sous lequel ce grain était vu de l'anticathode. D'autre part, cette énergie se répartirait entre un grand nombre d'électrons composant le grain de poussière et il serait complètement improbable qu'une fois toutes les 30 minutes tous ces électrons transmettent leur énergie par un mécanisme inconnu à un seul électron qui aurait dû acquérir autant d'énergie qu'en posédait le photoélectron arraché du fil et accéléré par le potentiel de 12 000 V.

Donc du point de vue de la théorie ondulatoire les résultats obtenus par les expériences de Ioffé et de Dobronravov sont incompréhensibles. Au contraire, du point de vue corpusculaire ils paraissent tout à fait naturels.

En effet, de ce point de vue l'énergie se propage sous forme de photons localisés dans l'espace et l'électron est arraché au grain de poussière seulement quand le photon le percute. Calculons la probabilité de la collision du photon avec le grain de poussière. Dans les expériences de Ioffé et de Dobronravov la distance du grain de poussière à l'anticathode était $d = 0{,}02$ cm et le rayon du grain $r = 3 \cdot 10^{-5}$ cm. La sphère de rayon d a pour surface $4\pi d^2 = 4\pi(0{,}02)^2 = 16\pi \cdot 10^{-4}$ cm^2. L'aire occupée par le grain de poussière sur cette sphère, c'est-à-dire la section efficace du grain, sera

$$\pi r^2 = \pi(3 \cdot 10^{-5})^2 = 9\pi \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2.$$

Si l'on admet que pour le mouvement d'un photon Rœntgen toutes les directions sont équiprobables, alors il est évident que la probabilité pour que le photon percute le grain de poussière sera égale au rapport de la section efficace du grain de poussière à la surface de la sphère, c'est-à-dire sera égale à $\frac{9\pi \cdot 10^{-10}}{16\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{1\,800\,000}$. Par suite, en moyenne, un sur 1 800 000 photons percute le grain de poussière. Comme en une seconde il s'échappe 1000 photons, alors, en moyenne, toutes les 30 minutes le grain de poussière est percuté par un photon, ce qui correspond aux résultats de l'expérience examinée.

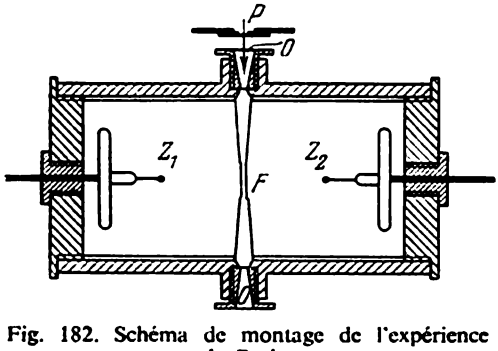


Fig. 182. Schéma de montage de l'expérience de Bothe

L'expérience de Bothe montre que dans l'excitation des rayons X de fluorescence l'énergie se propage non pas sous forme d'ondes sphéri-

ques, mais sous forme de photons dirigés. Une feuille mince en fer ou en cuivre F (fig. 182) était suspendue entre deux compteurs Geiger Z_1 et Z_2. Des rayons X primaires suffisamment durs éclairaient la feuille d'en haut (dans la direction de la flèche P) et l'excitaient à l'émission d'un rayonnement caractéristique de fluorescence. Si l'énergie de ce rayonnement s'était propagée en ondes sphériques, les deux compteurs auraient dû réagir simultanément.

L'expérience montre, cependant, que cela ne se produit pas : les compteurs réagissent tout à fait indépendamment l'un de l'autre et le nombre de coïncidences ne dépasse pas le nombre de coïncidences aléatoires prévues. Tout se passe comme si le rayonnement de fluorescence émis se propageait sous forme de photons dirigés atteignant tantôt l'un tantôt l'autre compteur.

§ 122. Fluctuations du flux lumineux

La nature corpusculaire de la lumière présente encore une conséquence importante : l'inévitable existence de fluctuation dans des faibles flux lumineux. En effet, si l'on peut assimiler la lumière à un flux de photons, chaque photon en atteignant le dispositif récepteur (cellule photoélectrique, chambre d'ionisation, etc.), provoque tel ou tel événement indépendamment des autres photons. Pour des intensités ordinaires le nombre de ces événements élémentaires d'absorption est si grand qu'on n'observe aucune discontinuité dans le rayonnement. Supposons, toutefois, que le flux est si faible que le nombre de photons atteignant le recepteur en l'unité de temps se mesure en unités ou en dizaines; si d'autre part le récepteur est si sensible qu'il réagit au choc d'un petit nombre de photons, alors inévitablement il doit enregistrer des fluctuations de ce nombre.

Ces fluctuations furent, tout d'abord, détectées avec des rayonnements de très courtes longueurs d'ondes, notamment avec les rayons X et les rayons γ des substances radioactives. Dans ce cas, comme il a été mentionné à maintes reprises, par suite de la haute fréquence du rayonnement les photons sont très grands. Leur absorption par les atomes ou les molécules s'accompagne d'une ionisation et d'une libération d'électrons rapides qui à leur tour provoquent l'ionisation d'un grand nombre d'autres molécules contenues dans la chambre d'ionisation ou le compteur. De cette façon l'effet primaire de l'événement élémentaire d'absorption est sensiblement renforcé et l'observation d'un flux faible se trouve facilitée. L'expérience de Bothe, décrite au § 121, avec deux compteurs enregistrant des photons se dirigeant dans des sens opposés du rayonnement X émis par une mince feuille de fer constitue en réalité une expérience sur la fluctuation.

La détection des fluctuations d'un faible flux de *lumière visible* présente un intérêt particulier. Ces fluctuations ont été, en effet, observées par S. Vavilov et ses collaborateurs dans une suite de travaux et, après lui, par d'autres chercheurs. Le dispositif récepteur dans toutes ces expériences a été l'œil humain qui possède une sensibilité non encore atteinte par les appareils

photoélectriques*). C'est précisément avec les expériences de Vavilov qu'on constata que l'œil ayant resté suffisamment longtemps dans l'obscurité possède dans un secteur déterminé de la périphérie de la rétine une sensibilité maximale d'environ 200 photons, tout en variant de façon importante chez des observateurs différents. Cette sensibilité correspond à l'énergie *frappant* l'œil. Comme la lumière avant d'atteindre la rétine traverse une série de milieux dans lesquels elle se réfléchit et est partiellement absorbée, le nombre minimal de photons provoquant la sensation visuelle est de beaucoup inférieur à celui indiqué et constitue, d'après l'estimation de Vavilov, quelques dizaines et, peut-être, même quelques photons.

Pour la mise en évidence des expériences de Vavilov il est nécessaire de rappeler certains faits se rapportant à l'organisation et aux fonctions physiologiques de l'œil.

Comme on le sait, la rétine est composée de deux sortes de cellules photosensibles : les cônes et les bâtonnets. Les cônes dominent dans les parties de la rétine se disposant près de l'axe optique de l'œil, tandis qu'à la périphérie on ne les rencontre presque pas; au contraire, les bâtonnets prédominent dans les parties périphériques de la rétine. Ces deux cellules remplissent des fonctions différentes : les cônes sont en liaison avec le mécanisme de la vision colorée, quant aux bâtonnets ils pourvoient à la vision « grise », la soi-disante vision des pénombres ou périphérique. La sensibilité des bâtonnets est de plusieurs fois supérieure à celle des cônes. C'est pourquoi dans les expériences de détermination des limites de la sensibilité de l'œil auxquelles appartiennent les expériences sur les fluctuations on utilise précisément la vision périphérique non colorée. Toutes ces expériences sont basées sur l'existence d'un *seuil* marqué *de perception visuelle* : si l'énergie de rayonnement frappant la rétine est inférieure à une certaine grandeur déterminée, l'œil ne perçoit plus la lumière. C'est justement cette propriété de la vision humaine qu'utilisa Vavilov pour l'observation des fluctuations quantiques de la lumière visible. Supposons qu'on observe un éclat rapide de la lumière; soit n_0 le nombre de photons absorbés durant l'intervalle de l'éclat et correspondant au seuil de perception et soit z le nombre réel de photons absorbés au cours du même temps. Dans ce cas l'œil ne verra l'éclat qu'à condition que $z \geqslant n_0$, si $z < n_0$, la perception visuelle sera nulle, l'œil n'observera pas l'éclat. Il est évident que si, périodiquement, dans des intervalles de temps déterminés on envoie vers l'œil des éclats d'intensité aussi faible que, par suite des fluctuations du nombre de photons, z sera tantôt supérieur, tantôt inférieur à n_0, alors l'œil de l'observateur soit percevra, soit ne percevra pas l'éclat.

Ainsi donc, l'existence du seuil de perception visuelle fournit un critère très fin de décèlement de la fluctuation : au cours des variations de z autour de la grandeur n_0 la lumière ou bien n'est pas perçue, ou bien on voit un

*) La grande sensibilité de l'œil peut être caractérisée par les données suivantes : dans une atmosphère d'une transparence parfaite l'homme est capable de discerner une bougie étalon éloignée de 25 km.

éclat. Quant aux variations de l'intensité en fonction du nombre différent de photons absorbés dans des conditions où $z \geqslant n_0$, d'après les attestations de Vavilov, dans ces expériences aux limites des facultés perceptrices de l'œil, elles n'ont pu être observées.

Le montage des expériences a été réalisé de façon suivante (fig. 183). Pour que la lumière de l'éclat atteigne toujours le même endroit de la partie périphérique de la rétine on fixait l'attention de l'œil de l'observateur sur une lampe S de faible éclairement dont la lumière traversait un filtre rouge; c'est sur cette tache rouge ainsi obtenue qu'était fixée l'attention de l'œil de l'observateur. La lumière d'une autre lampe L réfléchie sur le miroir m

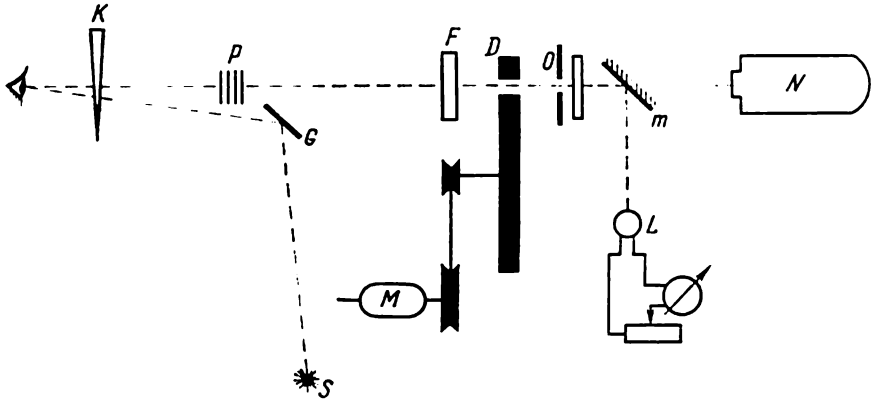


Fig. 183. Schéma de montage de l'installation servant à la mesure des fluctuations quantiques perceptibles

frappait le disque D présentant une ouverture et qui était mis en rotation par un moteur synchrone M (1 tour par seconde). Les dimensions de l'ouverture étaient telles que le disque laissait passer la lumière pendant 0,1 s et la retenait durant 0,9 s. De sorte que la durée de l'éclat était de 0,1 s tandis que durant 0,9 s l'œil se reposait. Ce montage était nécessaire afin d'exclure l'influence de la faculté de l'œil de conserver pendant un certain temps la perception visuelle. Un filtre vert F était prévu pour obtenir un flux de longueur d'onde déterminée.

A l'instant où l'observateur voyait l'éclat il appuyait sur un bouton du chronographe sur la bande mobile duquel était tracée une marque. Un dispositif spécial reliait le disque tournant à l'aiguille enregistreuse du chronographe, de sorte que sur la bande était enregistré chaque tour du disque. Grâce à quoi on pouvait savoir si l'éclat était observé quand la lumière passait par le trou du disque.

La brillance de la tache verte pouvait être constamment diminuée. On constata ainsi qu'au début l'observateur enregistrait chaque éclat. Mais avec l'affaiblissement de la brillance les éclats cessaient de corres-

pondre à chaque passage à travers l'ouverture du disque; on observait des fluctuations : au cours de certains passages les éclats étaient perçus, aux cours d'autres, ils ne l'étaient plus. En dépouillant la bande du chronographe après l'expérience on pouvait soumettre les observations au contrôle statistique. D'un côté le rapport du nombre d'éclats observés au nombre total de rotations du disque est égal à la probabilité P de l'apparition de l'éclat; de l'autre certaines mesures complémentaires sur lesquelles on ne s'arrêtera pas, ont permis de déterminer le rapport du nombre de photons *n absorbés* par la rétine à chaque éclat au nombre de photons n_0 absorbés par la rétine dans les conditions du seuil de la perception visuelle. Si l'on désigne ce rapport par x

$$n/n_0=x,$$

le calcul s'appuyant sur la théorie des probabilités donne la relation suivante entre P et x :

$$P=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{n_0}{2}\,\frac{1-x}{\sqrt{x}}\right).$$

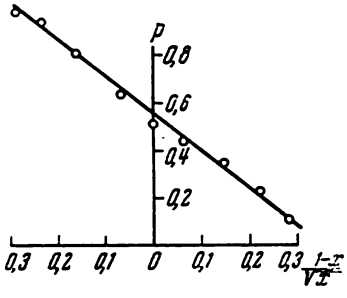


Fig. 184. Résultats d'observations de fluctuations

De nombreuses données expérimentales obtenues par S. Vavilov montrent que dans tous les cas sans exception on observe une liaison linéaire entre la probabilité P et la quantité $(1-x)/\sqrt{x}$. Sur la figure 184 on en a donné un exemple : la ligne continue est tracée en appliquant la formule tandis qu'au moyen des petits cercles on a figuré les résultats des observations. On voit que les points fournis par l'expérience s'alignent de façon satisfaisante suivant la droite, ce qui confirme la nature statistique des fluctuations observées.

§ 123. Diffusion des rayons X (théorie ondulatoire)

La diffusion des rayons X appartient aux phénomènes pour lesquels se manifeste de la façon la plus évidente la dualité de la nature du rayonnement (voir § 116).

On verra dans ce paragraphe et les suivants que certaines propriétés de la diffusion du rayonnement X (polarisation, intensité) peuvent en effet facilement s'expliquer sur la base de la conception ondulatoire, tandis que d'autres propriétés (variation de la fréquence par diffusion) ne se prêtent à l'explication que si l'on attribue aux rayons X une nature corpusculaire.

Une des conclusions importantes de la théorie ondulatoire de la diffusion des rayons X réside dans le fait que même quand le rayonnement incident n'est pas polarisé le rayonnement diffus doit l'être, en général, partiellement et dans certaines conditions, complètement. Etudions le mécanisme de cette polarisation. Supposons qu'une onde électromagnétique monochromatique plane dirigée parallèlement à l'axe z (fig. 185) percute au point O un électron.

Le vecteur électrique de cette onde agissant sur l'électron l'oblige à effectuer des oscillations harmoniques, de sorte que cet électron devient le centre d'une onde sphérique qui est justement l'onde diffusée. Etudions l'état de polarisation de cette onde au point P situé sur le prolongement de l'axe y, c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire à la direction de l'onde incidente. Comme l'onde incidente n'est pas polarisée, son vecteur électrique $\mathcal{E}$ peut avoir une direction quelconque tout en restant constamment dans le plan xy. Décomposons ce vecteur en ses composantes $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$. Au § 67 [cf. par exemple la formule (67.6)] on a vu que l'intensité du rayonnement dipôlaire de l'électron est proportionnelle à $\sin^2\vartheta$, où ϑ est l'angle entre la direction des vibrations de l'électron et la direction du point où se trouve l'observateur. Donc les vibrations de l'électron sous l'action de la composante $\mathcal{E}_y$ dans la direction OP ne produisent pas de rayonnement ($\vartheta=0$). Il s'ensuit qu'au point P arrive un rayonnement diffus entretenu par les vibrations de la seule composante $\mathcal{E}_x$, c'est-à-dire un rayonnement linéairement polarisé dont la direction de vibrations du vecteur électrique est perpendiculaire au plan passant par la direction de l'onde incidente et le point d'observation P.

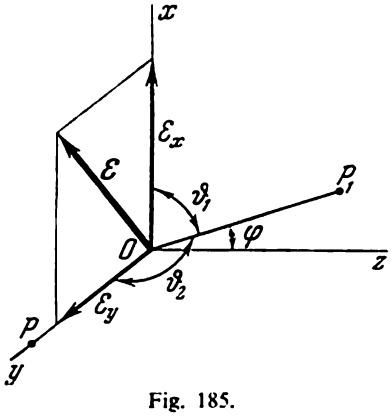


Fig. 185.

Cette conclusion est confirmée par l'expérience suivante de Barkla, analogue à la célèbre expérience optique avec les miroirs de Norrenberg. Les rayons X orientés dans la direction S_1 (fig. 186) atteignent la plaque R_1 (charbon ou paraffine) qui joue le rôle de polariseur. Selon ce qui a été dit plus haut les rayons diffusés dans la direction S_2 doivent être complètement polarisés. Cette polarisation est décelée au moyen d'une seconde plaque R_2 jouant le rôle d'un analyseur et qui est capable de tourner solidairement à la chambre d'ionisation E autour de l'axe parallèle à S_2 (comme c'est montré en pointillé). L'expérience montre que la chambre E enregistre une intensité maximale du rayonnement diffus quand S_3 est parallèle à S_1 (comme c'est indiqué sur le des-

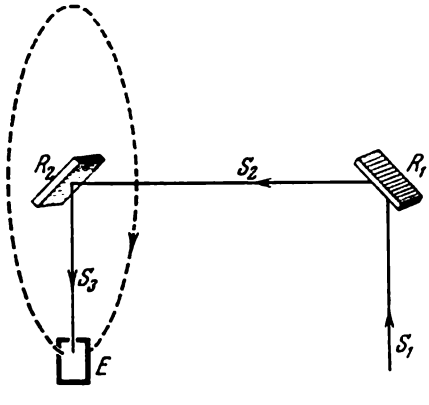


Fig. 186. Schéma de montage de l'expérience de Barkla permettant de détecter la polarisation des rayons X

sin) et une intensité minimale, quand S_3 est perpendiculaire à S_1 (c'est-à-dire après rotation de 90° par rapport à la position du dessin). Mais c'est justement à quoi on devait s'attendre car d'après ce qui a été dit plus haut le vecteur électrique de l'onde incidente excite en R_2 des vibrations d'électrons, perpendiculaires à S_1 et S_2.

Calculons maintenant l'intensité des rayons diffusés. Examinons pour cela les vibrations forcées de l'électron sous l'action de l'onde plane se propageant dans la direction de l'axe z (fig. 187). Posons d'abord que l'onde est linéairement polarisée et que son vecteur électrique $\mathcal{E}$ vibre dans la direction de l'axe x avec une pulsation ω

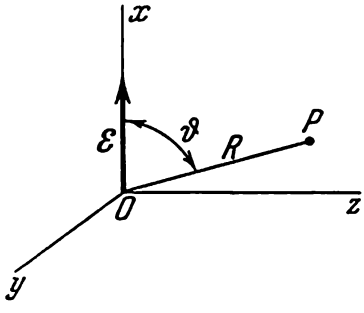


Fig. 187.

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \qquad (123.1)$$

L'intensité de l'onde incidente sera alors d'après § 67 [formule (67.5)]

$$J_0=\frac{c}{4\pi}\mathcal{E}^2. \qquad (123.2)$$

Le champ électrique $\mathcal{E}$ provoque les vibrations forcées de l'électron le long de l'axe x avec la même pulsation ω. Ces vibrations donnent naissance à une nouvelle onde sphérique dont l'intensité instantanée en un certain point P situé à la distance R de l'électron est d'après la formule (67.6)

$$J=\frac{e^2\ddot{x}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\vartheta, \qquad (123.3)$$

où ϑ est l'angle entre la direction vers le point d'observation P et la direction des vibrations de l'électron. L'accélération de l'électron $\ddot{x}$ qui se meut sous l'action de la force engendrée par le champ $e\mathcal{E}$ est évidemment égale à $e\mathcal{E}/m$. En portant cette expression dans (123.3) on trouve $J=\frac{e^4\mathcal{E}^2}{4c^3m^2R^2}\sin^2\vartheta$. En y remplaçant $\mathcal{E}^2$ par l'intensité de l'onde incidente J_0 d'après (123.2) on obtient

$$J=J_0\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\sin^2\vartheta. \qquad (123.4)$$

C'est bien l'expression de l'intensité du rayonnement diffus au point P. On voit que la distribution de l'intensité en directions au cas où l'onde incidente est linéairement polarisée contient $\sin^2\vartheta$, c'est-à-dire que dans la direction des vibrations l'intensité est nulle et atteint le maximum pour $\vartheta=\pi/2$ (voir § 67).

Au cas où l'onde incidente n'est pas polarisée la variation de l'intensité de diffusion en fonction de la direction est quelque peu différente. Examinons ce cas.

Supposons que l'onde incidente se propage comme auparavant parallèlement à l'axe z (fig. 185); le vecteur champ électrique se trouvera donc

dans le plan yx. Décomposons ce vecteur en ses composantes $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ et calculons l'intensité du rayonnement diffus au point P_1 se trouvant dans le plan xz. Etant donné que le rayonnement primaire n'est pas polarisé, le vecteur champ électrique $\mathcal{E}$ peut occuper une position quelconque dans le plan xy. Les valeurs moyennes des carrés des composantes $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ seront égales entre elles

$$\overline{\mathcal{E}_x^2}=\overline{\mathcal{E}_y^2}=\frac{1}{2}\mathcal{E}_0,$$

de sorte que les intensités associées à ces composantes seront de même égales entre elles

$$J_x=J_y=\frac{1}{2}J_0.$$

Chacune des composantes $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ produit une onde diffusée, les intensités de ces ondes diffusées au point P_1 suivant la formule (123.4) seront (voir fig. 185)

$$J'=J_x\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\sin^2\vartheta_1=\frac{1}{2}J_0\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\cos^2\varphi, \tag{123.5}$$

$$J''=J_y\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\sin^2\vartheta_2=\frac{1}{2}J_0\frac{e^4}{m^2c^4R^2} \tag{123.6}$$

($\sin^2\vartheta_2=1$, car ϑ_2 est l'angle entre le plan xz et l'axe y). Comme les vibrations de $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ sont incohérentes, pour obtenir l'intensité totale au point P_1 il faut sommer les intensités J' et J'' :

$$J=J'+J''=J_0\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\frac{1+\cos^2\varphi}{2}. \tag{123.7}$$

La vérification expérimentale a montré que pour des rayons X de longueur d'onde pas trop courte la formule (123.7) fournit des résultats s'accordant avec l'expérience. Sur la figure 188 la courbe continue représente la distribution de l'intensité calculée d'après la formule (123.7); les courbes en pointillé constituent des résultats expérimentaux pour deux longueurs d'ondes très différentes. On voit que pour des ondes plus longues ($\lambda=0{,}71$ Å) et pour des angles de diffusion pas trop faibles les résultats expérimentaux se conforment assez bien à la courbe théorique. La forte divergence entre les résultats expérimentaux et théoriques pour des angles inférieurs à 30° s'explique par le fait que dans la conclusion simplifiée donnée on n'a pas tenu compte des interférences des ondes diffusées par les électrons voisins de l'atome.

Au contraire, pour de petites longueurs d'ondes ($\lambda=0{,}017$ Å) la courbe expérimentale sur toute sa longueur diverge de la courbe théorique. Elle ne présente aux environs de 90° aucun minimum exigé par la théorie et, d'autre part, l'intensité de diffusion obtenue expérimentalement est de beaucoup inférieure pour tous les angles à celle donnée par la théorie.

Cette divergence montre que pour des ondes très courtes la théorie ondulatoire classique de la diffusion des rayons X devient complètement inapplicable.

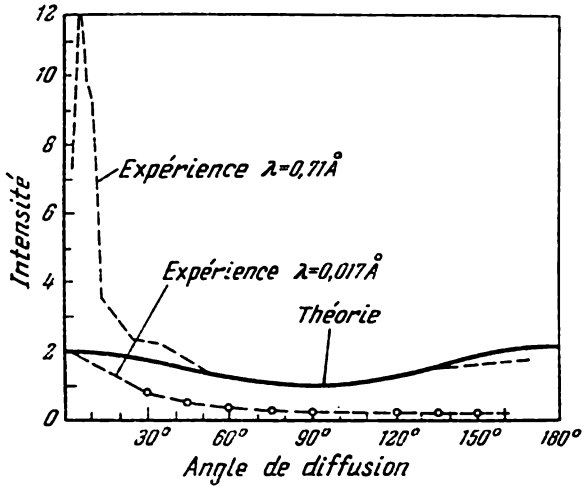


Fig. 188. Confrontation de la théorie ondulatoire de la diffusion avec les données de l'expérience

Exercices : 1. Utilisant la formule (123.4) démontrer que l'énergie d'onde diffusée par l'électron dans toutes les directions s'exprime par la formule

$$S=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}J_0.$$

2. Le degré de polarisation du rayonnement diffus se caractérise par la fraction

$$\frac{J''-J'}{J''+J'}\cdot 100\ \%.$$

Démontrer que pour les points d'observation situés dans le plan xy (fig. 185) la polarisation est totale (100 %) et pour les points appartenant à l'axe z le degré de polarisation est nul.

§ 124. Effet Compton

L'insuffisance de la théorie ondulatoire de diffusion des rayons X apparaît au cours de l'étude de l'intensité de diffusion des ondes de longueurs très courtes et se manifeste de façon particulièrement marquée si l'on étudie la fréquence des rayons diffusés. D'après la théorie ondulatoire le mécanisme de la diffusion consiste en la « mise en oscillation » des électrons par le champ électromagnétique de l'onde incidente. Il est naturel donc de s'attendre à ce que la fréquence de rayonnement diffus corresponde à celle du rayonnement incident.

Or, des observations déjà anciennes ont montré que dans la diffusion des rayons X et, tout particulièrement, du rayonnement γ la longueur d'onde varie, notamment dans la composition du rayonnement diffus on voit apparaître des ondes plus longues possédant un moindre pouvoir de pénétration. Comme avant la découverte de la spectroscopie des rayons X

il fallait se servir pour la détermination de la longueur d'onde de méthodes grossières se basant sur la différence d'absorption de rayons de longueurs d'ondes différentes, il était difficile de démêler les détails de ce phénomène et généralement, on l'attribuait à des facteurs secondaires.

Dans les années 1922-1923 A. Compton utilisant un spectrographe à rayons X étudia en détails le phénomène et montra qu'il ne pouvait pas être réduit à l'influence de facteurs secondaires et qu'il était directement lié au mécanisme de la diffusion. Le schéma de l'expérience de Compton est donné à la figure 189. Le rayonnement d'un tube de Rœntgen à cathode en molybdène T est diffusé par un morceau de graphite R; le rayonnement diffus après avoir traversé une série de fentes frappe le cristal du spectrographe à rayons X. En déplaçant et en faisant tourner autour de l'axe vertical le tube avec le radiateur R on pouvait modifier l'angle de diffusion φ sans déranger la partie restante de l'appareil. La distribution spectrale de l'intensité était mesurée à l'aide d'une chambre d'ionisation.

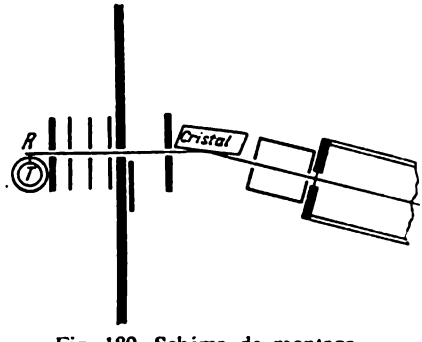


Fig. 189. Schéma de montage de l'expérience de Compton

Sur la figure 190 on a confronté les résultats obtenus. A est la représentation de la distribution de l'intensité de la raie primaire (la raie K_α du molybdène $\lambda=0{,}712\,605$ Å); B, C, D donnent la composition spectrale du rayonnement pour des angles de diffusion différents. On peut aussitôt préciser les particularités suivantes du phénomène: 1) dans le rayonnement diffus coexistent aussi bien la longueur d'onde primaire du rayonnement d'excitation que la longueur d'onde déplacée vers les ondes longues; 2) la grandeur du déplacement dépend de l'angle de diffusion, et précisément elle augmente avec l'accroissement de cet angle; 3) avec l'augmentation de l'angle de diffusion l'intensité de la raie non déplacée diminue tandis que celle de la raie déplacée augmente.

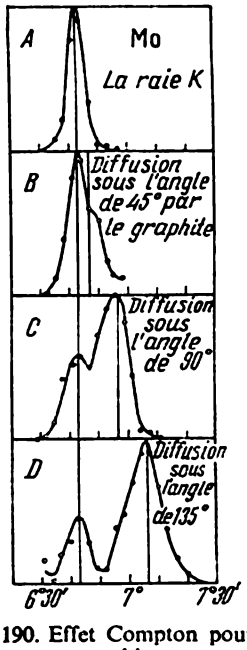


Fig. 190. Effet Compton pour le graphite

Sur la figure 191 on a donné les spectres de la raie K de l'anticathode

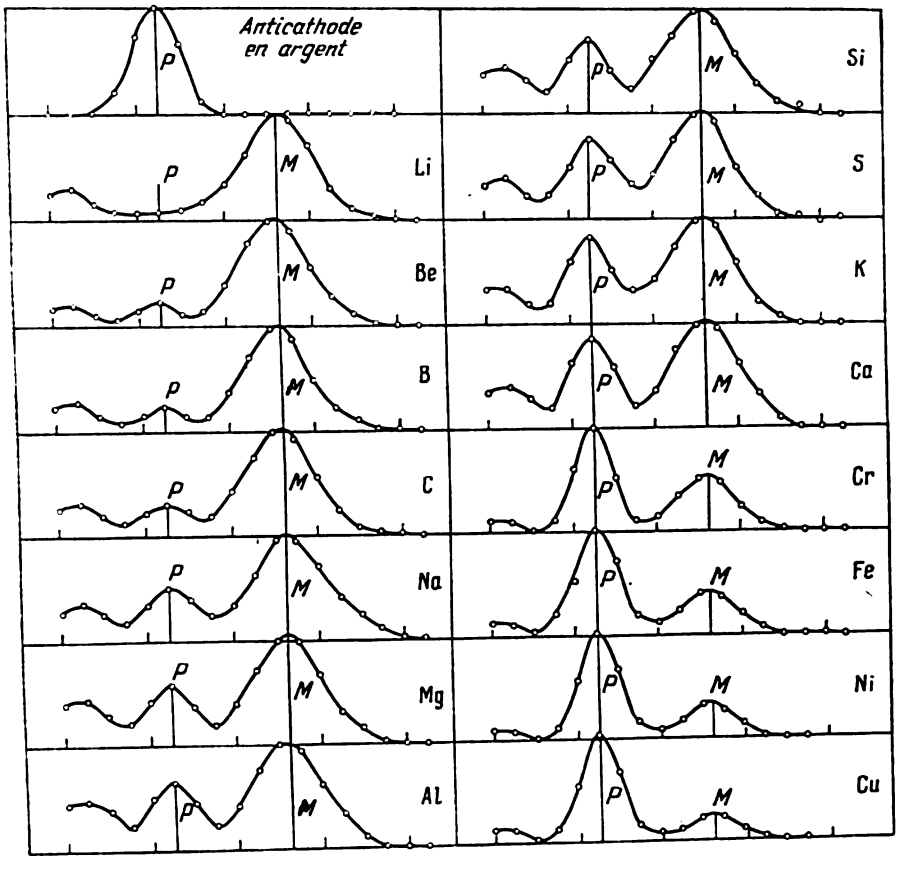


Fig. 191. Effet Compton avec des radiateurs en diverses substances (Compton et Wu)

en argent ($\lambda = 0{,}562\,67$ Å) diffusée sous un même angle par *diverses* substances. On peut constater les particularités suivantes du phénomène : 1) la grandeur du déplacement ne dépend pas de la nature du radiateur; 2) avec l'accroissement du numéro atomique du radiateur, l'intensité de la raie non déplacée augmente, tandis que l'intensité de la raie déplacée diminue. C'est ainsi que pour le lithium le rayonnement diffus est pratiquement constitué de la seule longueur d'onde déplacée, tandis que pour le cuivre l'intensité de la raie déplacée est très faible par rapport à celle de la raie non déplacée.

§ 125. Théorie élémentaire de l'effet Compton

Les particularités de l'effet Compton décrites au paragraphe précédent s'expliquent très facilement si l'on admet que le rayonnement est de nature purement corpusculaire, c'est-à-dire qu'il constitue un flux de photons et que dans la diffusion participent non pas tous les électrons mais une petite fraction de ces électrons, chaque électron diffusant un photon entier. Pour mener à bout cette explication il faut supposer que le photon possède non seulement une réserve déterminée d'énergie ($h\nu$) mais aussi une quantité déterminée de mouvement, c'est-à-dire qu'il se conduit *grosso modo* comme une bille en mouvement. Dans ce cas la diffusion des photons par des électrons s'accompagne au cours des chocs d'un échange d'énergie et de *quantité de mouvement* et, suivant l'expression imagée de Compton, rappelle des boules du billard dont le rôle est tenu par les photons et les électrons.

Avant de calculer sur la base de cette conception le déplacement de la longueur d'onde on doit passer en revue certaines propriétés du photon. Le photon est une particule qui possède des propriétés particulières, car il se meut à la vitesse de la lumière. Les formules de la mécanique classique sont donc inapplicables au mouvement du photon et il faut utiliser les relations relativistes (voir § 64).

D'après la théorie de la relativité la masse d'une particule se mouvant à la vitesse v est égale à

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\equiv\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta=\frac{v}{c}.$$

Mais comme le photon se meut avec la vitesse c alors $\beta=1$ et le dénominateur de la formule précédente devient nul. Si donc la masse au repos du photon prenait une valeur finie (c'est-à-dire était différente de zéro), on obtiendrait alors $m=m_0/0=\infty$. Il s'ensuit que la masse au repos du photon doit obligatoirement être égale à zéro. Par cela le photon se distingue essentiellement des particules comme par exemple les électrons qui possèdent une masse au repos finie.

Calculons maintenant la quantité de mouvement du photon. Il est évident que dans ce but on ne peut utiliser la formule habituelle $p=mv=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ pour des raisons mentionnées plus haut. Or la théorie de la relativité donne une autre formule pour l'impulsion p utilisable pour le cas d'une particule se mouvant avec la vitesse c. Cette formule est :

$$p=\frac{v}{c^2}E. \tag{64.16}$$

En effet,

$$p=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{v}{c^2}=E\frac{v}{c^2}.$$

Pour une particule se mouvant avec la vitesse de la lumière ($v=c$) on obtient

$$p=\frac{E}{c}. \tag{125.1}$$

Enfin, pour un photon $E=h\nu$

$$p=\frac{h\nu}{c}, \tag{125.1'}$$

ce qui est bien l'expression cherchée pour l'impulsion du photon.

Puisque le photon possède une impulsion déterminée, en rencontrant un obstacle quelconque, le flux de photons doit exercer une pression sur cet obstacle, analogue à la pression du gaz constituant l'effet moyen du bombardement des parois de l'enceinte par les molécules gazeuses. La pression exercée par le flux de photons est justement cette pression de radiation établie expérimentalement en conformité quantitative avec la formule (125.1) par les célèbres travaux du physicien russe émérite P. Lébédev. Lébédev démontra non seulement l'existence d'une pression de radiation sur les corps solides macroscopiques mais précisa aussi de façon absolument évidente l'effet très fin de la pression de radiation sur les gaz. Notons toutefois qu'en effectuant ses expériences Lébédev s'est inspiré non pas de la théorie corpusculaire de la lumière mais de la théorie électromagnétique de Maxwell qui conduit également à la conclusion de l'existence d'une pression de radiation et donne pour cette pression une formule coïncidant avec (125.1). Maxwell déjà, en partant des conceptions de Faraday sur les lignes de force du champ électrique, considérait la pression de radiation comme la conséquence de la pression transversale des tubes de force. Le fait que l'existence de la pression de radiation et son expression quantitative peuvent être déduites aussi bien de la vision corpusculaire que de la vision ondulatoire de la nature de la lumière est une des conséquences de la dualité de la nature de la lumière, qu'on a à maintes reprises soulignée.

Posons maintenant qu'un électron avant la collision se trouvait au repos, c'est-à-dire que son impulsion avant le choc avec le photon était nulle; l'impulsion initiale du photon est $\overrightarrow{h\nu_0}/c$. Après le choc l'électron acquiert l'impulsion $\overrightarrow{mv}$ où $m=m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ et l'impulsion du photon devient égale à $\overrightarrow{h\nu}/c$.

Appliquant les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, c'est-à-dire en considérant cette collision semblable au choc de boules élastiques, on obtient deux équations. De la loi de conservation de l'énergie on a

$$h\nu_0+m_0c^2=h\nu+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{125.2}$$

où m_0c^2 est l'« énergie au repos » de l'électron. Désignant pour simplifier la masse de l'électron mobile par m récrivons (125.2) de la façon suivante :

$$h\nu_0+m_0c^2=h\nu+mc^2. \tag{125.3}$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement donne

$$\frac{\overrightarrow{h\nu_0}}{c}=\frac{\overrightarrow{h\nu}}{c}+\overrightarrow{mv}. \tag{125.4}$$

Des équations (125.3) et (125.4) la première est scalaire et la seconde est vectorielle. Pour le calcul il aurait fallu remplacer l'équation vectorielle (125.4) par deux équations scalaires en projections sur les axes de coordonnées. Mais on agira de la façon suivante. L'équation vectorielle (125.4) définit le triangle OAB (fig. 192). En utilisant la formule trigonométrique élémentaire on définit dans ce triangle le carré du côté AB égal en grandeur à mv

$$m^2v^2=\frac{h^2\nu_0^2}{c^2}+\frac{h^2\nu^2}{c^2}-2h^2\frac{\nu_0\nu}{c^2}\cos\varphi$$

ou

$$m^2v^2c^2=h^2\nu_0^2+h^2\nu^2-2h^2\nu_0\nu\cos\varphi. \qquad (125.5)$$

L'équation (125.3) se mettra sous la forme

$$mc^2=h(\nu_0-\nu)+m_0c^2,$$

puis élevée au carré :

$$m^2c^4=h^2\nu_0^2+h^2\nu^2-2h^2\nu_0\nu+m_0^2c^4+$$
$$+2hm_0c^2(\nu_0-\nu). \qquad (125.6)$$

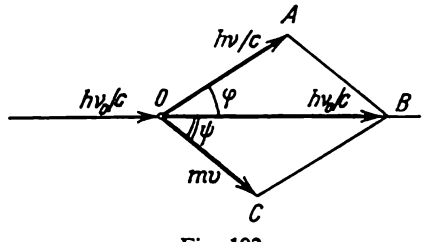


Fig. 192.

Soustrayant (125.5) de (125.6) on obtient

$$m^2c^4(1-v^2/c^2)=m_0^2c^4-2h^2\nu_0\nu(1-\cos\varphi)+$$
$$+2m_0c^2h(\nu_0-\nu). \qquad (125.7)$$

Notant que $m^2(1-v^2/c^2)\equiv m^2(1-\beta^2)=m_0^2$ et effectuant des transformations simples dans (125.7) on trouve

$$c(\nu_0-\nu)=\frac{h}{m_0c}\nu_0\nu(1-\cos\varphi), \qquad (125.8)$$

ou

$$\frac{c}{\nu}-\frac{c}{\nu_0}=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi). \qquad (125.9)$$

On en tire que

$$\nu=\frac{\nu_0}{1+\frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)}=\frac{\nu_0}{1+2\frac{h\nu_0}{m_0c^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}, \qquad (125.10)$$

ce qui est bien la formule de la fréquence transformée.

Il est facile de tirer de (125.10) la formule, le plus souvent utilisée en pratique, pour la transformation de la longueur d'onde. Comme $c/\nu=\lambda$ et $c/\nu_0=\lambda_0$ on trouve

$$\lambda-\lambda_0\equiv\Delta\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)$$

ou

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (125.11)$$

La quantité h/m_0c ayant la dimension de la longueur est une combinaison de trois constantes universelles; elle s'appelle longueur d'onde de Compton et est désignée par Λ :

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6{,}626\cdot 10^{-27}}{9\cdot 10^{-28}\cdot 2{,}99\cdot 10^{10}} = 0{,}0242 \text{ Å}.$$

La formule définitive pour la transformation de la longueur d'onde au cas de diffusion prend la forme

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2\frac{\varphi}{2} = 0{,}048\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (125.12)$$

D'après cette formule on voit que pour $\varphi=0$ on a $\Delta\lambda=0$, pour $\varphi=90°$ $\Delta\lambda=\Lambda$ et enfin pour $\varphi=180°$ $\Delta\lambda=2\Lambda$.

Sur les figures 190 et 191 les positions calculées des raies déplacées sont marquées par des lignes verticales. Comme on le voit, les maximums obtenus expérimentalement correspondent de façon très satisfaisante à ceux prédits par la formule (125.12). La quantité h/m_0c obtenue par les mesures les plus précises est

$$\left(\frac{h}{m_0 c}\right)_{\text{expér.}} = (0{,}02424 \pm 0{,}00004) \text{ Å},$$

ce qui coïncide assez bien avec la quantité théorique calculée pour des valeurs les plus précises de h, m_0, c :

$$\left(\frac{h}{m_0 c}\right)_{\text{théor.}} = (0{,}024\,265_{14} \pm 0{,}000\,005_7) \text{ Å}.$$

La formule (125.11) montre que le déplacement de Compton est indépendant de la longueur d'onde du rayonnement primaire. C'est pourquoi, si l'on avait pu observer l'effet Compton dans le spectre visible, alors dans l'extrême violet ($\lambda=4000$ Å) il aurait constitué des millièmes du pour cent de la longueur d'onde fondamentale; pour des rayons X de dureté moyenne ($\lambda\sim 0{,}5$ Å) il serait déjà de 10 % et pour des rayons γ sa grandeur serait de l'ordre de la longueur d'onde elle-même.

Il reste à expliquer pourquoi dans le rayonnement diffus à côté de la raie déplacée on observe une raie non déplacée : cela ne découle pas de la théorie exposée plus haut. Cependant, en étudiant le mécanisme de la diffusion on supposait que les photons entraient « en collision » avec un électron libre. Pour des atomes légers et des électrons périphériques aux liaisons faibles cette supposition est justifiée, car l'énergie de liaison de l'électron (quelques électrons-volts) est infiniment petite devant l'énergie du photon des rayons X. Mais les électrons internes, surtout des atomes lourds, possèdent des liaisons si fortes qu'on ne peut plus les considérer comme libres. C'est pourquoi,

au cours « des collisions » le photon échange son énergie et sa quantité de mouvement avec l'atome en bloc. Comme la masse de ce dernier est très grande, suivant la loi de conservation de la quantité de mouvement le photon ne lui transmet pas son énergie et sa quantité de mouvement; par suite en cas de diffusion $h\nu$ ne varie pas.

Ces considérations permettent de définir de façon qualitative le rapport des intensités des raies déplacée et non déplacée suivant la masse de l'atome. Dans les atomes légers tous les électrons ont des liaisons faibles; au contraire, dans les atomes lourds seuls les électrons périphériques sont faiblement reliés au noyau. On peut donc s'attendre à ce qu'avec l'accroissement du numéro atomique et dans des conditions identiques d'observation l'intensité de la raie déplacée diminuera, tandis que celle de la raie non déplacée augmentera. C'est ce qu'on observe en réalité comme le montre la figure 191.

Des considérations analogues il suit que dans la partie visible du spectre l'effet Compton ne peut s'observer en aucun cas.

Du point de vue optique (ondulatoire) la différence entre les raies déplacée et non déplacée du spectre de rayonnement diffus des rayons X se ramène à ce que dans le premier cas on a affaire à un rayonnement incohérent et dans le second cas, à un rayonnement cohérent. En effet, déjà le fait que dans la diffusion de Compton on observe un déplacement de la longueur d'onde, c'est-à-dire une variation de la fréquence, indique que dans ce cas les rayonnements incident et diffus ne sont pas cohérents. Par contre, le rayonnement diffus présentant une raie non déplacée est cohérent avec le rayonnement incident et les séries d'ondes diffusées par les différents atomes sont cohérentes entre elles. Cela se voit également dans les figures d'interférence des rayons X dans les cristaux (voir § 33) et le phénomène est particulièrement sensible quand on examine la diffusion des rayons X monochromatiques dans les cristaux par la méthode de Bragg (§ 34). Dans ce cas les ondes diffusées par les différentes couches atomiques du réseau cristallin interfèrent entre elles en produisant en fin de compte une interférence en réflexion obéissant à la formule de Wulff-Bragg : $n\lambda = 2d \sin \vartheta$.

§ 126. Les électrons de recul

Jusque-là on a fixé l'attention sur les modifications du spectre au cours de la diffusion des rayons X. Un simple calcul du déplacement exposé au § 125 montre que chaque événement élémentaire de diffusion doit s'accompagner de l'apparition d'un électron rapide ayant été percuté par un photon. Calculons la variation de l'énergie cinétique de l'électron par diffusion.

D'après la loi de conservation de l'énergie cette variation doit être égale à la différence entre l'énergie du photon avant et après la diffusion

$$E_k = h\nu - h\nu' \equiv h\,\Delta\nu.$$

Le quotient de E_k par l'énergie initiale du photon est égal à

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu}. \qquad (126.1)$$

Or,

$$\Delta\nu=\nu-\nu'=\frac{c}{\lambda}-\frac{c}{\lambda+\Delta\lambda}=\frac{c}{\lambda}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}=\nu\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda},$$

d'où

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}.$$

En tenant compte de (125.10) on obtient

$$\frac{E_k}{h\nu}=\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{2\Lambda\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda+2\Lambda\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \qquad (126.2)$$

Calculons avec cette formule la fraction de l'énergie du photon primaire qui est transmise à l'électron de recul. Pour $\lambda=10\Lambda=0{,}24$ Å (rayons X durs) et $\varphi=90°$ $E_k/h\nu$ constitue seulement le 1/11 et ce n'est que pour $\lambda=\Lambda=0{,}024$ Å (domaine du rayonnement γ) et pour $\varphi=90°$ que le rapport $E_k/h\nu=1/2$. Ainsi donc, pour des rayons X pas trop durs l'électron de recul reçoit une partie relativement faible de toute l'énergie du photon. Cela permet de distinguer les électrons de recul des « photoélectrons » apparaissant lors de l'absorption totale du photon par l'atome, car d'après la relation d'Einstein dans ce dernier cas l'électron acquiert l'énergie d'ordre de grandeur du photon lui-même.

Sur la figure 193 on a donné un diagramme polaire montrant la relation entre les directions et les énergies des photons diffusés ($h\nu$) et des électrons de recul (E). Ce diagramme est tracé pour le cas de $\lambda_0=\Lambda$, c'est-à-dire pour des rayons durs; c'est pourquoi, l'énergie des électrons de recul y constitue une fraction importante de l'énergie du photon primaire ($h\nu_0$). Comme on le voit sur le diagramme, les électrons de recul doivent être essentiellement projetés vers l'avant suivant la direction du photon primaire.

La prévision de la théorie de Compton concernant l'exigence de l'apparition des électrons de recul au cours de la diffusion des rayons X et des rayons γ fut aussitôt confirmée au moyen des expériences dans la chambre de Wilson. Sur les photographies (fig. 194) prises lors de la traversée de l'air par les rayons X on peut noter à côté des trajectoires longues des photoélectrons un grand nombre de trajectoires courtes se disposant sur le trajet des rayons et orientées essentiellement vers l'avant en concordance avec le diagramme polaire de la figure 193. Ce sont justement les trajectoires des électrons de recul.

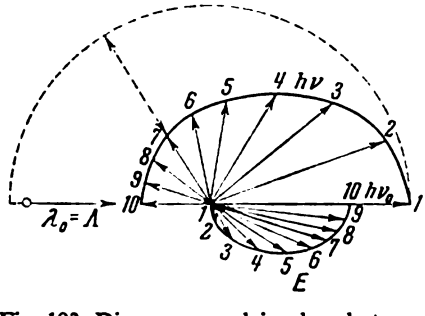


Fig. 193. Diagramme polaire des photons diffusés et des électrons de recul

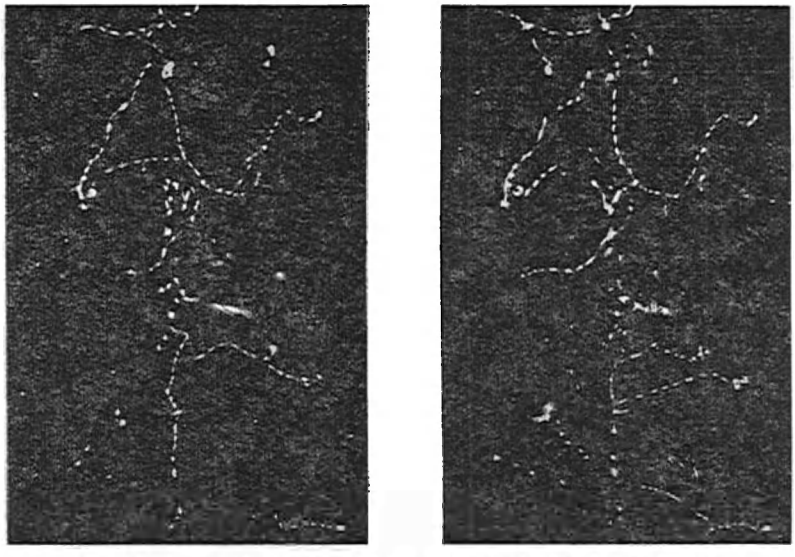


Fig. 194. Traces des électrons de recul dans une chambre de Wilson

Notons que comme la communication aux électrons de recul d'une vitesse s'accompagne d'une dépense d'énergie, il s'ensuit que leur apparition engendre une absorption des rayons incidents X et γ. Désignons le coefficient de cette absorption par σ et le coefficient d'absorption ordinaire ou photo-électrique par τ. On peut alors s'attendre à ce qu'entre le nombre des trajectoires courtes des électrons de recul N_r et le nombre de trajectoires longues des photoélectrons N_p doive avoir lieu la relation

$$N_r/N_p = \sigma/\tau.$$

L'expérience montre que le coefficient d'absorption τ diminue avec la décroissance de la longueur d'onde proportionnellement à λ^3, tandis que σ varie lentement avec la longueur d'onde. Donc, avec la diminution de λ le rapport N_r/N_p doit augmenter rapidement. Le tableau XVII montre qu'il

Tableau XVII

Longueur d'onde (en Å)	N_r/N_p	σ/τ
0,71	0,10	0,27
0,44	0,9	1,2
0,29	2,7	3,8
0,20	9	10
0,17	17	17
0,13	72	32

en est ainsi en réalité. 11 en découle, entre autre, que l'absorption des rayons *y* durs est presque exclusivement en rapport avec la dépense d'énergie à la création d'électrons de recul et non pas avec l'effet photoélectrique.

Les études poussées des électrons de recul furent réalisées par le physicien soviétique D. Skobeltsyne. Pour déterminer les énergies initiales de ces électrons Skobeltsyne se servit d'une méthode spéciale d'observation qui joua dans la suite un rôle important dans l'étude des particules rapides des rayons cosmiques. Cette méthode utilisée pour la première fois par P. Kapitsa à des fins d'étude de la nature des particules a (voir p. 89) consistait à placer la chambre de Wilson dans un intense champ magnétique et à

Fig. 195. Trajectoires des électrons de recul dans un champ magnétique

déterminer d'après les rayons de courbure des trajectoires wilsoniennes l'énergie des électrons. Une de ces photographies prise par Skobeltsyne est donnée à la figure 195 (diffusion des rayons *y* par RaC). Cette méthode a permis à Skobeltsyne de résoudre une série de questions importantes se rapportant à l'absorption des rayons *y*.

§ 127. Evénements élémentaires de diffusion et lois de conservation

Au § 121 on a vu que l'expérience avec l'effet photoélectrique élémentaire sur un grain de poussière de bismuth s'expliquait le plus naturellement si l'on admettait que l'énergie des rayons X se propageait non pas sous forme d'ondes sphériques mais sous forme de photons. L'intervalle de temps moyen entre deux événements élémentaires de l'effet photoélectrique correspond justement à la probabilité pour que l'un des photons émis au hasard par l'anticathodc percute la « cible » constituée par le grain de poussière de bismuth. L'effet Compton étudié dans les paragraphes précédents atteste ce fait avec encore plus de clarté.

En effet un modèle grossier de boules de billard s'entrechoquant permet d'expliquer facilement les principaux traits du phénomène. On peut même observer l'une de ces boules de billard, l'électron de recul, qui se meut après la diffusion exactement de la façon comme si elle avait été, suivant l'expression de Compton, « frappée » par un photon.

Si l'on avait tenté d'expliquer ce phénomène du point de vue purement classique, c'est-à-dire en considérant les rayons X comme des ondes sphériques et les électrons comme des particules habituelles (*grosso modo* comme des billes), il aurait fallu faire de gros sacrifices : refuser d'appliquer les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement aux événements élémentaires de diffusion. Cela découle des considérations suivantes. L'onde sphérique agit uniformément sur tous les électrons et les oblige à effectuer des vibrations forcées; par suite de la grandeur infime de la section de l'électron la fraction d'énergie et d'impulsion attribuée à chaque électron est infiniment faible. Or dans la diffusion comptonienne on voit apparaître des électrons de recul dont chacun porte une portion sensible de l'énergie et de l'impulsion de l'onde primaire. Pour comprendre d'où ils puisent cette énergie et cette impulsion il aurait fallu admettre qu'il se produit une accumulation progressive de l'énergie au cours d'un très long intervalle de temps. Mais ceci ne peut pas être accordé avec le fait que l'effet Compton apparaît avec les électrons faiblement liés (qui peuvent accumuler de l'énergie) aussi bien qu'avec des électrons libres (par exemple, dans les métaux).

En tentant de sauver les conceptions ondulatoires Bohr, Kramers et Sletter ont essayé en 1923 de construire une théorie d'après laquelle les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion au cours de la diffusion ne se justifiaient que *statistiquement* en moyenne durant des grands intervalles de temps, mais ne s'appliquaient pas aux événements élémentaires. Suivant cette théorie la diffusion devait s'effectuer de façon continue, quant aux électrons de recul ils n'étaient émis qu'aléatoirement. Les deux processus, la diffusion des ondes et l'émission des électrons de recul, n'étaient pas coordonnés entre eux. Cette théorie à la base de laquelle se trouvait la négation de lois fondamentales de la nature établies de façon rigoureuse comme les règles de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement ne pouvait être acceptée déjà du point de vue méthodologique. Comme on pouvait s'y attendre, cette théorie fut bientôt réfutée par l'expérience.

Les expériences ayant établi la justesse des lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans des événements élémentaires de diffusion de rayons X s'appuient sur les considérations suivantes. Suivant la « théorie du billard » exigeant l'application des lois de conservation aux événements élémentaires de diffusion les deux processus doivent être reliés ensemble ou, en tout cas, être simultanés. Or, d'après la théorie statistique de Bohr, Kramers et Sletter ces deux processus sont tout à fait indépendants l'un de l'autre.

Pour la vérification de ces deux théories il apparut possible de monter des expériences correspondantes. Si les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion sont applicables aux événements élémentaires de diffusion, il doit nécessairement en découler une série de conséquences. Par exemple, à la différence des exigences de la théorie statistique à chaque électron de recul doit être associé en même temps un photon diffusé (le photoélectron du modèle choisi). En outre, entre les angles de tir de l'électron de recul et du photon il doit exister après la diffusion une certaine relation. Cette

relation est illustrée dans le diagramme polaire de la figure 193; elle peut être obtenue directement par le calcul si l'on utilise les lois de conservation [formules (125.2) et (125.4)] et si l'on remplace l'équation vectorielle (125.4) par deux équations scalaires en projections sur les axes de coordonnées. La relation obtenue prend la forme

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=-\frac{1}{1+\alpha}\operatorname{tg}\psi, \tag{127.1}$$

où $\alpha=A/\lambda$; les désignations des angles sont données sur la figure 192.

Les expériences ont été réalisées en 1925 par Bothe et Geiger d'une part et par Compton et Simon d'autre part. Ces expériences montrèrent sans contestation la carence de la condition principale de la théorie statistique sur l'inapplicabilité des lois de conservation aux événements élémentaires de diffusion. Mais en même temps ces expériences ont servi de meilleure illustration de l'utilité de la conception corpusculaire pour l'explication de certaines propriétés de la lumière. Par la suite (1936-1937) des expériences analogues ont été renouvelées en utilisant des techniques plus poussées et sous des formes variées. Et ces nouvelles expériences comme les précédentes, mais avec une plus grande précision et avec plus de conviction, confirmèrent l'applicabilité des lois de conservation aux événements élémentaires de diffusion des rayons X et γ. De ces expériences on ne décrira que les plus caractéristiques et, précisément, la première expérience de Bothe et de Geiger ainsi que l'expérience de Compton et de Simon.

§ 128. Confirmation expérimentale de l'applicabilité des lois de conservation aux événements élémentaires de diffusion

L'expérience de Bothe et de Geiger fut montée dans le but de confirmer la simultanéité de l'apparition de l'électron de recul et du photon diffusé. Un pinceau étroit de rayons X (fig. 196) traversait une atmosphère d'hydrogène entre deux compteurs de Geiger. On avait choisi l'hydrogène à cause de sa faible absorption des rayons X, mais, par contre, de la forte dispersion de ces rayons. L'un des compteurs (celui de gauche sur la fig. 196) était caché par une feuille de platine et contenait de l'air, l'autre était ouvert et, par suite, rempli d'hydrogène. Dans ces conditions le compteur de gauche ne réagissait pas aux électrons de recul, car ils étaient absorbés par la feuille de platine, par contre il réagissait aux photons qui après avoir traversé la

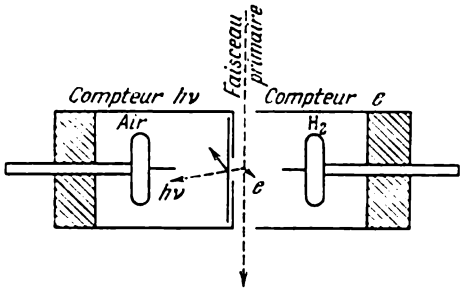


Fig. 196. Schéma de montage de l'expérience de Bothe et de Geiger

feuille pouvaient arracher des photoélectrons à l'air, aux parois du compteur ou à la feuille de platine. Le compteur de droite, lui, ne réagissait presque pas aux photons, car ces derniers sont très peu absorbés par l'hydrogène, mais réagissait fortement aux électrons de recul. Comme on ne pouvait pas s'attendre à ce que chaque photon pénétrant dans le compteur de gauche le mette en action, chaque déviation de l'électromètre relié au compteur de droite ne pouvait pas correspondre à la déviation de l'électromètre du compteur de gauche. Et, au contraire, si la coïncidence se réalisait, alors à chaque déviation du compteur de quanta devait correspondre une déviation du compteur d'électrons. En réalité ce phénomène ne se réalisait pas de façon rigoureuse, mais le nombre de coïncidences était si grand que d'après le calcul statistique de Bothe et de Geiger on pouvait miser 150 000 contre 1 que les coïncidences n'étaient pas dues au hasard et résultaient de la simultanéité de la diffusion et de l'apparition des électrons de recul.

L'expérience de Compton et de Simon et sa modification améliorée réalisée par Krein, Hertner et Tourine furent montées en faisant appel à la chambre de Wilson afin de vérifier l'existence de la relation entre les angles de tir de l'électron de recul et du photon diffusé, exigée par les lois de conservation [voir le diagramme de la fig. 193 et la formule (127.1)] Pour mieux saisir l'idée de cette expérience adressons-nous au diagramme de la figure 193.

Supposons, par exemple, qu'après la diffusion l'électron de recul se dirige dans la direction de la flèche *5* du bas; alors d'après les lois de conservation le photon diffusé doit prendre la direction de la flèche *5* du haut. Les angles entre les flèches *5* du bas et du haut et la flèche *1* satisfont à la relation (127.1). Il est facile de déterminer la direction de la flèche du bas par une expérience réelle, car chaque électron de recul laisse dans la chambre de Wilson une trace visible. Mais le photon n'ionise pas l'air par lui-même; c'est pourquoi la direction de la flèche correspondante du haut ne peut pas être décelée directement dans la chambre de Wilson. Il est possible toutefois de la déterminer par une voie indirecte de la façon suivante : si le photon diffusé est absorbé quelque part à l'intérieur de la chambre, il laissera une longue trace du photoélectron. En réunissant l'origine de cette longue trace avec l'origine de la courte trace de l'électron de recul on peut obtenir les deux flèches. Une certaine indétermination qui reste résulte, toutefois, de l'impossibilité d'affirmer avec certitude que le photon trouvé est justement celui qui dans la diffusion a produit l'électron de recul enregistré. C'est pourquoi on ne peut tirer des conclusions de l'expérience que sur la base des données statistiques suffisamment grandes.

Le schéma de montage de l'expérience est donné à la figure 197.

L'expérience a été réalisée non pas avec des rayons X mais avec les rayons γ durs afin d'augmenter l'énergie des électrons de recul et d'accroître ainsi la précision de l'expérience. La source des rayons γ était placée au bout d'un canal étroit pratiqué dans une épaisse masse de plomb; en sortant de ce canal un faisceau de rayons parallèles filtrés γ pénétrait dans la chambre de Wilson. En guise de corps de diffusion on se servait d'un

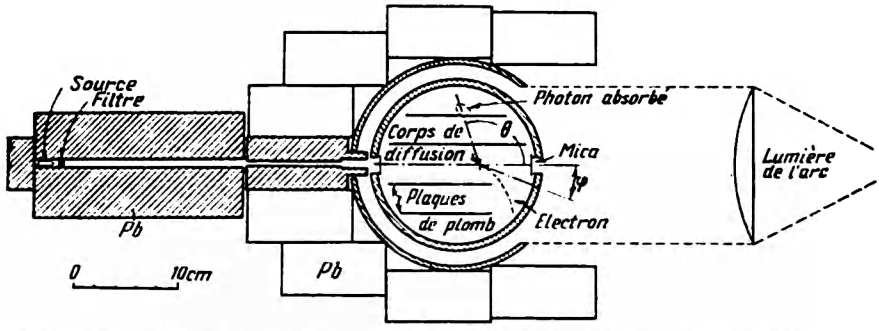


Fig. 197. Schéma de montage de l'expérience de Compton et de Simon (monté par Krein et autres)

morceau de celluloïde placé au centre de la chambre. Pour augmenter la probabilité d'absorption du photon diffusé à l'intérieur de la chambre, de chaque côté du corps diffusant on disposait deux plaques de plomb. La chambre était placée dans un champ magnétique perpendiculaire au plan du dessin. Cela permettait non seulement de trouver la direction du parcours de l'électron de recul, mais également de déterminer d'après la courbure de la trace l'énergie de cet électron (méthode de Skobeltsyne, voir § 126). Ce montage de l'expérience avait l'avantage suivant : d'après l'angle de tir de l'électron de recul et son énergie on pouvait à l'aide de la théorie de Compton trouver l'angle de tir associé du photon diffusé sans faire intervenir des suppositions sur l'énergie du photon incident. Cet avantage est essentiel, car on ne peut être assuré que les rayons primaires γ sont suffisamment filtrés et, par suite, on ne peut de façon certaine attribuer au photon incident une énergie déterminée. Sur la figure 198 on a donné en

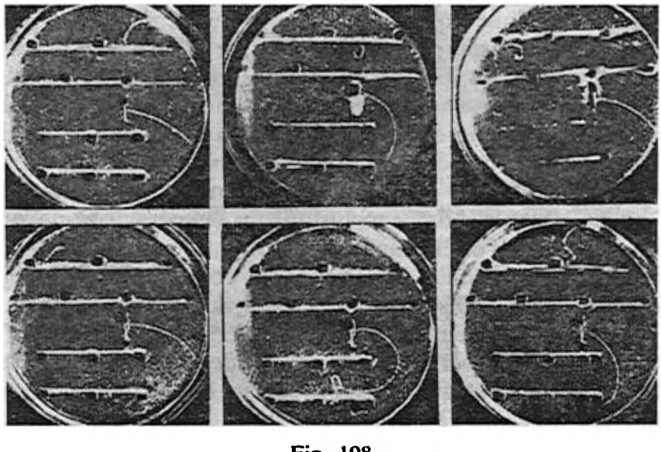


Fig. 198.

qualité d'exemple trois photographies sur lesquelles est vu l'électron de recul (au centre de la chambre) et l'endroit où fut absorbé le photon diffusé (près de la dernière plaque de plomb du haut). Au cours du traitement de ces photographies, d'après l'angle de tir de l'électron de recul et son énergie, on calculait l'angle de tir du photon diffusé et le résultat des calculs était comparé à l'angle trouvé sur la photographie. On a pris en tout près de 10 000 photographies sur lesquelles on détecta 300 combinaisons électron-photon. Après traitement on trouva que le nombre de cas dépassant de beaucoup la possibilité de coïncidence aléatoire comprenait celui où l'angle de tir observé du photon diffusé coïncidait avec l'angle donné par le calcul.

Ainsi donc, actuellement il ne peut exister de doute que les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement sont applicables aux événements élémentaires de diffusion des rayons X et γ.

§ 129. Effet Mössbauer

Dans les paragraphes précédents on a vu que la diffusion des rayons X et γ par des électrons libres peut être assimilée à une « collision » élastique du photon avec l'électron. Il est apparu en outre que tous les calculs basés sur l'application aux « collisions » de ce genre des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion conduisent à des résultats rigoureusement confirmés par l'expérience.

Mais la loi de conservation de l'impulsion intervient non seulement au cas de la diffusion, mais dans toutes interactions des photons avec des objets atomiques, en particulier, elle doit s'appliquer à l'absorption et à l'émission de photons par les atomes.

On connaît dans l'optique un phénomène dénommé radiation de résonance. Il consiste dans l'absorption par les atomes et souvent avec une très grande probabilité de la lumière de fréquence correspondant à la différence d'énergies du niveau normal et du niveau excité voisin. Ayant absorbé la lumière de cette fréquence l'atome passe à l'état excité puis après un intervalle de temps égal à la durée de vie en état excité ($\tau \sim 10^{-7}$ à 10^{-8} s) émet de nouveau un photon *de même fréquence*. Pratiquement ce phénomène s'observe quand les atomes absorbants et émetteurs appartiennent à une même substance. Par exemple, si l'on éclaire des vapeurs de sodium par la lumière de la raie jaune ($\lambda = 5889{,}6$ Å) émise par les atomes excités du sodium, cette lumière sera intensément absorbée par les atomes du sodium qui à leur tour émettront une lumière de même longueur d'onde. D'où l'appellation de radiation de résonance. Un phénomène analogue s'observe avec des vapeurs de mercure et dans un grand nombre d'autres cas.

Dans la discussion des conditions de l'apparition de cette radiation de résonance on n'attache de l'importance qu'à un seul fait, notamment à ce que la fréquence du photon absorbé soit telle que l'énergie du photon $h\nu$ puisse suffire à la transition de l'atome du niveau normal au niveau excité le plus voisin, c'est-à-dire qu'on ait l'égalité $h\nu = E_2 - E_1$. En d'autres termes,

on tient compte de la loi de conservation de l'énergie sans attacher de l'importance à la condition de conservation de l'impulsion.

Les noyaux des atomes possèdent également des niveaux quantiques d'énergie, normal et excité, et les transitions entre ces niveaux conduisent à l'apparition du rayonnement électromagnétique de courte longueur d'onde sous la forme de rayons γ. Cependant, les tentatives de réaliser avec les rayons γ une absorption de résonance n'ont pendant longtemps abouti à aucun résultat. La cause en était dans le fait que lors de ces tentatives on ne se guidait que de la loi de conservation de l'énergie, autrement dit, on rapportait automatiquement sur les noyaux des atomes et les rayons γ tout ce qui était connu sur l'enveloppe électronique et la partie optique du spectre. Or le fait que la fréquence et, par suite, l'énergie et l'impulsion des photons γ sont de plusieurs ordres de grandeur supérieures à la grandeur correspondante des photons de la partie optique du spectre oblige à tenir compte tant de la loi de conservation de l'énergie que de la loi de conservation de l'impulsion non seulement dans le cas de l'étude de la diffusion mais aussi dans la discussion des conditions de l'absorption des rayons γ.

Examinons cette question plus en détail. Si le photon, telle une véritable particule matérielle, possède une impulsion, le processus de son rayonnement par l'atome ou le noyau doit s'accompagner d'un recul, exactement de la même façon qu'un coup de feu tiré par un canon produit un recul dont la conséquence est le mouvement du canon dans le sens opposé à celui du projectile. Si dans le cas de l'atome l'impulsion de recul est suffisamment grande pour communiquer à l'atome « ayant éjecté » le photon une vitesse non nulle, alors nonobstant que dans le système de coordonnées de l'atome lui-même soit libérée une énergie égale à la différence des niveaux E_2-E_1, dans le système de coordonnées du laboratoire (voir § 45) l'énergie du photon libéré sera quelque peu *inférieure* à cette grandeur, car une partie de l'énergie sera dépensée à communiquer à l'atome une vitesse par suite du recul. De la même façon au cours de l'absorption l'énergie nécessaire à la réalisation de la transition quantique $E_1 \to E_2$ dans le système de coordonnées de l'atome est égale à E_1-E_2, mais dans le système de coordonnées du laboratoire pour réaliser cette transition il faut dépenser une énergie un peu *supérieure*, car, par suite de l'impulsion du photon (pression de radiation), une partie de cette énergie doit servir à la communication d'une certaine vitesse à tout l'atome.

A ces considérations qualitatives il est facile de donner une forme quantitative. L'impulsion de recul p reçue par le noyau émettant un photon est égale à $h\nu_0/c$, tandis que l'énergie cinétique acquise par l'atome par suite du recul est égale à

$$R=\frac{p^2}{2M}=\frac{(h\nu_0)^2}{2Mc^2}, \tag{129.1}$$

où M est la masse du noyau. Mais en vertu de la loi de conservation de l'énergie cette énergie est prise aux dépens de la différence des énergies des niveaux E_r-E_1 la transition entre lesquels en l'absence de dépenses pour le

recul conduirait à l'émission d'un photon d'énergie $h\nu_0=E_2-E_1$. Ainsi donc, le photon libéré doit posséder l'énergie

$$h\nu_{\text{ém}}=h\nu_0-R. \tag{129.2}$$

Inversement, pour exciter le noyau en lui communiquant l'énergie E_2-E_1 il faut dépenser une énergie supérieure à $h\nu_0$ d'une quantité R : l'excès d'énergie est transmis à l'atome (ou au noyau), ce qui est nécessaire pour satisfaire à la loi de conservation de l'impulsion. De sorte que

$$h\nu_{\text{ab.}}=h\nu_0+R. \tag{129.3}$$

Donc les fréquences des raies d'émission et d'absorption sont déplacées l'une par rapport à l'autre d'une grandeur $\nu_{\text{ab.}}-\nu_{\text{ém.}}=\Delta\nu$ satisfaisant à la condition $h\,\Delta\nu=2R$.

Calculons maintenant la quantité R pour deux cas : a) pour le milieu du spectre visible; b) pour le rayonnement γ. Soit, par exemple, dans le cas a) $\lambda=5000$ Å$=5\cdot10^{-5}$ cm et le nombre de masse de l'atome $M=100$ unités atomiques. Calculons en électrons-volts les quantités $h\nu_0$ et Mc^2 (1 eV$=1{,}6\cdot10^{-12}$ erg) :

$$h\nu_0=\frac{hc}{\lambda_0}=\frac{6{,}6\cdot10^{-27}\cdot3\cdot10^{10}}{5\cdot10^{-5}\cdot1{,}6\cdot10^{-12}}\approx2{,}5\text{ eV},$$

$$Mc^2=\frac{100\cdot1{,}7\cdot10^{-24}\cdot9\cdot10^{20}}{1{,}6\cdot10^{-12}}\approx10^{11}\text{ eV}.$$

D'où

$$R=\frac{(h\nu_0)^2}{2Mc^2}=\frac{(2{,}5)^2}{2\cdot10^{11}}=2{,}7\cdot10^{-11}.$$

Dans le cas b) posons pour la valeur du photon des rayons γ $h\nu_0=$ $=500$ keV$=5\cdot10^5$ eV et M, comme auparavant, égal à 100 unités atomiques. Ici

$$R=\frac{(5\cdot10^5)^2}{2\cdot10^{11}}=1{,}25\text{ eV}.$$

Donc, dans le cas a) $h\,\Delta\nu=6\cdot10^{-11}$ eV, c'est-à-dire que les raies d'absorption et d'émission sont pratiquement complètement superposées grâce à quoi l'absorption par résonance peut se réaliser. Au contraire, dans le cas b) les maximums d'absorption et d'émission sont décalés d'une grandeur égale à $2R$ et séparés par une grande distance (2,5 eV). Sur la figure 199 on a donné la disposition relative des courbes d'émission et d'absorption du rayonnement γ avec photon d'énergie $h\nu_0=129$ keV émis par l'isotope radioactif de l'iridium ^{191}Ir. Il est clair qu'une portion infime de noyaux non excités de ^{191}Ir est capable de subir une capture par résonance de rayonnement $h\nu_0=129$ keV.

Pour améliorer la superposition des deux courbes et, par suite, rendre possible l'observation d'une absorption par résonance on a proposé et utilisé avec succès le décalage de la fréquence de la raie d'émission produit par l'effet Doppler. Dans le cas de la raie de ^{191}Ir $h\nu_0=129$ keV et comme

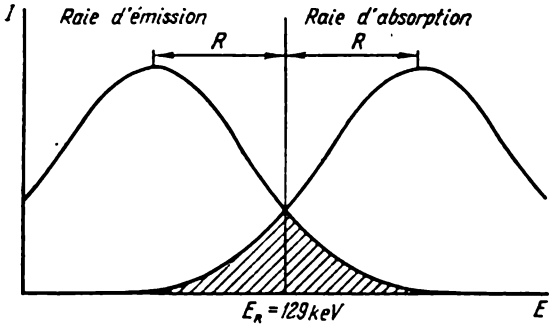


Fig. 199. Disposition et forme des raies d'émission et d'absorption des rayons γ de ^{191}Ir d'énergie de transition de 129 keV à $T = 300$ °K

le montre le calcul pour compenser le déplacement $2R$ la vitesse de la source doit être égale à $1{,}1 \cdot 10^5$ cm/s. Le schéma de montage de l'expérience est représenté à la figure 200. S y est la source du rayonnement γ fixée sur le rotor d'une ultracentrifugeuse pouvant tourner rapidement; la vitesse de rotation pouvait être variée. Sur le tronçon du parcours représenté par un arc au trait gras M les rayons γ émanant de la source pouvaient sortir à l'extérieur de la caisse de protection en Pb; le nombre de photons après la traversée de l'absorbeur A était calculé par le compteur de photons C. En faisant varier la vitesse de rotation de la centrifugeuse on modifiait, par suite de l'effet Doppler, la fréquence des rayons γ. Il est évident que plus la compensation du décalage relatif des courbes d'absorption et d'émission sera complète, *plus forte* sera l'absorption au sein de l'absorbeur A et *plus faible* sera le nombre de photons enregistrés par le compteur. C'est par cette voie qu'on est arrivé à détecter une faible absorption par résonance.

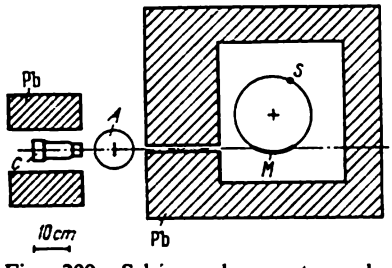


Fig. 200. Schéma de montage de l'expérience permettant d'observer l'absorption de résonance des rayons γ

L'étude de l'émission par résonance des rayons γ est entrée dans une nouvelle phase quand en 1958 le physicien allemand R. Mössbauer découvrit un phénomène nouveau fort remarquable. Il n'est pas possible de s'arrêter sur la théorie de ce phénomène (effet Mössbauer) et on se limitera*) à un simple rappel. L'essentiel est que le noyau excité, considéré jusque-là comme libre, fait partie, en réalité, d'un réseau cristallin dont les atomes effectuent des vibrations autour d'une position d'équilibre, c'est-à-dire constituent des oscillateurs. Il est clair que dans ce cas quand l'*énergie*

*) Voir G. Wertheim, *Mössbauer Effect. Principles and Applications*, New York, 1964.

moyenne de recul engendrée par l'émission ou l'absorption est de beaucoup inférieure à l'énergie de l'oscillateur du réseau la plupart des transitions dans le noyau ne s'accompagnent pas d'un transfert d'énergie aux oscillateurs, c'est-à-dire qu'elles s'effectuent *sans recul*. Dans ce cas dans le domaine du rayonnement γ comme dans le domaine optique il est possible d'obtenir une résonance totale. Les raies d'absorption et d'émission se caractérisent dans ces conditions par une largeur intrinsèque (voir § 72) qui dans le domaine du rayonnement γ est très étroite, comme on peut le constater d'après les chiffres donnés plus bas.

Pour le montrer et en même temps mesurer la forme de la courbe d'absorption Mössbauer utilisa le montage de l'expérience représentée à la figure 200. En faisant tourner la source d'émission à des vitesses différentes il modifiait aux dépens de l'effet Doppler la fréquence du rayonnement γ traversant l'absorbeur A. L'intensité du rayonnement derrière l'absorbeur enregistrée par le compteur caractérisait l'intensité d'absorption en A. Il apparut que si l'absorption était « sans recul », la résonance était particulièrement aiguë. Les données suivantes permettent d'en juger : dans le cas de ^{191}Ir le rayonnement γ avec un photon de 129 keV indiquait une faible résonance pour des vitesses du rotor de quelques dizaines de milliers de cm/s. Au contraire, dans des conditions de résonance sans recul il suffisait d'une vitesse de quelques cm/s pour supprimer complètement l'absorption nucléaire; par exemple, l'absorption diminue de moitié pour une vitesse de 1,5 cm/s! La courbe de la figure 201 le montre bien (voyez tout particulièrement l'échelle des v en cm/s). La démi-largeur de la raie d'absorption montrée sur cette figure constitue en tout $4{,}6 \cdot 10^{-6}$ eV.

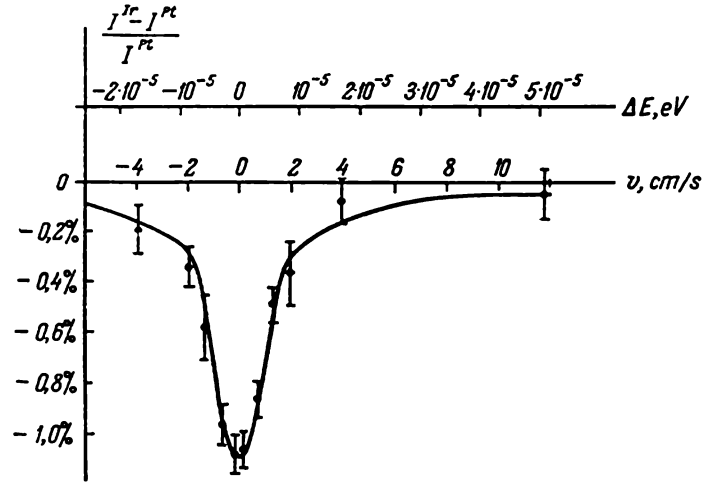


Fig. 201. Courbe d'absorption en résonance sans recul dans le cas de ^{191}Ir. Les limites de l'erreur pour chaque point observé sont indiquées par des petits traits verticaux

L'image donnée de l'absorption par résonance souffre d'un certain simplisme. En réalité, la raie caractérisée seulement par sa largeur intrinsèque n'est pas l'unique conséquence de l'absorption, mais se superpose sur un fond beaucoup plus large. La hauteur (ou, plus précisément, la profondeur; voir fig. 201) du maximum de cette raie est déterminée par la probabilité de l'absorption sans recul qui est de beaucoup inférieure à 100 %. La théorie quantique de ce processus développée par Mössbauer conduisit à des formules permettant de prévoir les conditions favorables à l'observation d'une absorption par résonance sans recul.

Les propriétés de l'isotope ^{191}Ir donné en qualité d'exemple ($h\nu_0$= =129 keV) sont telles que pour observer l'absorption par résonance il faut refroidir l'échantillon jusqu'à la température de l'hélium liquide (T=4,2 °K). Pour juger de la finesse de la raie de rayonnement on peut s'adresser au rapport de la demi-largeur de la raie Γ (exprimée en unités énergétiques) à l'énergie du photon E; pour cette raie il est égal à $\Gamma/E=2\cdot10^{-11}$ et de 10^4 fois inférieur à la grandeur correspondante de la partie visible du spectre.

L'isotope du fer ^{57}Fe possède des propriétés encore plus favorables. Il permet d'observer l'absorption par résonance déjà à la température ambiante. Le rapport Γ/E dans ce cas est égal à $3\cdot10^{-13}$, c'est-à-dire est encore de deux ordres de grandeur inférieur que pour ^{191}Ir. On connaît également une série d'autres isotopes pour lesquels l'effet Mössbauer est observé.

§ 130. Quelques applications de l'effet Mössbauer

La largeur inhabituellement faible de la raie d'émission de résonance dans l'effet Mössbauer et surtout dans le cas de la raie de 14,4 keV ^{57}Fe permet de mettre en évidence certains effets importants et particulièrement fins. On examinera ici deux applications possibles de l'effet Mössbauer : l'effet Doppler du second ordre et le déplacement des raies spectrales dans le champ de gravitation (le soi-disant « déplacement vers le rouge » dans le champ de gravitation).

A. Effet Doppler du second ordre. Il est connu de l'optique que le déplacement de la raie spectrale par suite de l'effet Doppler est égal à

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{v}{c}=\cos\alpha,$$

où v est la vitesse de la source de lumière et α l'angle que fait la direction de la vitesse de la source avec celle du rayon visuel. La fréquence observée est égale à

$$\nu=\nu_0\left(1-\frac{v}{c}\cos\alpha\right). \qquad (130.1)$$

Dans la déduction de cette formule on n'a pas tenu compte qu'en relativité restreinte en passant à un autre système de coordonnées en mouvement de translation uniforme par rapport au premier référentiel, se transfor-

ment non seulement les coordonnées spatiales (voir § 67), mais aussi le temps. Si l'on tient compte de la transformation du temps, alors au lieu de (130.1) on obtient*)

$$\nu=\frac{\nu_0\left(1-\frac{v}{c}\cos\alpha\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{130.2}$$

Ainsi donc, la théorie de la relativité exige qu'à côté du déplacement homogène à la première puissance du rapport v/c il existe un effet proportionnel au carré de ce rapport et indépendant de la direction de la vitesse. Pour le cas où $v/c\ll 1$ on a

$$\nu=\nu_0\left[1-\frac{v}{c}\cos\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\ldots\right].$$

Il est évident que l'effet relativiste dépendant de $(v/c)^2$ est fortement dépassé par l'effet du premier ordre de beaucoup plus grand. C'est pourquoi, la détection et la mesure de l'effet du second ordre s'avère être une opération délicate.

Ives qui fut le premier à vérifier la formule (130.2) sur la base de la raie H_β de l'hydrogène, émise par les atomes rapides des rayons positifs, élimina l'effet du premier ordre en photographiant le spectre sur une même plaque une fois dans le sens des rayons positifs ($\alpha=0$) et une autre dans le sens opposé ($\alpha=180°$). Cela donne

$$\nu_1=\nu_0\left[1-\frac{v}{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right],$$

$$\nu_2=\nu_0\left[1+\frac{v}{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right].$$

D'où l'on tire le déplacement relativiste indépendant du signe de v en prenant la moyenne

$$\bar{\nu}=\frac{\nu_1+\nu_2}{2}=\nu_0\cdot\frac{1}{2}\frac{\overline{v^2}}{c^2} \quad \text{et} \quad \Delta\nu=\nu_0-\bar{\nu}=\nu_0\left(1-\frac{\overline{v^2}}{2c^2}\right).$$

L'intérêt ainsi que l'importance de cet effet résident dans le fait qu'il s'y manifeste l'effet relativiste du « ralentissement du temps » dans des systèmes mobiles. En effet, puisque la fréquence émise caractérise un processus rigoureusement périodique, l'atome rayonnant peut être assimilé à une « horloge ». Mais d'après la transformation de Lorentz pour le temps (§ 61) l'intervalle de temps $\Delta t'$ dans un système de coordonnées mobile est lié à l'intervalle de temps Δt du système de coordonnées du laboratoire par la relation

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cong\Delta t'(1+v^2/2c^2).$$

*) Voir, par exemple, P. Bergman, *Introduction to the Theory of Relativity*, New York, 1942.

Par suite

$$\Delta t' = \Delta t(1 - v^2/2c^2), \tag{130.3}$$

c'est-à-dire que dans un système en mouvement il se produit un « ralentissement du temps » suivant les formules de l'effet Doppler du second ordre.

L'effet Doppler du second ordre s'observe distinctement dans le processus d'absorption et d'émission par résonance sans recul. Grâce aux oscillations thermiques les noyaux du réseau cristallin se trouvent en perpétuel mouvement autour de la position d'équilibre. Par suite la vitesse moyenne $\bar{v}$ et partant l'effet Doppler du premier ordre sont nuls. Par ailleurs la vitesse quadratique moyenne $\overline{v^2}/c^2$ durant la vie moyenne du noyau radioactif (dans le cas du ^{57}Fe elle est de 10^{-7} s) acquiert une valeur stable (les périodes de vibrations du réseau sont de l'ordre de 10^{-12} s^{-1}). Comme la largeur de la raie de Mössbauer pour le ^{57}Fe est très faible ($\Gamma/E = 3 \cdot 10^{-13}$), déjà pour un « désaccord » des fréquences de l'émetteur et de l'absorbeur de $10^{-12}\nu$ la résonance est pratiquement complètement levée. Mais la fréquence d'un système mobile (noyau rayonnant) est liée à la fréquence du système du laboratoire (noyau absorbant) par la relation

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} = \nu(1 + v/c - v^2/2c^2);$$

et en prenant la moyenne on a

$$\nu' = \nu(1 - \overline{v^2}/2c^2),$$

autrement dit justement la fréquence correspondant au « ralentissement du temps » relativiste donné par la formule (130.3). Comme cette formule renferme la vitesse quadratique moyenne, l'effet lui-même doit dépendre de la température. C'est pourquoi si les noyaux émetteurs et absorbants se trouvent à la même température, le déplacement dans les deux noyaux sera le même et l'effet ne se manifestera pas. Au contraire, pour des températures différentes de l'émetteur et de l'absorbeur on devrait observer un déplacement relatif des fréquences de transition levant la résonance. Les physiciens américains Pound et Rebka réalisèrent les expériences correspondantes et montrèrent que suivant la différence de température on observe un déplacement coïncidant de façon satisfaisante avec les calculs théoriques pour le cas de ^{57}Fe.

Profitant de l'occasion on fera deux remarques complémentaires :

1. Comme on l'a vu l'effet Doppler du second ordre est une simple conséquence du ralentissement relativiste du temps dans des systèmes en mouvement. Cependant la manifestation de ce ralentissement dans l'effet de Mössbauer et sa confirmation expérimentale justifient non seulement l'effet du ralentissement du temps, mais également le paradoxe dit des « horloges » qui en découle. Ce dernier consiste en ce que deux horloges identiques se trouvant au même endroit peuvent indiquer des temps différents suivant leur préhistoire. Dans le cas considéré le rôle des « horloges » est tenu par les noyaux émetteurs et absorbants. Le noyau absorbant

compare alors (existence d'une résonance totale ou son désaccord) la fréquence (indications) de son horloge avec les indications de l'horloge de l'émetteur, la sensibilité au désaccord (dans le cas de ^{57}Fe elle est de l'ordre de $1:10^{12}$) étant inaccessible par aucune autre méthode. Le fait que pour des températures différentes de l'émetteur et de l'absorbeur on observe un déplacement de la résonance marque justement la dépendance entre les indications des deux « horloges » et leur préhistoire, autrement dit confirme le « paradoxe des horloges ».

2. L'influence de la température sur l'émission et l'absorption par résonance peut également être interprétée de façon énergétique. Cette interprétation est la suivante. Quoique pour toute température l'émission et l'absorption s'effectuent sans recul, c'est-à-dire que l'impulsion $h\nu/c$ du photon γ ne varie pas *du fait du recul*, la quantité $h\nu$ se modifie quelque peu pour une autre raison. La cause en est la suivante : puisqu'au cours du rayonnement le noyau passe de l'état excité à l'état normal, son énergie varie et, par suite, la masse se modifie aussi suivant la relation relativiste $\Delta M = E/c^2$, où E est l'énergie de transition. Et en conséquence variera également l'énergie cinétique moyenne. En effet, puisque $R=p^2/2M$ et $p=h\nu/c=\text{const}$ (rayonnement sans recul), alors

$$\Delta R=\Delta_i\left(\frac{p^2}{2M}\right)=-\frac{p^2\Delta M}{2M^3}=-\frac{p^2E}{2M^2c^2}=-\frac{M^2\overline{v^2}}{2M^2c^2}E=-\frac{\overline{v^2}}{2c^2}E.$$

Puis, puisque l'énergie de transition du niveau excité au niveau normal se répartie entre l'énergie du photon émis et la dépense à l'augmentation de l'énergie cinétique du réseau, l'énergie rayonnée sera égale à

$$E-\frac{v_i^2}{2c^2}E=\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)E,$$

c'est-à-dire que la fréquence du photon rayonné sans recul doit varier d'un facteur $(1-v^2/2c^2)$ identique à celui qu'exige l'effet Doppler du second ordre.

B. Déplacement gravitationnel vers le rouge des raies spectrales. Une des conséquences de la relativité générale accessibles aux vérifications expérimentales est l'action de champ de gravitation sur la fréquence des raies spectrales. Or cet effet est très faible, ainsi, par exemple, la lumière émanant de la surface du Soleil doit subir un déplacement vers le rouge dont la valeur relative est égale à

$$\Delta\lambda/\lambda=2{,}12\cdot10^{-6}.$$

Les mesures astronomiques réalisées depuis 1919 au cours de toutes les éclipses solaires ont confirmé de façon qualitative l'existence de cet effet de « déplacement gravitationnel vers le rouge des raies spectrales » par l'observation du déplacement de la position de l'étoile située près du disque solaire mais par suite de la faible grandeur de ce déplacement les résultats quantitatifs obtenus n'étaient pas convaincants.

La très faible largeur de la raie de Mössbauer et la possibilité qui en découle de détecter le déplacement de la fréquence inférieur à 10^{-12} dans le cas de ^{57}Fe donnait l'espoir de pouvoir observer et mesurer cet effet dans des conditions facilement accessibles de la Terre. Cet espoir se réalisa en pratique.

Notons au préalable que dans le cas général l'effet réside dans la variation de la fréquence du rayonnement électromagnétique à la traversée d'une différence de potentiel gravitationnel. Ce déplacement peut être considéré comme la conséquence du principe d'équivalence de la relativité générale. Ce dernier consiste en ce que dans un volume limité de l'espace le champ de gravitation peut être remplacé par l'accélération constante du système. Soit un laboratoire situé dans un domaine dépourvu du champ de gravitation et supposons que juste au-dessus de l'absorbeur se trouve placée à une distance l une source émettrice identique. Supposons maintenant que ce laboratoire soit soumis à une accélération dirigée vers le haut (c'est-à-dire de l'absorbeur vers la source) et égale à g. Supposons encore que la source émette un signal monochromatique sous forme d'onde électromagnétique de fréquence ν. Le temps mis par le signal pour passer de la source à l'absorbeur est égal à

$$t=l/c;$$

durant ce temps la source acquiert une vitesse

$$v=gt=gl/c$$

et du fait de l'effet Doppler du premier ordre la fréquence reçue par l'absorbeur subit une variation relative

$$\Delta\nu/\nu=v/c=gl/c^2.$$

La fréquence observée est donc égale à

$$\nu'=\nu(1+gl/c^2).$$

Pour les événements se déroulant au sein du « laboratoire » le mouvement uniformément accéléré d'accélération g dirigée vers le haut est équivalent au champ de gravitation dirigé vers le bas avec la même accélération g (« ascenseur » d'Einstein)*).

Sur la base du principe d'équivalence la quantité gl peut être interprétée comme une différence de potentiel de gravitation correspondant à la différence de cotes l. En la désignant par $\Delta\varphi$ écrivons

$$\nu'=\nu(1+\Delta\varphi/c^2).$$

Sous cette forme la formule est également applicable à des champs gravitationnels inhomogènes. Vu la présence de la quantité c^2 de l'ordre

*) Un exposé à la portée d'un lecteur non préparé peut être trouvé dans A. Einstein, *A propos de la théorie de la relativité restreinte et générale*, Recueil de travaux scientifiques, t. I. M. 1965. Voir de même A. Einstein et L. Infeld, *Evolution des idées en physique*, Petite Bibliothèque, Payot, Paris, 1963.

de 10^{21} dans le dénominateur du second terme le déplacement gravitationnel est infiniment petit.

Pour étudier le déplacement gravitationnel de la fréquence Pound et Rebka utilisèrent à l'Université de Harvard l'absorption par résonance du rayonnement de 14,4 keV du ^{57}Fe. Comme $\Delta\nu/\nu$ est proportionnel à la grandeur h, un rôle important est dévolu à la distance des cotes entre la source et l'absorbeur. Mais par suite d'une étonnante sensibilité de l'effet Mössbauer pour le ^{57}Fe il devint possible d'observer le déplacement gravitationnel en plaçant la source émettrice dans la tour du laboratoire de physique de l'Université de Harvard à une hauteur de 21 m au-dessus de l'absorbeur*). Afin d'éviter l'affaiblissement du pinceau par absorption dans l'air la source et l'absorbeur étaient placés dans un cylindre en plastique rempli d'hélium. Les premières expériences se sont heurtées à des difficultés, car on constata des déplacements irréguliers de la fréquence de la source par rapport à la fréquence de l'absorbeur. Mais, bientôt, on s'est aperçu que ces déplacements étaient dus aux variations de la différence de températures entre la source et l'absorbeur qui à leur tour engendraient des désaccords de la résonance du fait de l'effet Doppler quadratique. Le calcul montra que la fluctuation de température de 1° devait entraîner un déplacement presque égal à l'effet gravitationnel. Lorsque la cause des variations irrégulières fut déterminée on commença à contrôler les températures de la source et de l'absorbeur et d'apporter des corrections correspondantes. Les résultats obtenus devinrent alors stables. Le rapport de la moyenne de toutes les mesures à la grandeur théorique gl/c^2 est apparu égal à $0{,}99 \pm 0{,}047$, c'est-à-dire, dans les limites de l'erreur, coïncidait avec la grandeur prévue. Ainsi au bout de quelques semaines fut résolu le problème qui durant plus de 45 ans exigeait auparavant d'énormes efforts de la part des astrophysiciens et des spectroscopistes!

*) Une description détaillée de ces expériences est donnée dans l'article de Pound publié par la revue « Les progrès des sciences physiques », t. 72, n° 4, 1960 (en russe).

CHAPITRE X

ONDES ET PARTICULES

§ 131. Introduction

Dans le chapitre précédent on a montré que les phénomènes optiques (y compris le domaine des rayons X) décèlent une dualité bizarre. A côté des propriétés qui de la façon la plus directe témoignent de la nature ondulatoire de la lumière (interférence, diffraction) il existe d'autres propriétés qui de façon aussi directe font état de sa nature corpusculaire (effet photoélectrique, effet Compton). Quoiqu'il nous est impossible de nous représenter qu'un même objet puisse en même temps être une particule et une onde, on est tout de même obligé pour expliquer toute la série des phénomènes optiques de recourir à ces deux images.

Dans ce chapitre on verra que cette dualité au plus haut degré étonnante apparaît également pour des objets qu'on appelle habituellement particules : électrons, protons, atomes. Il existe un grand nombre d'expériences très connues qui montrent de façon évidente que ces parties élémentaires composant la matière se conduisent comme des particules localisées dans l'espace. Quand on examine les traces de brouillard en chambre de Wilson on n'a aucun doute qu'on est en présence de traces des particules. Et cependant on verra dans ce chapitre qu'il existe d'autres expériences dans lesquelles les mêmes « particules » se comportent comme des ondes susceptibles d'interférer.

Au chapitre précédent on a insisté tout particulièrement sur les phénomènes par lesquels se manifestait la nature corpusculaire de la lumière. Dans ce chapitre on débutera par l'étude détaillée de la *double nature* de la lumière, de cette remarquable conclusion à laquelle en fin de compte aboutit l'étude des fluctuations du champ de radiation (§ 116). Mais comme pour l'exposé ultérieur on aura besoin d'une série d'informations sur la théorie du mouvement ondulatoire on en rappellera auparavant très succinctement certaines notions nécessaires.

§ 132. Onde monochromatique plane dans un milieu homogène

Quand on parle d'ondes on se représente tout d'abord les ondes à la surface de l'eau ou les ondes transversales se propageant le long d'une corde élastique ébranlée périodiquement à son extrémité. Mais quelle que soit la nature de ces ondes leur propagation obéit aux mêmes lois.

Examinons tout d'abord le cas le plus simple de ces ondes, les ondes planes monochromatiques ou harmoniques et choisissons comme direction de propagation de ces ondes l'axe x du système de coordonnées. Ces ondes sont représentées par la formule

$$u=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c'}\right)+\delta\right]. \tag{132.1}$$

a, ω, c' et δ sont ici des constantes dont la signification sera tout de suite définie et u, une quantité représentant un ébranlement se propageant sous forme d'ondes, par exemple, l'écartement de la particule de sa position d'équilibre en cas d'onde élastique, une des composantes de l'intensité du champ électrique ou magnétique pour une onde électromagnétique, etc. La constante a est l'amplitude de l'onde, $[\omega(t-x/c')+\delta]$ est appelé phase de l'onde tandis que la constante δ entrant dans cette phase est dite phase initiale. La surface en tous les points de laquelle la phase a une même valeur est la surface équiphase. Il est évident que dans le cas examiné quand la phase dépend linéairement de la coordonnée x cette surface est un plan $x=\text{const}$ dont la normale coïncide avec l'axe x.

La constante c' entrant dans la phase a la signification suivante. Choisissons une valeur déterminée pour la phase et voyons pour quelles conditions elle conservera une même grandeur lorsque x et t varient. Il est évident que pour que la phase soit constante il faut et il suffit que $t-x/c'=\text{const}$, d'où

$$x=c't+\text{const}.$$

Il s'ensuit que c' est la vitesse de déplacement de la surface équiphase ou la vitesse de phase de l'onde.

Comme x et t entrent dans l'argument de la fonction périodique, l'onde doit présenter une périodicité dans le temps et l'espace. Par suite de la périodicité dans le temps il doit exister un intervalle de temps constant T satisfaisant à la condition

$$\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c'}\right)+\delta\right]=\cos\left[\omega\left(t+T-\frac{x}{c'}\right)+\delta\right].$$

Cela ne peut se produire que dans le cas où $\omega T=2\pi$ ou $\omega=2\pi/T$. Le temps T est appelé période de l'onde, ω pulsation; $1/T$ est la fréquence ν, de sorte que $\omega=2\pi\nu$.

Du fait de la périodicité dans l'espace pour un t donné les mêmes valeurs de u doivent se répéter si x varie d'un certain tronçon λ (longueur d'onde), c'est-à-dire on doit avoir

$$\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c'}\right)+\delta\right]=\cos\left[\omega\left(t-\frac{x+\lambda}{c'}\right)+\delta\right].$$

Cela signifie que $\omega\lambda/c'=2\pi$ ou $\lambda=2\pi c'/\omega=c'/\nu$ ou enfin

$$c'=\frac{\lambda\omega}{2\pi}=\lambda\nu, \tag{132.2}$$

relation liant la vitesse de phase à la longueur d'onde.

Soit maintenant une onde plane se propageant dans une direction quelconque formant avec les axes de coordonnées les angles α, β, γ. Faisons tourner les axes de coordonnées de manière que l'axe x coïncide comme auparavant avec la normale à la surface équiphase. Alors dans ce nouveau système de coordonnées la formule de l'onde plane sera

$$u=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{x'}{c'}\right)+\delta\right].$$

Mais suivant les formules de transformation des coordonnées par rotation des axes

$$x'=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma,$$

si bien qu'on obtient

$$u=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{c'}\right)+\delta\right]=$$

$$=a\cos\left[\left(\omega t-\frac{2\pi(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}{\lambda}\right)+\delta\right]. \qquad (132.3)$$

Dans ce cas l'équation de la surface équiphase sera

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\text{const.}$$

Introduisons maintenant le vecteur $\mathbf{k}$ de direction coïncidant avec la normale positive à la surface équiphase et égal en valeur absolue à

$$|\mathbf{k}|=\frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (132.4)$$

Les composantes de ce vecteur qu'on appellera *vecteur d'onde* ou *vecteur de propagation de l'onde* sont :

$$k_x=\frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \quad k_y=\frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta, \quad k_z=\frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma.$$

Dans ce cas

$$\frac{2\pi(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}{\lambda}=xk_x+yk_y+zk_z=\mathbf{kr}, \qquad (132.5)$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur mené vers un point quelconque de la surface équiphase. A l'aide de (132.5) la formule de l'onde plane se réduit à la forme condensée suivante :

$$u=a\cos[(\omega t-\mathbf{kr})+\delta]. \qquad (132.6)$$

Notons enfin que de même que les formules des oscillations (§ 47) la formule de l'onde plane peut être écrite sous forme de fonction complexe

$$u=ae^{i[(\omega t-\mathbf{kr})+\delta]} \qquad (132.7)$$

ou, en introduisant l'amplitude complexe $A=ae^{i\delta}$,

$$u=Ae^{i(\omega t-\mathbf{kr})}. \qquad (132.8)$$

Dans ce cas on n'utilise que la partie réelle du nombre complexe (132.7) ou (132.8).

§ 133. Equation d'onde

La formule d'onde plane examinée au paragraphe précédent constitue une solution particulière d'une équation différentielle appelée équation d'onde. Par exemple, des équations fondamentales du champ électromagnétique dans le vide (équations de Maxwell) pour toute composante de l'intensité du champ électrique ou magnétique on peut former l'équation du second ordre aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{133.1}$$

où u est une composante quelconque de l'intensité du champ électrique ou magnétique. L'équation (133.1), comme on le démontre dans les cours d'électrodynamique*), décrit les ondes électromagnétiques se propageant dans le vide avec la vitesse c.

Il est facile de se convaincre que la formule de l'onde plane

$$u=Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}=Ae^{i(xk_x+yk_y+zk_z-\omega t)} \tag{133.2}$$

satisfait à l'équation (133.1). En effet, en dérivant (133.2) deux fois en toutes les coordonnées et par rapport au temps on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\omega^2 k_x^2 u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\omega^2 k_y^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\omega^2 k_z^2 u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\omega^2 \nu^2 u.$$

Portant ces dérivées dans (133.1) on obtient après simplifications

$$\frac{\omega^2}{c^2}=k_x^2+k_y^2+k_z^2. \tag{133.3}$$

Cette relation importante reliant la pulsation ω aux composantes du vecteur d'onde est caractéristique pour la nature de l'onde; elle est quelquefois appelée loi de dispersion.

Au lieu d'écrire dans le second membre de (133.1) la somme des dérivées partielles secondes par rapport aux coordonnées on peut lui donner la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace. En écrivant l'équation d'onde sous la forme

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u, \tag{133.4}$$

non seulement on utilise une forme condensée d'écriture, mais on obtient une formule générale, car le laplacien peut être exprimé dans tout système

*) L'équation d'onde des ondes électromagnétiques est directement déduite des équations de Maxwell : voir I. Tamm, *Eléments de la théorie de l'électricité*, M. 1966 (en russe).

de coordonnées. Dans le cas particulier des coordonnées cartésiennes rectangulaires il prend la forme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{133.5}$$

Dans d'autres systèmes de coordonnées le laplacien s'exprime différemment. De toutes ces expressions c'est l'expression du laplacien en coordonnées polaires sphériques qui est la plus importante pour nous. Elle est de la forme :

$$\Delta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{133.6}$$

Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires on peut évidemment effectuer le changement habituel des variables d'après les règles du calcul différentiel. Mais les calculs permettant de passer aux coordonnées spatiales r, ϑ et φ sont si rébarbatifs et fastidieux qu'il n'est pas recommandé de suivre cette voie. Dans les cours d'analyse vectorielle on fournit habituellement une méthode simple et élégante permettant de passer en n'importe quelles coordonnées curvilignes orthogonales et qui est justement utilisée pour obtenir la formule (133.6). Il ne sert à rien d'exposer cette méthode ici*) et on se limitera à donner la formule (133.6) qui en est le résultat.

L'équation d'onde est une équation différentielle linéaire homogène aux dérivées partielles. Comme toute équation linéaire homogène elle jouit de la propriété importante suivante. Supposons qu'on ait trouvé la solution particulière de (133.1) u_1; alors c_1u_1 où c_1 est une constante arbitraire sera également solution de (133.1). Si l'on connaît les solutions particulières u_1 et u_2, alors $u = c_1u_1 + c_2u_2$, où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires, sera également solution de l'équation d'onde (133.1). C'est bien l'argumentation mathématique du principe connu de superposition des petits mouvements ondulatoires qui permet de construire des champs ondulatoires quelconques par superposition d'ondes planes. On utilisera ce principe dans les paragraphes qui suivront.

§ 134. Superposition d'ondes planes

Les ondes planes monochromatiques examinées dans le paragraphe précédent ne se rencontrent jamais dans la nature. En effet, par définition ces ondes constituent des phénomènes rigoureusement périodiques et, par suite, elles doivent avoir une extension infinie dans l'espace et dans le temps. Or les signaux lumineux réels sont toujours limités dans l'espace, sont émis durant des intervalles de temps limités et ne sont donc pas rigoureusement harmoniques (voir § 72). On peut donc les considérer comme des résultats de superposition d'ondes planes rigoureusement harmoniques qui en un

*) Voir, par exemple, V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, T. II, Editions Mir, Moscou, 1970 (traduit du russe).

certain endroit de l'espace sont, par suite d'interférences, mutuellement intensifiées, tandis que dans le reste de l'espace elles s'annulent mutuellement. Ces ondes composées possèdent certaines propriétés importantes qu'on tentera de distinguer tout d'abord sur l'exemple de superposition de deux ondes planes harmoniques seulement.

Supposons que ces deux ondes se propagent le long de l'axe x et que leurs pulsations ω_0 et ω de même que les valeurs absolues du vecteur d'onde k_0 et k ($k_0=2\pi/\lambda_0$, $k=2\pi/\lambda$) diffèrent très peu l'une de l'autre : $k_0-k=\Delta k\to 0$, $\omega_0-\omega=\Delta\omega$. On a donc

$$u_1=a\cos(\omega_0 t-k_0 x), \quad u_2=a\cos(\omega t-kx).$$

Sommant u_1 et u_2 on obtient l'onde composée u :

$$u=u_1+u_2=a\cos(\omega_0 t-k_0 x)+a\cos(\omega t-kx)=$$
$$=2a\cos\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t-\frac{k_0-k}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t-\frac{k_0+k}{2}x\right)$$

ou, par suite du rapprochement de ν_0 et ν, k_0 et k on a approximativement

$$u=2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega_0 t-k_0 x). \tag{134.1}$$

Le résultat obtenu peut être interprété de la façon suivante. Le second facteur de la formule (134.1) $\cos(2\pi\nu_0 t-k_0 x)$ est la phase d'onde de fréquence ν_0 et de nombre d'ondes k_0, et le premier

$$2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta k}{2}x\right)$$

est l'amplitude variant lentement ($\Delta\omega\to 0, \Delta k\to 0$) et en même temps périodiquement. En d'autres termes, l'onde u (134.1) est assimilée à une onde de pulsation ω_0 et de nombre d'ondes k_0 mais à *amplitude modulée*. Il ne faut pas, toutefois, oublier que l'onde décrite par la formule (134.1) n'est, rigoureusement parlant, déjà plus harmonique : l'onde harmonique dans tout l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$ doit avoir une même amplitude et une même pulsation. Or l'onde (134.1) possède une amplitude variant périodiquement et un appareil spectroscopique approprié y décélera non pas une seule pulsation mais deux : ω_0 et ω.

Ce résultat est illustré à la figure 202 où pour un certain moment de temps sont représentés deux secteurs d'ondes harmoniques aux λ_0 et λ peu différents et l'onde résultant de leur superposition. Comme on le voit cette onde composée se divise en une série de groupes aux amplitudes variant suivant la loi des cosinus.

La vitesse de déplacement d'une phase donnée sera appelée *vitesse de phase de l'onde*. Pour la retrouver écrivons la condition de la constance de la phase d'onde

$$\omega_0 t-k_0 x=\text{const}. \tag{134.2}$$

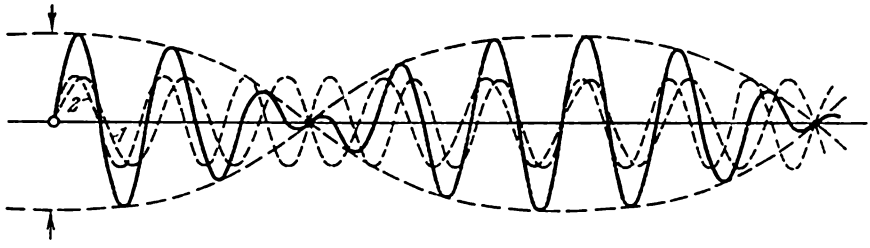


Fig. 202. Formation de trains d'ondes

Tirant de là la dérivée de la coordonnée x par rapport au temps, c'est-à-dire la grandeur $\dot{x}$, on trouvera la vitesse de déplacement des surfaces équiphases, autrement dit la vitesse de phase. De (134.2) on trouve

$$\omega_0 - k_0 \frac{dx}{dt} = 0,$$

d'où en désignant la vitesse de phase par c' :

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad \text{ou} \quad c' = \frac{\omega_0}{2\pi}\lambda_0 = \nu_0\lambda_0, \tag{134.3}$$

relation connue du cours élémentaire de physique et qui s'applique à la *vitesse de phase*.

Cherchons maintenant séparément la vitesse de déplacement d'une amplitude déterminée de l'onde. Il est évident que cette dernière vitesse coïncide avec la vitesse de déplacement du groupe en bloc; elle est par suite appelée *vitesse de groupe*. Pour la trouver écrivons comme précédemment la condition de la constance de l'amplitude :

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x = \text{const}. \tag{134.2'}$$

Tirant x de cette formule on obtient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

La limite de cette expression pour $\Delta k \to 0$ sera appelée *vitesse de groupe*

$$g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{134.4}$$

On voit ainsi que les deux vitesses, celle de phase et celle de groupe, s'expriment par des formules différentes. Pour éclairer la relation entre ces deux vitesses il faut étudier les conditions de propagation des ondes dans des milieux différents. Mais pour cela on doit avant tout extrapoler le résultat obtenu au cas de la sommation de plusieurs ondes et c'est bien ce qu'on réalisera au paragraphe suivant.

§ 135. Paquet d'ondes

Montrons maintenant que par superposition d'ondes planes on peut obtenir un train d'ondes dont l'amplitude est non nulle rien que dans une partie restreinte de l'espace, tandis qu'elle est nulle dans le reste de l'espace. Continuons toujours pour simplifier à examiner des processus linéaires ou, plus précisément, des ondes planes dépendant uniquement d'une coordonnée spatiale x et du temps.

Pour obtenir un train d'ondes présentant une extension limitée dans l'espace il n'est plus suffisant de faire chevaucher deux ondes planes. Il s'avère toutefois que ce train d'onde peut être formé par superposition d'ondes à k variant continûment dans les limites d'un certain intervalle $2\,\Delta k$ dont les dimensions seront définies par la suite. Choisissons dans l'intervalle $2\,\Delta k$ un certain point moyen k_0 et montrons que, dans certaines conditions par suite de la superposition qui maintenant du fait de la variation continue de k doit se représenter non plus par une somme mais par l'intégrale

$$u=\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k)\cos(\omega t-kx)\,dk, \tag{135.1}$$

on peut obtenir un train d'ondes planes limité ou comme on l'appelle un paquet d'ondes.

Quant à l'amplitude $a(k)$ d'ondes sinusoïdales sommées, on admettra qu'elle est constante dans tout l'intervalle $\pm\Delta k$ et égale à $a(k_0)$. La variation de la pulsation ω en fonction de k est exprimée en général par la loi de dispersion des ondes de la nature considérée (voir § 133). Mais quelle que soit cette loi, pour un petit intervalle Δk on peut représenter $\omega(k)$ sous forme d'une série de puissances

$$\omega(k)=\omega(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}+\frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k=k_0}+\ldots \tag{135.2}$$

Calculons maintenant de façon approchée l'intégrale (135.1) en posant que l'intervalle $k-k_0$ est si petit que dans (135.2) on peut négliger tous les termes à partir du troisième, c'est-à-dire choisir pour $\omega(k)$ l'expression linéaire

$$\omega(k)=\omega(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}.$$

Portant cette expression de $\omega(k)$ dans (135.1) on obtient

$$u=a(k_0)\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}\cos\left[\omega t+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-kx\right]dk.$$

Cette intégrale se calcule facilement et on trouve après passage aux limites et la multiplication du numérateur et du dénominateur par Δk

$$u=2a(k_0)\,\Delta k\,\frac{\sin \Delta k\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-x\right]}{\Delta k\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-x\right]}\cos(\omega_0 t-k_0 x). \qquad (135.3)$$

Ce résultat peut être interprété de façon analogue à l'interprétation de la formule (134.1) au paragraphe précédent : le facteur $\cos(\omega_0 t-k_0 x)$ de (135.3) est lié à la phase du processus complexe étudié, quant au facteur qui le précède, c'est l'amplitude variable (modulée). Désignant

$$\Delta k\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-x\right]=\xi,$$

on voit que la nature des variations de l'amplitude est définie par le facteur $\frac{\sin\xi}{\xi}$. Ce facteur de modification a été déjà rencontré au § 74; en modifiant l'argument ses variations prennent la forme :

$$\text{pour } \xi\to 0 \quad \lim \frac{\sin\xi}{\xi}=1,$$

$$\text{pour } \xi=\pm\pi \quad \frac{\sin\xi}{\xi}=0.$$

Dans un accroissement ultérieur de la valeur absolue de ξ la fonction $\frac{\sin\xi}{\xi}$ passe par une série de maximums et de minimums. Toutefois, leur valeur est petite par rapport au maximum principal pour $\xi=0$ et décroît rapidement avec l'accroissement de l'argument. On peut donc conclure que pratiquement la superposition permet d'obtenir un seul groupe dont l'amplitude ne diffère de zéro que dans un domaine limité et y varie comme $\frac{\sin\xi}{\xi}$. Sur la figure 203 est représentée « une photographie instantanée » d'un tel groupe, c'est-à-dire sa forme en un certain moment de temps.

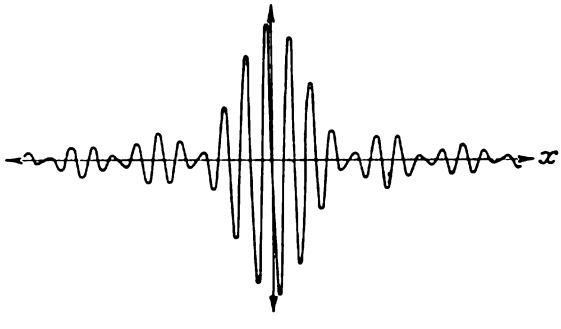


Fig. 203. Paquet d'ondes

La formule (135.3) montre que dans le cas d'un paquet d'onde tout comme dans celui de la somme de deux ondes planes examiné au paragraphe précédent on peut parler de deux vitesses, celle de phase et celle de groupe. La phase comme on l'a indiqué entre dans le facteur $\cos(\nu_0 t - k_0 x)$; en égalant la phase $(\omega_0 t - k_0 x)$ à la constante et en dérivant on trouve la vitesse de phase égale, comme dans le paragraphe précédent, à

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0}.$$

Le facteur modulant l'amplitude $\frac{\sin\xi}{\xi}$ pour $\xi \to 0$ a une valeur constante égale à l'unité. Pour $\xi = 0$ on a

$$x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t = 0.$$

Cela montre que la surface équiamplitude est une surface se déplaçant avec la vitesse

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 = g. \tag{135.4}$$

On voit que l'expression de la vitesse de déplacement de la surface équiamplitude correspond à celle trouvée au paragraphe précédent pour la vitesse de groupe (134.3). C'est bien en même temps la vitesse de déplacement du paquet en bloc.

Il faut maintenant rappeler que tous les résultats obtenus jusque-là sont en relation avec l'approximation adoptée dans la formule (135.3) en négligeant dans le développement de $\omega(k)$ les termes d'ordre supérieur au premier; on doit maintenant examiner l'influence de cette approximation sur le résultat. Si la dérivée seconde $(d^2\omega/dx^2)_0$ est nulle (ce qui a lieu en l'absence de dispersion dans le milieu), les résultats se conservent. Si $d^2\omega/dk^2 \neq 0$, on observe la propriété bizarre suivante du paquet : le paquet ne maintient pas sa forme et se déforme avec le temps en s'étalant progressivement. Si toutefois la dispersion est faible de sorte que $d^2\omega/dk^2$ est proche de zéro, on peut parler d'une forme déterminée du paquet et de son déplacement en bloc avec une vitesse de groupe g.

On obtient ainsi une description complète du train d'ondes formé. Soulignons maintenant la particularité suivante de ce train d'ondes : quoique dans la formule du paquet (135.3) entre le facteur de phase avec ω_0 et k_0 bien déterminés, en réalité *on a affaire à un processus complexe auquel on ne peut associer des ondes de longueur d'onde bien déterminée.* Au contraire, puisque pour la formation du paquet il est nécessaire de superposer plusieurs ondes sinusoïdales avec un k variant continûment l'analyse spectrale de ce paquet le développera en tout une bande du spectre continu. En outre il apparaît que pour la formation du paquet d'ondes d'extension Δx l'intervalle du spectre continu Δk ne peut être inférieur à une certaine grandeur déterminée.

Cherchons maintenant une relation très importante pour la suite entre Δk et Δx. Examinons pour cela le paquet à un certain moment de temps $t=0$. La forme du paquet est alors déterminée par le facteur

$$\frac{\sin \Delta k \cdot x}{\Delta k \cdot x} = \frac{\sin \xi_0}{\xi_0},$$

où $\xi_0 = \Delta k \cdot x$. Ce facteur devient nul pour $\xi_0 = \pm\pi$. Si l'on prend pour origine des coordonnées le point de l'axe correspondant au maximum principal (c'est-à-dire le point correspondant à $\xi_0 = 0$), les coordonnées des premiers minimums à gauche et à droite de ce maximum seront $\pm\Delta x/2$. Comme les maximums suivants diminuent rapidement en grandeur (voir § 74 où est examinée en détail la variation de la fonction $\frac{\sin \xi}{\xi}$) on peut admettre approximativement pour l'extension du paquet le segment Δx entre les deux premiers maximums symétriques. On a pour eux la condition

$$\Delta k \cdot \frac{\Delta x}{2} = \pi,$$

d'où l'on tire $\Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$.

Si l'on avait voulu déterminer l'extension du paquet avec plus de précision en prenant pour sa longueur la distance entre les deux minimums suivants symétriques par rapport à l'origine des coordonnées, on aurait alors $\Delta k \cdot \Delta x = 4\pi$ et en général

$$\Delta k \cdot \Delta x \geqslant 2\pi. \tag{135.5}$$

Jusque-là on avait examiné la formation des groupes à une dimension ou des « groupes linéaires » pour l'obtention desquels on faisait la somme des ondes monochromatiques aux vecteurs $\mathbf{k}$ de même direction. Tous les raisonnements précédents étant justes pour chacun des trois axes de coordonnées, pour former le paquet spatial d'extension suivant les axes de coordonnées Δx, Δy, Δz il faut remplir les trois conditions :

$$\Delta x \Delta k_x \geqslant 2\pi, \quad \Delta y \Delta k_y \geqslant 2\pi, \quad \Delta z \Delta k_z \geqslant 2\pi. \tag{135.6}$$

On voit qu'entre l'extension spatiale du paquet à un moment donné ($t=0$) et le spectre continu des ondes sinusoïdales nécessaires pour la formation de ce paquet on retrouve la même relation de réciprocité qu'on avait dégagée au § 74 pour la fonction du temps $f(t)$ et la distribution des amplitudes en fréquences. A l'onde sinusoïdale e^{ikx} d'extension infinie correspond un k déterminé (une longueur d'onde λ déterminée). Mais si l'onde est limitée dans l'espace, alors k n'est plus déterminé et inévitablement apparaît un spectre de longueurs d'ondes de largeur Δk telle que $\Delta x \Delta k \sim 2\pi$.

§ 136. Vitesses de phase et de groupe

Examinons maintenant ces deux vitesses, celle de phase et celle de groupe, et comparons-les dans les deux cas :

1. Le cas où la vitesse de phase des ondes sinusoïdales formant le

paquet est indépendante de k. On dit des milieux possédant cette propriété qu'ils ne sont pas dispersifs.

2. Le cas où le milieu est dispersif, c'est-à-dire quand la vitesse de phase est fonction de k.

Prenons le cas (1). De la formule de la vitesse de phase $c'=\omega/k$ on tire $\omega=c'k$. Calculons maintenant la vitesse de groupe

$$g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d}{dk}(c'k)=c'.$$

Ainsi donc, en l'absence de dispersion la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont identiques.

Dans le cas (2) c' est fonction de k et, par suite,

$$g=\frac{d}{dk}(c'k)=c'+k\frac{dc'}{dk}. \tag{136.1}$$

Le deuxième terme du second membre se transforme ainsi :

$$\frac{dc'}{dk}=\frac{dc'}{d\lambda}:\frac{dk}{d\lambda}=\frac{dc'}{d\lambda}:\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)=-\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{dc'}{d\lambda}.$$

Portant dans (136.1) il vient

$$g=c'-\lambda\frac{dc'}{d\lambda}. \tag{136.2}$$

On voit qu'en présence d'une dispersion la vitesse de groupe est différente de la vitesse de phase, notamment suivant le signe de la dérivée $\frac{dc'}{d\lambda}$ la vitesse de groupe peut être soit inférieure à la vitesse de phase $\left(\frac{dc'}{d\lambda}>0\right)$, soit supérieure $\left(\frac{dc'}{d\lambda}<0\right)$. En optique les deux cas se présentent : 1) pour une dispersion normale avec l'accroissement de λ l'indice de réfraction μ (c'est-à-dire le rapport c/c' où c est la vitesse de la lumière dans le vide) diminue, autrement dit, c' augmente et $\frac{dc'}{d\lambda}>0$; 2) pour une dispersion anomale s'observant à l'intérieur des bandes d'absorption la relation entre μ et λ est inverse et, par suite, $\frac{dc'}{d\lambda}<0$. Ainsi donc, dans le cas d'ondes lumineuses dans le vide les deux vitesses sont les mêmes; dans un milieu où la dispersion est normale $g<c'$, si elle est anomale $g>c'$.

Une question se pose : laquelle de ces deux vitesses est mesurée dans l'expérience de la détermination de la vitesse de la lumière. L'analyse des différentes méthodes de mesure de la vitesse de la lumière montre qu'aucune d'entre elles ne permet de déterminer la vitesse de phase, mais toutes donnent la vitesse de groupe. C'est la conséquence du fait que dans les différentes méthodes de détermination de la vitesse de la lumière on obtient ou bien la vitesse d'un signal déterminé (méthode de Rœmer d'éclipse des satellites de Jupiter), ou bien la vitesse d'un train d'ondes limité que laisse passer une roue à dents tournante (méthode de Fiseau). Mais tout train d'ondes limité

peut être analysé en faisant appel à l'intégrale de Fourier et être représenté comme le résultat de superposition d'ondes planes monochromatiques. Cela signifie que tout train d'ondes limité constitue un paquet d'ondes et on mesure la vitesse du paquet, c'est-à-dire la vitesse de groupe. Moins évidente est l'application de ce raisonnement au cas d'aberration de la lumière; néanmoins l'analyse effectuée par P. S. Ehrenfest montra que dans ce cas on détermine la vitesse de groupe et non pas la vitesse de phase*).

Il s'ensuit que la vitesse de phase est une grandeur inaccessible aux mesures directes. Mais dans la propagation d'ondes spatialement limitées (c'est-à-dire de paquet d'ondes) dans un milieu dispersif la notion même de vitesse de phase perd son sens intrinsèque, car dans ce cas on a affaire non pas à une phase mais à des phases d'une multitude d'ondes sinusoïdales se propageant chacune avec sa vitesse propre.

Une analyse plus profonde montre que la variation de la vitesse de déplacement de la surface équiphase pendant la propagation de l'onde dans un milieu rempli de résonateurs s'explique par le déphasage occasionné par des oscillations forcées des résonateurs sous l'action de l'onde passante. Il en découle que la vitesse de phase en accord absolu avec son appellation ne donne que la vitesse de déplacement d'une phase déterminée et, comme le montre une analyse plus poussée, n'a aucun rapport ni avec la vitesse de déplacement du front d'un train d'ondes limité dans l'espace ni avec la vitesse de déplacement de l'énergie. C'est bien pourquoi l'apparition d'une vitesse de phase supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide ne contredit aucunement l'affirmation de la théorie de la relativité que la vitesse de la lumière dans le vide est une vitesse limite.

En particulier on démontre dans l'optique que la vitesse du front d'onde, quelles que soient les conditions, est égale à c, c'est-à-dire à la vitesse de la lumière dans le vide**).

§ 137. Dualité onde-corpuscule. Réfraction de la lumière

L'étude des fluctuations du champ de radiations lumineuses (§ 116) a conduit à la conclusion que les propriétés ondulatoires et corpusculaires constituent deux aspects équivalents d'un même phénomène, le champ de radiations lumineuses. Dans ce paragraphe et les deux paragraphes suivants on montrera sur la base d'autres exemples que toute une série de phénomènes optiques peut être envisagée aussi bien du point de vue ondulatoire que corpusculaire.

On commencera par l'étude du phénomène dont les possibilités d'interprétation sous ces deux angles sont depuis longtemps connues et, plus précisément de la réfraction de la lumière.

---

*) Voir G. Landsberg, *Optique*, M., 1957 (en russe).

**) Le problème de la propagation des trains d'ondes dans un milieu dispersif est l'un des plus fin et ardu de l'optique ondulatoire. Voir sur la question : G. Landsberg, *Optique*, M., 1957 (en russe).

Quoique l'explication de la réfraction sous l'angle de la théorie ondulatoire soit donnée dans les cours élémentaires de physique, on la rappellera ici pour souligner certains de ses traits caractéristiques. L'explication ondulatoire ramène la réfraction de la lumière passant d'un millieu dans un autre au changement de la vitesse de phase de l'onde. Soient deux milieux aux indices de réfraction différents séparés par un dioptre plan (fig. 204). Pour fixer les idées posons que le milieu du haut est le vide où la vitesse de la lumière est égale à c; dans le milieu du bas la vitesse de la lumière est supposée égale à c'. Une onde plane frappe le dioptre sous un angle ϑ. Au moment $t=0$ la position de la surface équiphase dans le milieu du haut est représentée par la droite AA'. Supposons qu'au moment $t=t'$ l'onde partant du point A', après avoir franchi la distance $A'D=ct'$, atteigne la surface de séparation au point D. Durant ce temps l'onde se propagera des points situés entre A et D dans le milieu du bas.

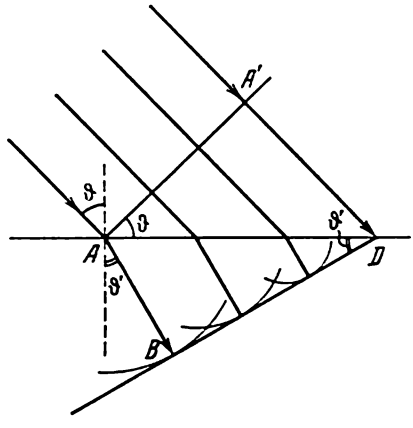


Fig. 204. Réfraction. Explication ondulatoire

Pour retrouver la position de la surface équiphase dans le milieu du bas construisons les ondes sphériques d'Huygens à partir des points de la surface de séparation entre A et D et cherchons leur enveloppe. Il est évident qu'au moment $t=t'$ le rayon de la seconde onde issue de A sera $AB=c't'$. D'où, comme on le voit sur le dessin,

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{ct'}{c't'}=\frac{c}{c'}=\text{const} \tag{137.1}$$

qui est la loi de Descartes-Snellius.

Compte tenu de la relation obtenue plus haut pour les vitesses de phase c et c'

$$c=\nu\lambda, \quad c'=\nu\lambda',$$

on peut représenter la loi de Descartes-Snellius sous la forme

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{c}{c'}=\frac{\lambda}{\lambda'}. \tag{137.1'}$$

Comme l'indice de réfraction du milieu par rapport au vide est supérieur à l'unité, durant le passage du vide dans le milieu la vitesse de phase de la lumière diminue; dans la même mesure diminue également la longueur d'onde dans le milieu par rapport à sa longueur dans le vide.

Pour expliquer la réfraction du point de vue corpusculaire il suffit d'admettre que les particules lumineuses modifient leur quantité de mouve-

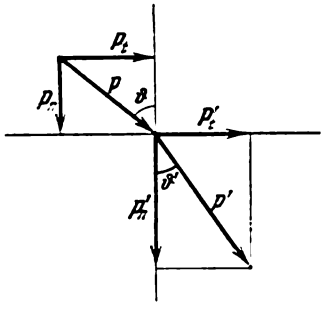


Fig. 205. Réfraction. Explication corpusculaire

ment en traversant le dioptre. Supposons en effet que la quantité de mouvement de la « particule lumineuse » dans le milieu du haut soit p et dans le milieu du bas p' et de plus que $p'>p$ (fig. 205). Pour des raisons de symétrie la composante tangentielle de la quantité de mouvement à la traversée du dioptre ne varie pas :

$$p_t=p'_t, \tag{137.2}$$

et seule la composante normale se modifie ($p'_n>p_n$). D'après le dessin on a

$$\sin\vartheta=p_t/p, \quad \sin\vartheta'=p'_t/p',$$

ce qui donne en tenant compte de (137.2)

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{p'}{p}=\text{const}, \tag{137.3}$$

c'est-à-dire de nouveau on obtient la loi de Descartes-Snellius.

Voyons maintenant les conséquences qu'on peut tirer pour la vitesse de la lumière dans le vide et dans le milieu sur la base de la conception corpusculaire de la loi de Descartes-Snellius. Si l'on considère les « particules lumineuses » comme des corpuscules newtoniens, l'impulsion p s'exprimera *en fonction de la vitesse* v de la particule par la formule connue

$$p=mv.$$

Dans ce cas de (137.3) il suit que

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{v'}{v}, \tag{137.4}$$

c'est-à-dire que l'indice de réfraction est égal au rapport de la vitesse dans le milieu à celle dans le vide.

Le rapprochement avec (137.1′) montre que dans l'interprétation corpusculaire le rapport des vitesses est inverse à celui obtenu dans l'interprétation ondulatoire, c'est-à-dire qu'au cas où l'indice de réfraction est supérieur à 1 la vitesse de la particule lumineuse *dans le milieu est supérieure à celle dans le vide.*

Il ne faut pas toutefois oublier que dans les interprétations ondulatoire et corpusculaire de la loi de réfraction on avait en fait opéré avec des vitesses différentes. Dans l'interprétation ondulatoire les vitesses c et c' étaient des vitesses de phase, tandis que v et v' sont des vitesses des particules non identiques aux vitesses de phase. Pour plus de clarté notons qu'en assimilant « la particule lumineuse » à un photon et non pas à une particule newtonienne on peut ramener la relation (137.3) à la forme identique (137.1′). En effet, au § 125 on a vu que l'impulsion du photon est égale à

$$p=h\nu/c,$$

et par suite ($\nu\lambda=c$)

$$p=h/\lambda, \quad p'=h/\lambda'.$$

Portant ces valeurs dans (137.3) il vient

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{\lambda}{\lambda'},$$

c'est-à-dire tout comme dans (137.1′) l'indice de réfraction est égal au rapport de la longueur d'onde dans le vide à la longueur d'onde dans le milieu ou ce qui revient au même, au rapport direct des vitesses de phase. Il est évident que ce résultat a été obtenu parce que dans l'expression de l'impulsion du photon $p=h\nu/c$ la vitesse de phase se trouve non pas au numérateur mais au dénominateur.

Dans la seconde moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle quand on n'avait pas encore une notion bien nette de la différence entre les vitesses de phase et de groupe on tenta de réaliser une expérience décisive qui devait, comme on le croyait, donner une réponse définitive à la question de la nature ondulatoire ou corpusculaire de la lumière. Bien qu'on comprenne maintenant que ces expériences, comme les expériences postérieures du même genre, ne donnèrent et n'ont pas pu donner une réponse à la question posée, il est tout de même utile d'examiner ces expériences et d'expliquer pourquoi elles ne sont pas décisives.

L'expérience proposée et montée par Foucault (1850) se fondait sur le rapprochement des formules (137.1) et (137.4) exprimant la loi de Descartes-Snellius. Sans tenir compte de la différence de principe entre les vitesses c et c' d'une part et v et v' d'autre part, Foucault pensait que pour résoudre le problème de la nature de la lumière il fallait mesurer directement la vitesse de la lumière dans un milieu quelconque et non pas la définir d'après l'indice de réfraction. Si cette vitesse apparaissait inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, c'est la théorie ondulatoire qui serait juste, sinon c'est la théorie corpusculaire (au sens newtonien) qui serait juste.

L'expérience était montée afin de déterminer la vitesse de la lumière dans l'eau. Elle apparut inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide d'où Foucault avait conclu (prématurément) que la théorie ondulatoire de la lumière était démontrée définitivement. Par la suite Michelson monta une expérience analogue en comparant avec une grande précision la vitesse de la lumière dans l'eau et dans le sulfure de carbone avec la vitesse de la lumière dans l'air (pratiquement égale à la vitesse de la lumière dans le vide). Cette expérience montra également que le rapport des vitesses dans l'air et l'eau est égal à 1,330, ce qui, pratiquement, équivalait à l'indice de réfraction de l'eau pour une lumière jaune qu'utilisait Michelson (en réalité l'indice de réfraction de l'eau dans cette partie du spectre est égal à 1,333 mais la différence de 0,003 se trouve dans les limites des erreurs de l'expérience). Avec le sulfure de carbone présentant un haut indice de réfraction et une forte dispersion le résultat fut différent. Notamment, le rapport des vitesses s'est révélé égal à $1{,}76\pm0{,}02$, tandis que l'indice de réfraction du CS_2 est égal à 1,63. Donc l'expérience a décelé que la

vitesse de la lumière dans le sulfure de carbone est inférieure à celle dans l'air comme l'exige la théorie ondulatoire, mais le rapport des vitesses n'est plus égal à l'indice de réfraction. L'énigme de cette contradiction apparente réside dans le fait que les mesures de Michelson comme toute mesure de vitesse du signal lumineux (voir § 136) fournissent des vitesses de groupe, mais non de phase dont le rapport est égal à l'indice de réfraction. Dans l'air et dans l'eau où la dispersion est très faible, les deux vitesses sont identiques. Mais dans le sulfure de carbone la dispersion est si forte que la différence entre les vitesses de phase et de groupe devient apparente. Utilisant la formule

$$g=c'-\lambda\frac{dc'}{d\lambda}, \tag{136.2}$$

on peut montrer que le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide c à la vitesse de groupe de la lumière dans un milieu est lié à l'indice de réfraction μ par la relation*)

$$\frac{c}{g}=\mu-\lambda\frac{d\mu}{d\lambda}. \tag{137.5}$$

---

*) En effet, de (136.2) on tire

$$c'=g+\lambda\frac{dc'}{d\lambda},$$

d'où

$$\frac{c'}{g}=1+\frac{\lambda}{g}\cdot\frac{dc'}{d\lambda}. \tag{136.2'}$$

Il est aisé de voir que

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}=\frac{c'}{c}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{c'}\right)=-\frac{1}{c'}\frac{dc'}{d\lambda}.$$

En déterminant $\frac{dc'}{d\lambda}$ et en portant dans (136.2') on trouve

$$\frac{c'}{g}=1-\frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{c'}{g},$$

ou, en utilisant de nouveau (136.2')

$$\frac{c'}{g}=1-\frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{g}\frac{dc'}{d\lambda}\right).$$

Tenant compte de ce que $\frac{\lambda}{g}\frac{dc'}{d\lambda}$ est une petite quantité et négligeant les petits du second ordre on obtient en première approximation

$$\frac{c'}{g}=1-\frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda},$$

d'où, enfin, ayant en vue que $\mu c'=c$,

$$\frac{c}{g}=\mu-\lambda\frac{d\mu}{d\lambda},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour le sulfure de carbone c/g est apparu égal à 1,76; puis d'après la courbe de variation de l'indice de réfraction de CS_2 en fonction de la longueur d'onde pour la longueur d'onde utilisée par Michelson $\lambda\frac{d\mu}{d\lambda}=-0{,}126$ (l'indice de réfraction diminue avec l'accroissement de la longueur d'onde). Ainsi, de (137.4) on obtient

$$\mu=\frac{c}{g}+\lambda\frac{d\mu}{d\lambda}=1{,}76-0{,}126=1{,}63$$

en accord avec les données expérimentales.

Donc dans l'interprétation corpusculaire puisque les « particules lumineuses » sont constituées par des photons la vitesse de phase de la lumière dans le milieu doit aussi être inférieure à la vitesse de phase dans le vide, ce qui signifie que les expériences analogues à l'expérience de Foucault ne peuvent donner de réponse de principe à la question de la nature ondulatoire ou corpusculaire de la lumière.

Il s'ensuit que les expériences décrites, nonobstant l'opinion qui s'est formée au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, ne peuvent résoudre le problème de la nature de la lumière ne contredisant ni l'image ondulatoire ni l'image corpusculaire.

Notons en conclusion la circonstance importante suivante. On a caractérisé l'onde par la pulsation ω et la longueur d'onde λ; pour la particule c'est son énergie E et son impulsion p qui sont caractéristiques. On peut décrire la réfraction soit sur la base de la théorie corpusculaire, soit sur celle de la théorie ondulatoire. Dans le premier cas on utilise les grandeurs E et p et dans le second ω et λ. Si, toutefois, on veut passer de l'image corpusculaire à l'image ondulatoire, on doit utiliser les relations suivantes, déjà connues entre les deux groupes de grandeurs :

$$E=\hbar\omega \tag{137.6}$$

et

$$p=\frac{\hbar\omega}{c}=\frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \tag{137.7}$$

On voit ainsi que dans ces relations la constante de Planck joue le rôle de facteur de conversion ou de clef permettant de passer d'une image à l'autre.

§ 138. Dualité onde-corpuscule. Effet Doppler

Montrons maintenant sur d'autres exemples la possibilité d'interpréter des phénomènes optiques de deux points de vue, corpusculaire et ondulatoire. Pour cela adressons-nous tout d'abord à l'effet Doppler.

L'*effet Doppler* également observé en acoustique et en optique se manifeste par la modification de la fréquence durant des mouvements relatifs de la source et de l'observateur. Supposons que la source de lumière se trouve en A et l'observateur en B. Si la source se déplace sous un angle ϑ par rapport à la droite joignant A et B à la vitesse v, alors la fréquence

enregistrée par l'observateur au cours du mouvement de la source diffère de la fréquence perçue pour une source immobile de la grandeur $\Delta\nu$ définie par la formule

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{v}{c}\cos\vartheta, \tag{138.1}$$

où c est la vitesse de la lumière. La théorie ondulatoire de ce phénomène se base sur l'étude des variations de la longueur d'onde avec le mouvement de la source, la vitesse de propagation de la lumière restant inchangée*).

Il apparaît, toutefois, que ce phénomène peut également être interprété sur la base des conceptions corpusculaires. Dans ce cas l'émission de la lumière est assimilée à des éjections de photons et on applique à ce processus les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, exactement de la même façon que dans la théorie corpusculaire de l'effet Compton.

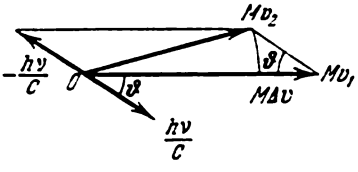


Fig. 206. Interprétation corpusculaire de l'effet Doppler

Soit un atome de masse M se déplaçant à la vitesse v_1, c'est-à-dire possédant une quantité de mouvement Mv_1 qui, se trouvant au point O, émet un photon $h\nu$ (fig. 206). La quantité de mouvement de ce photon est $h\nu/c$. D'après la loi de conservation de la quantité de mouvement l'atome reçoit au moment de l'émission une impulsion complémentaire $-h\nu/c$ dirigée dans le sens contraire (recul). Son impulsion après l'émission devient égale à Mv_2. Sur le dessin construit sur la base de l'impulsion on voit que

$$Mv_1-Mv_2\equiv M\Delta v=\frac{h\nu}{c}\cos\vartheta. \tag{138.2}$$

Pour appliquer maintenant la loi de conservation de l'énergie raisonnons de la façon suivante. Si les énergies de l'atome au repos dans les états stationnaires, conduisant à l'émission du photon $h\nu$, sont respectivement E_1 et E_2, alors

$$E_1-E_2=h\nu. \tag{138.3}$$

L'énergie de l'atome mobile dans l'état d'excitation (avant l'émission) est égale à

$$E_1+\frac{1}{2}Mv_1^2,$$

et dans l'état normal (après l'émission)

$$E_2+\frac{1}{2}Mv_2^2.$$

*) On ne peut développer ici la théorie ondulatoire de l'effet Doppler ainsi qu'insister sur les différences importantes de ce phénomène en acoustique et en optique. Ces problèmes sont exposés clairement dans le livre de L. Landsberg, *Optique*, M., 1967 (en russe).

L'énergie du photon émis est égale à

$$h(\nu+\Delta\nu).$$

Selon la loi de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}Mv_1^2+E_1=\frac{1}{2}Mv_2^2+E_2+h(\nu+\Delta\nu), \tag{138.4}$$

d'où en tenant compte de (138.3)

$$\frac{1}{2}M(v_1^2-v_2^2)=h\,\Delta\nu$$

ou

$$M\,\Delta v\,\frac{v_1+v_2}{2}=h\,\Delta\nu.$$

Utilisant (138.2), introduisant la vitesse moyenne $\bar{v}=\frac{v_1+v_2}{2}$ et considérant que $M\,\Delta v=(h\nu/c)\cos\vartheta$ (fig. 206) on obtient

$$\bar{v}\frac{h\nu}{c}\cos\vartheta=h\,\Delta\nu,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\bar{v}}{c}\cos\vartheta,$$

c'est-à-dire la relation (138.1) déduite en optique ondulatoire.

§ 139. Dualité onde-corpuscule. Réseau de diffraction

Soit un réseau de diffraction plan travaillant en réflexion. Il est connu de la théorie ondulatoire que si la période du réseau est égale à a et si sur ce réseau est dirigée une onde plane monochromatique sous un angle ϑ par rapport au plan du réseau, la réflexion dans la direction caractérisée par l'angle ϑ' donnera un rayon lumineux à la condition que

$$a(\cos\vartheta-\cos\vartheta')=n\lambda. \tag{139.1}$$

Etudions maintenant ce phénomène du point de vue de la théorie corpusculaire. Supposons que le réseau soit frappé par un faisceau de photons sous un angle ϑ. Puisque par expérience on sait que la nature de la diffraction est indépendante de l'intensité de la lumière et n'est déterminée que par le réseau *en bloc* on ne doit pas détailler le phénomène, par exemple, étudier la réflexion de chaque photon sur chaque trait réfléchissant du réseau (cette question sera reprise plus bas). On peut, toutefois, affirmer que si un photon frappe le réseau, ce dernier reçoit une impulsion complémentaire et s'il y a réflexion, subit un recul. La composante de l'impulsion du réseau dans la direction de l'axe x se trouvant dans le plan du réseau variera donc de

$$p_x-p'_x=\Delta p_x.$$

Supposons maintenant que le réseau soit mobile et admettons que tout en se déplaçant il reste dans son plan; dans ce cas l'impulsion Δp_x lui communique un mouvement. Il est évident que pour un déplacement du réseau dans la direction de l'axe x à une distance égale à la période a le réseau reprendra de nouveau sa position initiale. Ainsi le mouvement du réseau peut être considéré comme périodique de période a. Dans ce cas il peut être « quantifié » en utilisant les conditions quantiques de Bohr-Sommerfeld (§ 113)

$$\int_0^a \Delta p_x \, dx = nh,$$

d'où

$$a \Delta p_x = nh. \tag{139.2}$$

La masse du réseau étant grande devant celle du photon, on peut négliger les variations de la valeur absolue de son impulsion p en réflexion. Ainsi donc,

$$p_x = p \cos \vartheta, \quad p'_x = p \cos \vartheta', \quad \Delta p_x = p(\cos \vartheta - \cos \vartheta'),$$

et (139.2) prend la forme

$$a(\cos \vartheta - \cos \vartheta') = n \frac{h}{p}. \tag{139.3}$$

Comme p est l'impulsion du photon liée à la longueur d'onde par la relation

$$p = h/\lambda = 2\pi\hbar/\lambda \tag{137.8}$$

et portant cette expression dans (139.3) il vient

$$a(\cos \vartheta - \cos \vartheta') = n\lambda, \tag{139.1}$$

c'est-à-dire la formule du réseau de diffraction sous sa forme habituelle.

Notons que la formule (139.3) renferme l'impulsion p, quantité caractérisant la particule, et la relation (139.1), la longueur d'onde. On peut donc dire que les relations (139.3) et (139.1) constituent une même formule écrite toutefois dans le premier cas en termes de la vision corpusculaire et dans le second, en termes de la vision ondulatoire. Comme dans les autres cas le passage d'une conception à l'autre s'effectue à l'aide de la relation

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

liant les deux aspects des phénomènes optiques.

§ 140. Hypothèse de de Broglie

La dualité « onde-corpuscule » fut établie, comme on l'a vu, tout d'abord lors de l'étude de la nature de la lumière. En 1924 Louis de Broglie tentant de trancher les difficultés liées à cette dualité émit l'hypothèse hardie que

cette dualité ne concerne pas seulement les phénomènes optiques mais constitue un phénomène universel. « En optique, dit-il, pendant tout un siècle on a trop négligé le point de vue corpusculaire par rapport au point de vue ondulatoire; n'a-t-on pas fait une erreur inverse dans la théorie de la matière? N'avait-t-on pas trop en vue la particule en négligeant outre mesure l'image de l'onde? » Telle était la question posée par de Broglie.

L'idée d'attribuer des propriétés ondulatoires aux particules de la matière lui vint après les réflexions suivantes. Dans les années vingt du XIX^{ème} siècle Hamilton nota la remarquable analogie entre l'optique géométrique et la mécanique (il est évident qu'en ces temps on ne pouvait avoir en vue que la mécanique newtonienne). Il apparut que les règles fondamentales de ces différentes disciplines pouvaient s'exprimer en des formes mathématiques identiques. Cela signifie qu'au lieu de considérer le mouvement de la particule matérielle dans le champ de potentiel $V(x, y, z)$ on peut considérer le mouvement des rayons de lumière dans un milieu optiquement hétérogène à indice de réfraction choisi de façon appropriée $\mu(x, y, z)$ et inversement. Cette analogie s'étendait rien qu'à la géométrie optique et à la mécanique classique. Mais on sait que l'optique géométrique s'est avérée incapable d'expliquer toutes les propriétés de la lumière. Pour expliquer les phénomènes tels que l'interférence ou la diffraction on est obligé de recourir à l'optique ondulatoire de valeur plus générale; la géométrie optique n'est qu'un cas limite de l'optique ondulatoire (s'appliquant à des longueurs d'ondes très courtes). D'autre part il est également connu que la mécanique newtonienne est d'application limitée; elle ne peut, par exemple, expliquer l'existence de niveaux d'énergie discontinus dans les systèmes atomiques. L'idée de de Broglie consistait à élargir l'analogie entre la mécanique et l'optique et de faire correspondre à l'optique ondulatoire la *mécanique ondulatoire* plus générale que la mécanique classique et applicable aux mouvements intra-atomiques.

En admettant ainsi que les « particules » matérielles à côté des propriétés corpusculaires possèdent également des propriétés ondulatoires de Broglie a appliqué au cas des « particules » de la matière les règles de passage d'une image à l'autre qu'on a déjà à plusieurs reprises rencontrées en étudiant la dualité onde-particule en optique. Soit une « particule » matérielle (par exemple un électron) de masse m se mouvant en l'absence de champ, c'est-à-dire de façon uniforme avec la vitesse v. Dans la vision corpusculaire on attribue à la particule une énergie E et une impulsion p; dans la vision ondulatoire on a affaire à une pulsation ω et une longueur d'onde λ. Si les deux visions sont des aspects différents d'un même phénomène, la liaison entre les quantités qui les caractérisent s'établit au moyen des relations (voir § 137)

$$E=\hbar\omega \tag{140.1}$$

et

$$p=2\pi\hbar/\lambda, \tag{140.2}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π.

Au cas des phénomènes optiques on a utilisé la relation (140.2) pour déterminer l'impulsion du photon qui est une particule de masse au repos égale à zéro et se mouvant à la vitesse de la lumière c. Pour des particules matérielles la même relation d'après de de Broglie donne la longueur d'onde de ces ondes planes monochromatiques qui sont associées à ces particules :

$$\lambda = 2\pi\hbar/p.$$

Au cas d'une particule de masse au repos non nulle $p=mv$ et pour des faibles vitesses m est constant, tandis que pour des vitesses comparables à celle de la lumière la masse relativiste $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ dépend de la vitesse. Ainsi pour des « particules » de masse au repos non nulle d'après de de Broglie

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}. \tag{140.3}$$

Si l'on introduit le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de valeur absolue $|\mathbf{k}|=2\pi/\lambda$, alors sur la base de (140.2)

$$\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}, \quad p_x=\hbar k_x, \quad p_y=\hbar k_y, \quad p_z=\hbar k_z. \tag{140.4}$$

La formule de l'onde plane décrivant le mouvement des « particules » matérielles libres prend par conséquent la forme suivante*) :

$$\psi = Ae^{i(kr-\omega t)} = Ae^{i(xk_x+yk_y+zk_z-\omega t)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(xp_x+yp_y+zp_z-Et)}. \tag{140.5}$$

§ 141. Propriétés des ondes de de Broglie

Calculons la vitesse de propagation des ondes de de Broglie en distinguant comme dans tous les cas les vitesses de phase et de groupe. La vitesse de phase sera

$$c' = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}. \tag{141.1}$$

Comme $c>v$, la vitesse de phase des ondes de de Broglie est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Mais cela ne doit pas nous intimider, car on sait déjà que la vitesse de phase ne caractérise ni la vitesse du « signal », ni la vitesse de déplacement de l'énergie et, par suite, peut être supérieure et inférieure à c.

La vitesse de groupe sera calculée au moyen de la formule (134.3)

$$g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}. \tag{141.2}$$

Il n'est pas difficile de démontrer que $dE/dp=v$. En effet, la variation de

*) Le fait que dans (140.5) l'exposant a un signe opposé à celui de (132.8) n'a aucune importance, car seul le carré du module $|\psi^2|$, c'est-à-dire $\psi^*\psi=A^2$, à un contenu physique.

l'énergie de la particule se déplaçant sous l'action de la force $\mathbf{F}$ sur le trajet $d\mathbf{s}$ est égale à $dE=\mathbf{F}\,d\mathbf{s}$, mais $\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ et, par suite,

$$dE=\frac{d\mathbf{p}}{dt}\,d\mathbf{s}=d\mathbf{p}\,\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\mathbf{v}\,d\mathbf{p}$$

ou puisque $\mathbf{v}$ et $\mathbf{p}$ ont le même sens

$$dE=v\,dp,$$

d'où

$$\frac{dE}{dp}=v.$$

On obtient ainsi de (141.2)

$$g=v,$$

c'est-à-dire que la vitesse de groupe des ondes de de Broglie est la vitesse de la particule. On reviendra encore à cette relation remarquable.

Cherchons maintenant la relation liant la fréquence de l'onde de de Broglie aux composantes du vecteur d'onde (loi de dispersion). Dans ce but on déterminera auparavant la relation liant ν et $\mathbf{k}$ au cas général d'une particule relativiste en utilisant la relation relativiste entre l'impulsion et l'énergie*) :

$$\frac{E^2}{c^2}=m_0^2c^2+\mathbf{p}^2=m_0^2c^2+(p_x^2+p_y^2+p_z^2). \tag{141.3}$$

En y portant

$$E=\hbar\omega, \tag{140.1}$$

$$p_x=\hbar k_x,\quad p_y=\hbar k_y,\quad p_z=\hbar k_z, \tag{140.4}$$

on obtient

$$\frac{\omega^2}{c^2}=4\pi^2\frac{m_0^2c^2}{h^2}+(k_x^2+k_y^2+k_z^2). \tag{141.4}$$

Introduisant la notation

$$2\pi\frac{m_0c^2}{h}=\frac{m_0c^2}{\hbar}=\omega_0, \tag{141.5}$$

on donne à (141.3) la forme

$$\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{\omega_0^2}{c^2}+(k_x^2+k_y^2+k_z^2). \tag{141.6}$$

C'est bien la relation relativiste cherchée. Notons que pour les particules

---

*) Cette relation peut être facilement obtenue des formules $p=\frac{v}{c^2}E$ (p. 369) et $E=\frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}$ (p. 202). On a $p^2=\frac{v^2}{c^4}E^2=\frac{\beta^2}{c^2}E^2=\frac{E^2}{c^2}[1-(1-\beta^2)]=\frac{E^2}{c^2}-\frac{E^2}{c^2}(1-\beta^2)=$ $=\frac{E^2}{c^2}-m_0^2c^2$, d'où l'on tire (141.3).

de masse au repos nulle la formule (141.5) donne $\omega_0=0$ et (141.6) prend la forme

$$\frac{\omega^2}{c^2}=(k_x^2+k_y^2+k_z^2),$$

relation déjà connue découlant de l'équation d'onde des ondes électromagnétiques, c'est-à-dire des ondes auxquelles sont associés les photons.

Examinons encore une propriété remarquable des ondes de de Broglie. Dans la théorie élémentaire de l'atome hydrogénoïde de Bohr on avait utilisé la condition suivante pour choisir les orbites circulaires stationnaires

$$mva=n\hbar \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Cette condition peut être récrite sous la forme

$$2\pi a=n\frac{2\pi\hbar}{mv}.$$

En considérant que $2\pi\hbar/mv$ est la longueur d'onde de de Broglie on a :

$$2\pi a=n\lambda, \tag{141.7}$$

autrement dit la longueur de la circonférence de l'orbite stationnaire doit être égale à un nombre entier d'ondes de de Broglie.

§ 142. Confirmation expérimentale de l'hypothèse de de Broglie. Méthode de Bragg

L'hypothèse de de Broglie fut presque aussitôt confirmée d'une façon brillante par l'expérience. Notamment, il fut montré que les faisceaux d'électrons, de protons et même d'atomes entiers présentent des phénomènes d'interférences comme la lumière ou les rayons X.

Examinons tout d'abord l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de de Broglie des particules matérielles. Cela suggérera les méthodes expérimentales à utiliser dans ce cas pour déceler les figures d'interférences. Soit un faisceau d'électrons accélérés par un potentiel de V volts; si ce potentiel est faible et on peut encore utiliser les formules de la mécanique classique (newtonienne), la vitesse des électrons est déterminée d'après la relation

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{eV}{300}, \tag{142.1}$$

et la longueur d'onde de de Broglie découle de la relation

$$\lambda=\frac{2\pi\hbar}{mv}. \tag{140.3}$$

Eliminant v entre (142.1) et (140.3) on obtient

$$\lambda=\sqrt{\frac{4\pi^2\hbar^2}{me}}\sqrt{\frac{150}{V}}=\frac{6{,}6\cdot10^{-27}}{\sqrt{9\cdot10^{-28}\cdot4{,}8\cdot10^{-10}}}\sqrt{\frac{150}{V}}\approx$$

$$\approx\sqrt{\frac{150}{V}}\cdot10^{-8}\text{ cm}=\sqrt{\frac{150}{V}}\text{ Å}=\frac{12{,}25}{\sqrt{V}}\text{ Å}. \tag{142.2}$$

Ainsi on voit que pour des électrons accélérés par un potentiel de 150 V la longueur d'onde de de Broglie est égale à 1 Å; c'est l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des rayons X mous.

Si la vitesse des électrons est grande, alors les formules de la mécanique newtonienne deviennent inapplicables et il faut introduire la correction relativiste sur la relation entre la masse et la vitesse. Dans ces cas pour la détermination de λ on peut utiliser la formule approchée

$$\lambda = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}(1 - 0{,}489 \cdot 10^{-6} V) \text{ Å}. \qquad (142.3)$$

Pour des protons la longueur d'onde de de Broglie pour la même vitesse est de $\sqrt{1836}$ fois moindre. Au tableau XVIII on a donné les valeurs calculées de λ pour des électrons et des protons.

Tableau XVIII

Potentiel d'accélération en V	Longueur d'onde en Å	
	électrons	protons
10^9	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	$7{,}3 \cdot 10^{-6}$
10^8	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	$2{,}7 \cdot 10^{-5}$
10^7	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$	$0{,}9 \cdot 10^{-4}$
10^6	$0{,}87 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$
10^5	$3{,}7 \cdot 10^{-2}$	$9{,}0 \cdot 10^{-4}$
10^4	0,12	$2{,}9 \cdot 10^{-3}$
10^3	0,39	$9{,}0 \cdot 10^{-3}$
400	0,61	$1{,}4 \cdot 10^{-2}$
200	0,86	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$
50	1,7	$4{,}0 \cdot 10^{-2}$
10	3,9	$0{,}9 \cdot 10^{-1}$

De ce qui vient d'être dit il devient évident que pour obtenir des interférences des particules matérielles il faut appliquer les méthodes déjà utilisées pour les rayons X, c'est-à-dire de produire des interférences par des réseaux cristallins. En fait l'interférence des faisceaux d'électrons dans des cristaux a été réalisée bien avant l'apparition de la théorie de de Broglie. En 1921-1923 Davisson et Kunsman découvrirent qu'au cours de la diffusion des électrons par des minces feuilles métalliques on observe une variation bien prononcée de l'intensité en fonction de l'angle de diffusion (fig. 207). Dans ce cas la position et la grandeur des maximums obtenus sont essentiellement fonction de la vitesse des électrons. Une circonstance fortuite a montré que dans ce phénomène le rôle décisif est joué par la structure cristalline : en cours d'expériences sur la réflexion par des plaques de nickel l'appareil en verre éclata et la plaque de nickel s'oxyda. Pour la réduction de cette plaque il a fallu la chauffer longtemps au rouge dans le vide et en présence d'hydrogène. Après ce traitement la plaque avait subi une recristallisation : il s'y forma un certain nombre de grands cristaux.

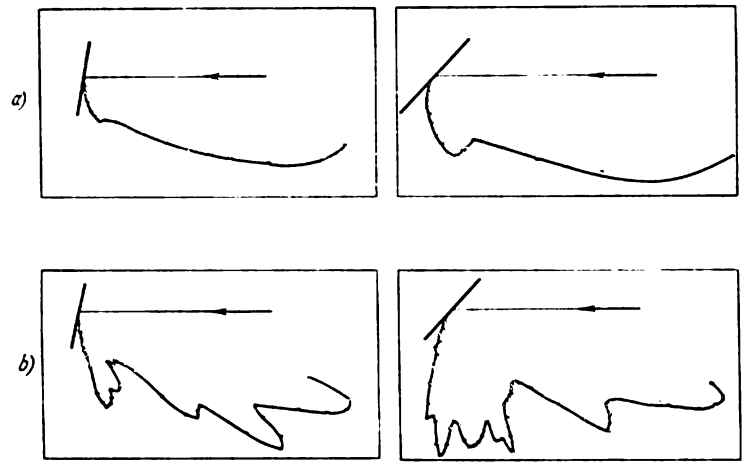


Fig. 207. Diffusion des électrons par une plaque polycristalline en nickel : *a)* avant le traitement thermique; *b)* après le traitement thermique

En reprenant l'expérience de diffusion des électrons on constata que du fait de cette recristallisation la situation se modifia radicalement : le nombre des maximums s'accrut fortement et ces derniers devinrent même plus marqués (voir fig. 207, *b*).

L'explication de cette bizarre sélectivité dans la réflexion des électrons fut très difficile jusqu'à ce qu'on n'ait compris qu'on avait affaire à des figures d'interférence en réflexion. Les expériences suivantes de Davisson et de Germer confirmèrent l'exactitude de cette explication.

Un faisceau parallèle d'électrons (fig. 208) de vitesse déterminée émis par un canon à électrons *A* était dirigé vers le cristal *B*; les électrons réfléchis étaient captés par un collecteur *C* relié à un galvanomètre. Le collecteur pouvait se placer sous un angle quelconque par rapport au faisceau incident tout en restant dans un même plan. En mesurant l'intensité du courant pour les différentes positions du collecteur on pouvait apprécier l'intensité de la réflexion dans les différentes directions. Le résultat était présenté sous forme d'un diagramme polaire dont un exemple est donné à la figure 209. Sur les rayons vecteurs tracés sous divers angles on portait des segments proportionnels à l'intensité de la réflexion sous des angles correspon-

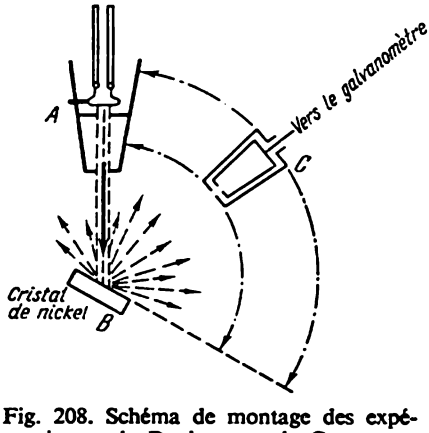


Fig. 208. Schéma de montage des expériences de Davisson et de Germer

dants. Il apparut que si l'on plaçait en B un monocristal de nickel, on observait à la réflexion un maximum sélectif fortement marqué montrant que les électrons étaient réfléchis suivant la loi optique : « l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion ». La même expérience répétée avec une plaque de nickel polycristalline se composant d'un grand nombre de cristaux très fins répartis de façon désordonnée n'a permis de déceler aucune sélectivité.

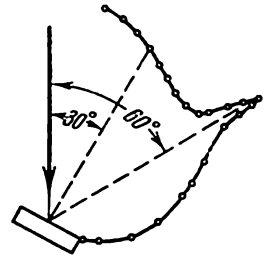


Fig. 209. Diagramme polaire montrant l'intensité de la réflexion des électrons à partir d'un monocristal de nickel

L'expérience de réflexion régulière des électrons par un monocristal représente en réalité une analogie absolue avec l'interférence en réflexion des rayons X par un cristal suivant la méthode de Bragg (ou interférence en réflexion de la lumière monochromatique par des lames minces). Comme on le sait, les rayons X ne sont réfléchis par le cristal que dans le cas où la longueur d'onde et l'angle de glissement satisfont à la formule de Wulff-Bragg (voir ch. IV, § 33)

$$n\lambda = 2d \sin \varphi. \tag{142.4}$$

Cette formule peut être utilisée pour la détection des interférences de deux façons. D'abord on peut diriger vers le cristal des rayons de longueur d'onde déterminée λ et en faisant tourner le cristal s'assurer que la réflexion n'est obtenue que pour des angles bien déterminés φ_1, φ_2, ..., correspondant aux valeurs de $n = 1, 2, \ldots$ dans la formule de Wulff-Bragg. On obtient ainsi des spectres d'ordres 1, 2, etc. En second lieu on peut en conservant un même angle de glissement φ faire varier constamment la longueur d'onde. Dans ce cas la réflexion ne doit se produire qu'au cas où

$$\lambda_n = \frac{1}{n} 2 d \sin \varphi, \tag{142.5}$$

c'est-à-dire pour des longueurs d'ondes λ_1, $\lambda_2 = \lambda_1/2$, $\lambda_3 = \lambda_1/3$, etc.

Au cas des rayons X on utilise le premier procédé, au cas des électrons, le second, car les flux d'électrons ont d'habitude une vitesse déterminée (c'est-à-dire qu'il leur est associée une longueur d'onde déterminée $\lambda = h/mv$) et il est plus facile de faire varier cette vitesse (en modifiant le potentiel accélérateur) que de tourner le cristal dans le vide.

Combinant les formules (142.2) et (142.5) on obtient

$$\frac{12{,}25}{V^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n} 2 d \sin \varphi,$$

soit

$$V^{\frac{1}{2}} = n \frac{12{,}25}{2 d \sin \varphi}. \tag{142.6}$$

Ainsi, si dans la position représentée à la figure 208 on fait varier progressivement le potentiel d'accélération V et chaque fois on mesure l'intensité

du courant au collecteur (c'est-à-dire l'intensité de réflexion) puis en portant sur l'axe des abscisses $V^{\frac{1}{2}}$ et sur l'axe des ordonnées l'intensité de réflexion on doit obtenir une courbe présentant une série de maximums équidistants bien marqués dont l'écartement est égal à $12{,}25/2d \sin \varphi$.

Sur la figure 210 on a représenté la courbe obtenue avec un monocristal de nickel à des conditions déterminées ($\varphi = 80°$, $d = 2{,}03$ Å).

Comme on voit la répétition périodique des maximums est très nette. Sur le même dessin on a indiqué par des flèches la position des maximums calculée d'après la formule de Wulff-Bragg (142.6). La comparaison avec la position des maximums sur la courbe expérimentale montre que pour

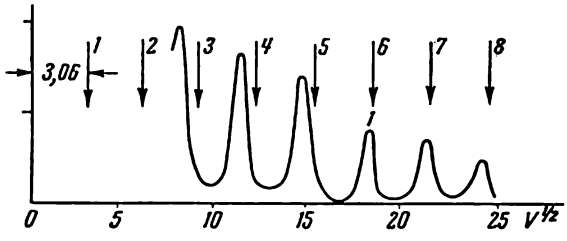


Fig. 210. Vérification de la formule de Wulff-Bragg dans le cas d'interférence en réflexion sur un monocristal de nickel

des valeurs élevées de n ($n = 7, 8$) il y a coïncidence rigoureuse; pour des n inférieurs on observe une divergence qui est d'autant plus grande que n est petit.

Puisque cette divergence présente un caractère systématique et régulier, il devient évident qu'un certain facteur a été négligé. Ce facteur est l'indice de réfraction des ondes de de Broglie. En effet, en dégageant la formule de Wulff-Bragg (voir § 33) l'indice de réfraction était supposé égal à l'unité et la longueur d'onde à l'intérieur et à l'extérieur du cristal était considérée comme étant la même. Ce phénomène est admissible pour des longueurs d'ondes très courtes. Pour des ondes plus longues du domaine des rayons X, la détermination précise de la longueur d'onde exige la considération de l'indice de réfraction et, par suite, l'utilisation de la formule de Wulff-Bragg corrigée qui sera introduite ultérieurement. La même voie doit être suivie pour les ondes de de Broglie. Qualitativement cela découle déjà de la nature de la divergence entre les maximums de réflexion calculés et obtenus expérimentalement. En effet, comme on l'a vu, la divergence diminue avec l'augmentation de n; mais si l'angle φ est fixé, la réflexion pour des n croissants suivant la formule (142.5) n'est en réalité que la réflexion des longueurs d'ondes décroissantes associées λ, $\lambda/2$, $\lambda/3$, etc.

Exercices : 1. Calculer la longueur d'onde correspondant à la particule α de RaC' (l'énergie de la particule α est égale à $1{,}22 \cdot 10^{-5}$ erg).

2. Calculer le pontentiel d'accélération correspondant au maximum du premier ordre de l'interférence en réflexion sur un monocristal de nickel pour un angle entre le faisceau incident et réfléchi de 50°.

§ 143. Réfraction des ondes électroniques et potentiel intérieur du métal

L'explication du déplacement des maximums donnée à la fin du paragraphe précédent est quantitativement confirmée par le calcul du potentiel intérieur du métal d'après des observations des interférences électroniques. Ce calcul est effectué de la façon suivante. La vitesse de phase des ondes de de Broglie est égale, comme on le sait, à E/p. Quand les électrons pénètrent à l'intérieur du métal, leur impulsion se modifie et c'est bien la cause de la réfraction des faisceaux électroniques du point de vue corpusculaire (voir § 137). La variation de l'impulsion après la pénétration à l'intérieur du métal s'explique par la présence à l'intérieur du métal d'un champ électrique engendré par les ions positifs dont est composé le réseau cristallin du métal. Le potentiel de ce champ est donc positif. Si maintenant on imagine une droite passant par une série d'ions positifs du métal, alors en se déplaçant le long de cette droite le potentiel doit évidemment varier périodiquement, car les ions se disposent à des distances égales. On peut, toutefois, de façon approchée remplacer ce potentiel variant périodiquement par un potentiel moyen qu'on appelle justement potentiel intérieur du métal.

La vitesse de phase des ondes électroniques à l'extérieur du métal est égale à

$$c'_a=\frac{E}{p_a}=\frac{E}{mv_a}=\frac{E}{\sqrt{m^2v_a^2}}=\frac{E}{\sqrt{2mE}},$$

où E est l'énergie totale des électrons. Si l'énergie potentielle de l'électron à l'intérieur du métal est U, l'impulsion au sein du métal sera $p_i=\sqrt{2m(E-U)}$ et la vitesse de phase des ondes électroniques

$$c'_i=\frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}}.$$

L'indice de réfraction μ est par définition égal à

$$\mu=\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}=\frac{c_a}{c_i}=\sqrt{\frac{E-U}{E}}=\frac{\lambda_a}{\lambda_i}, \qquad (143.1)$$

où φ et φ' sont les angles de glissement, c'est-à-dire les compléments jusqu'à $\pi/2$ aux angles d'incidence et de réfraction.

Maintenant il faut considérer que le potentiel intérieur du métal V_0 est positif et la charge de l'électron négative; l'énergie potentielle U est donc négative :

$$U=-eV_0;$$

l'énergie totale E s'exprime comme d'habitude au moyen du potentiel d'accélération extérieur $E=eV$. Considérant ce qui vient d'être dit on obtient de (143.1)

$$\mu=\frac{\sqrt{V+V_0}}{\sqrt{V}}=\sqrt{1+\frac{V_0}{V}}. \qquad (143.2)$$

On obtient ainsi l'expression de l'indice de réfraction au moyen du potentiel intérieur V_0.

Dégageons maintenant la formule de Wulff-Bragg pour le cas $\mu \neq 1$. Examinons deux rayons en interférence *1* et *2* (fig. 211). Par suite de la réfraction l'angle de glissement intérieur φ' est différent de l'angle extérieur φ. La différence de marche des rayons *1* et *2* est évidemment égale à

$$2d \sin \varphi' = 2d\sqrt{1-\cos^2 \varphi'}$$

ou comme

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} = \mu,$$

$$2d \sin \varphi' = 2d\sqrt{1-\frac{\cos^2 \varphi}{\mu^2}}.$$

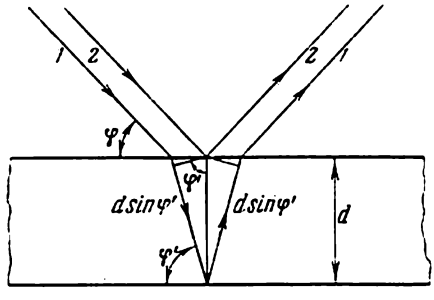


Fig. 211. Déduction de la formule de Wulff-Bragg en tenant compte de l'indice de réfraction

La condition du maximum pour l'interférence donne maintenant

$$2d\sqrt{1-\frac{\cos^2 \varphi}{\mu^2}} = n\lambda_i = n\frac{\lambda_a}{\mu}$$

[voir (143.1)] ou

$$2d\sqrt{\mu^2-\cos^2 \varphi} = n\lambda_a. \qquad (143.3)$$

Ce qui est bien la formule de Wulff-Bragg pour $\mu \neq 1$.

A l'aide de cette formule on peut calculer le potentiel intérieur du métal de la façon suivante. Portant $\lambda_a = \sqrt{\frac{150}{V}}$ dans (143.3) on obtient

$$4d^2(\mu^2-\cos^2 \varphi) = n^2 \frac{150}{V},$$

et en y remplaçant μ^2 par $1+V_0/V$ d'après la formule (143.2) il vient

$$V_0 = n^2 \frac{150}{4d^2} - V \sin^2 \varphi. \qquad (143.4)$$

Ainsi, en connaissant le potentiel d'accélération V et en mesurant l'angle de glissement φ on peut calculer V_0 pour un cristal à d connu.

On obtient par cette voie les valeurs de V_0 données au tableau XIX. Comme on le voit ces valeurs sont assez constantes. Elles correspondent aux valeurs calculées en application de la théorie des métaux.

Tableau XIX

Métal	Potentiel d'accélération en V	λ en Å	n	μ	V_0 en V
Ni	67	1,49	3	1,12	17
	142	1,03	4	1,05	16
	218	0,83	5	1,03	14
Pb	65	1,52	3	1,10	14
	125	1,09	4	1,06	15
	208	0,84	5	1,03	13
Ag	48	1,77	3	1,15	15
	96	1,25	4	1,08	15
	166	0,95	5	1,04	13

Un rôle important dans l'interprétation des liaisons entre le potentiel intérieur du métal et la réfraction des ondes électroniques revient aux travaux du physicien soviétique V. Lachkarev.

Exercices : 1. Calculer l'indice de réfraction du platine pour un faisceau d'électrons d'énergie de 240 eV frappant la surface du platine sous un angle de 30°. Le potentiel intérieur du platine est de 12 V, le pas du réseau est de 3,9 Å.

2. En conservant les conditions de l'exercice précédent calculer l'angle de réfraction du faisceau d'électrons.

§ 144. Confirmation expérimentale de l'hypothèse de de Broglie. Méthodes de Laue et de Debye-Scherrer

L'interférence des rayons X dans les cristaux est réalisée non pas uniquement par la méthode de Bragg, mais également par deux autres méthodes fondamentales : méthode de Laue et méthode de Debye-Scherrer. Ces deux méthodes peuvent être utilisées pour l'obtention des interférences avec des ondes de de Broglie. La méthode de Laue au moyen de laquelle fut pour la première fois réalisée l'interférence des rayons X dans des cristaux consiste, comme on le sait, à faire passer un faisceau étroit de rayons X présentant un spectre continu à travers un cristal. Les faisceaux d'interférence ainsi obtenus sont fixés sur une plaque photographique sous forme d'un système de taches symétriques (voir § 32).

La raison pour laquelle il est nécessaire d'utiliser dans l'expérience de Laue des rayons X à spectre continu a été expliquée en détail au § 32. Mais dans le cas des électrons il n'est pas possible d'obtenir expérimentalement une collection de vitesses distribuées de façon continue : les électrons

éjectés par le canon à électrons possèdent une même vitesse ou, plus précisément, présente une répartition des vitesses dans des limites étroites. C'est pourquoi en dirigeant le faisceau d'électrons vers le cristal on ne remplit pas, en général, les conditions imposées pour la réalisation de l'interférence de Laue. Dans ce cas il convient de rechercher pas à pas les conditions pour lesquelles apparaît le maximum correspondant à un faisceau d'interférence déterminé, en variant continûment la vitesse des électrons

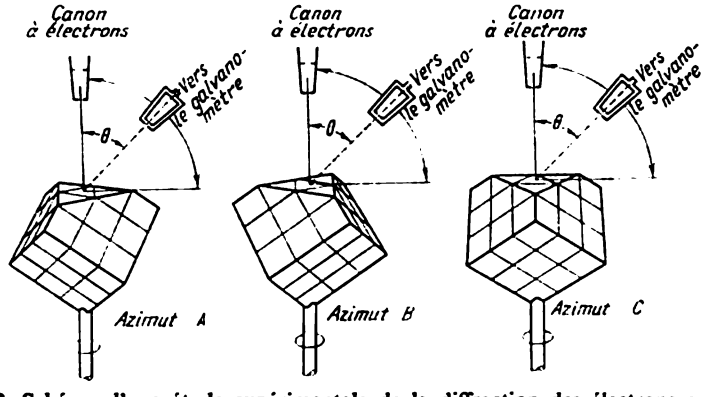


Fig. 212. Schéma d'une étude expérimentale de la diffraction des électrons suivant la méthode de Laue

(c'est-à-dire le potentiel d'accélération appliqué au canon) et en même temps en modifiant la position du collecteur recevant les électrons réfléchis par le cristal.

Pratiquement, l'expérience avec des électrons, analogue à l'expérience de Laue, a été réalisée par Davisson et Germer de la façon suivante. Un monocristal de nickel appartenant au système cubique était coupé suivant l'une de ses facettes, comme c'est montré à la figure 212 [parallèlement aux plans de notation cristallographique (111)]. Sur la figure 212 on a donné trois positions caractéristiques du cristal ainsi coupé. Dans l'une d'elles (azimut *A*) le plan contenant le faisceau et l'axe du collecteur passe par l'un des sommets du triangle; dans l'autre position (azimut *B*) il divise le côté du triangle en deux parties égales et dans la troisième (azimut *C*), il est parallèle à un côté du triangle.

La différence entre les conditions de l'expérience dans ces trois azimuts est montrée sur la figure 213. La face coupée du cristal est couverte de rangées régulières d'atomes. On peut l'assimiler à un ensemble de réseaux linéaires; le pas du réseau variait dans ces différents azimuts : par exemple, dans l'azimut *A* il était de 2,15 Å, dans l'azimut *C*, de 1,24 Å. L'installation expérimentale autorisait la rotation du cristal autour de l'axe vertical ainsi que le déplacement du collecteur dans toutes les positions autour de l'axe vertical.

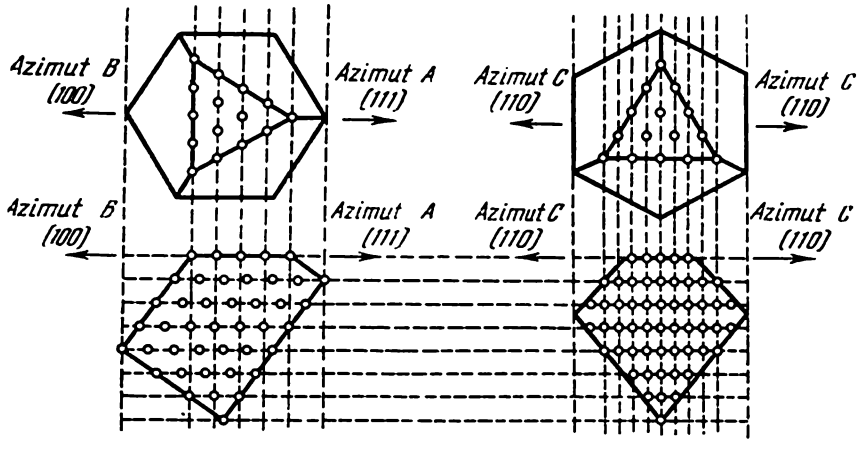


Fig. 213. Position des atomes dans le cristal de nickel en différentes projections

Dans l'expérience de Davisson et de Germer un faisceau d'électrons était dirigé perpendiculairement à la face du cristal et au moyen d'un collecteur on mesurait l'intensité de la réflexion des électrons sous des angles différents pour des positions fixées du cristal (dans l'un des trois azimuts indiqués). Les résultats de ces mesures sont illustrés sur la figure 214 par une série de diagrammes polaires de l'intensité de la réflexion dans l'azimut *A* pour des vitesses différentes des électrons (c'est-à-dire pour des longueurs d'ondes de de Broglie différentes). On y voit que pour des vitesses des électrons correspondant à 44 eV le maximum sous un angle de 50° est à peine ressenti (fig. 214, *a*); pour 54 eV il atteint son plein développement et la vitesse continuant à croître il diminue de nouveau en s'atténuant presque complètement pour 68 eV. Puis l'expérience était modifiée ainsi : la position du collecteur et la vitesse des électrons étaient maintenues invariables (par exemple se conformaient aux données de la fig. 214, *c*) mais on faisait

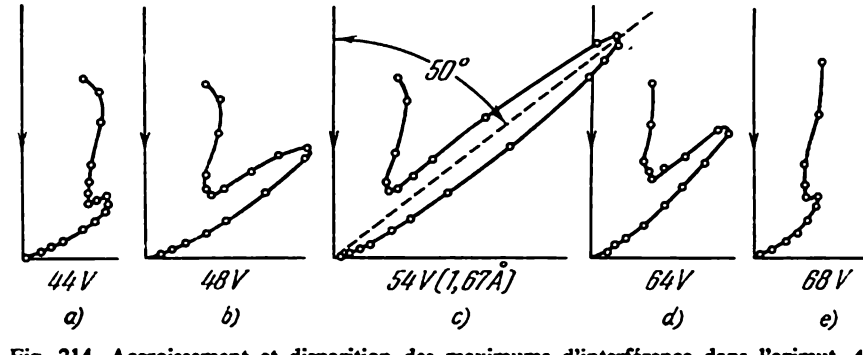


Fig. 214. Accroissement et disparition des maximums d'interférence dans l'azimut *A*

progressivement tourner le cristal autour de l'axe vertical et on mesurait chaque fois le courant correspondant au collecteur. Sur la figure 212 on voit que du fait de la symétrie, au cours de la rotation, le cristal reprenait trois fois sa position initiale. Par suite, un maximum net doit se répéter tous les 120°. La figure 215 montre que ce phénomène est en fait observé. Des petites bosses apparaissant sur la figure entre tous les deux maximums nets constituent des maximums faiblement marqués des électrons de 54 eV dans les azimuts *B* et *C*.

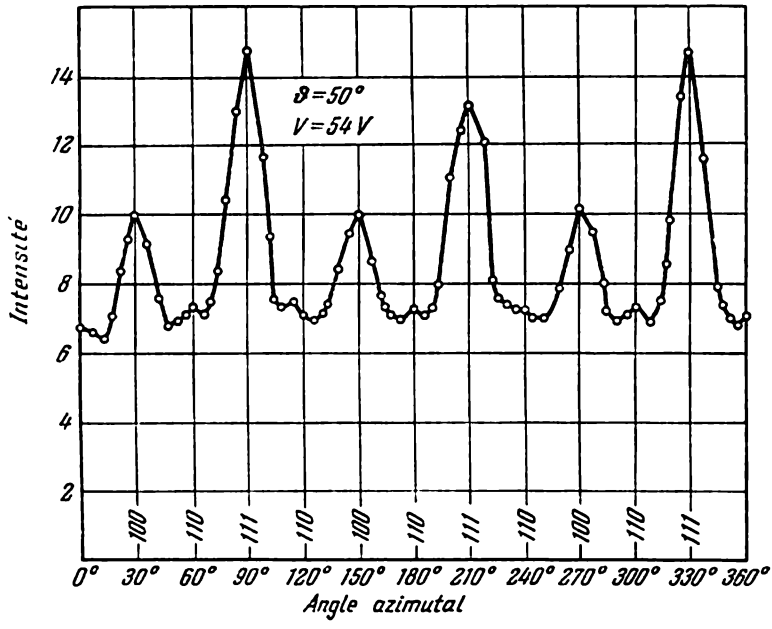


Fig. 215. Distribution azimutale de l'intensité en fonction de la rotation du cristal

Enfin la troisième méthode d'étude de l'interférence des rayons X est la méthode de Debye-Scherrer qui a également été utilisée pour démontrer l'existence d'interférence entre les faisceaux d'électrons. Si un pinceau de rayons X traverse une poudre de cristaux finement broyés ou une mince plaque métallique constituée d'un amas de cristaux extrêmement fins, il se trouvera toujours parmi eux des cristaux se disposant par rapport au faisceau incident sous un angle satisfaisant à la relation de Wulff-Bragg. Ces cristaux réfléchissent les rayons X et tous ces rayons réfléchis pour une valeur donnée de φ de la formule de Wulff-Bragg suivront la surface d'un cône. En plaçant sur le trajet des rayons diffusés une plaque photographique perpendiculairement à la direction du faisceau primaire on y obtient une

série d'anneaux. Une figure tout à fait semblable est obtenue si à travers une mince feuille métallique on fait passer un faisceau d'électrons : les électrons diffusés donnent sur la plaque photographique un système d'anneaux d'interférence.

Les expériences permettant d'obtenir des images d'électrons par la méthode de Debye-Scherrer furent réalisées pour la première fois par G. P. Thomson avec des électrons rapides (17 500 à 56 500 eV) et P. Tartakovski avec des électrons relativement lents (jusqu'à 1700 eV).

Sur les figures 216 et 217 on a donné deux photographies prises avec

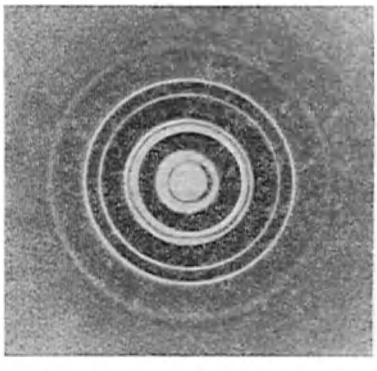


Fig. 216. Image de diffraction des électrons obtenue avec des feuilles d'or

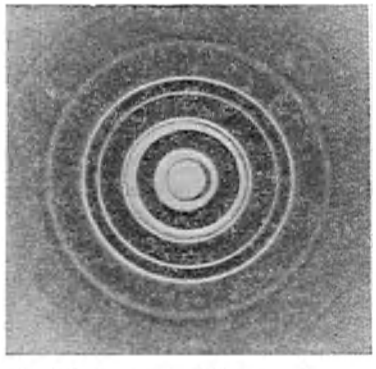


Fig. 217. Image de diffraction des électrons obtenue avec des feuilles de cuivre

des feuilles d'or et de cuivre. Comme on le voit dans les deux cas on obtient des anneaux d'interférence typiques. On peut montrer au moyen d'un procédé fort simple que ces anneaux sont formés par des électrons diffusés et non pas par des rayons X secondaires : en produisant un champ magnétique toutes les figures d'interférences se déplacent en se détruisant, tandis que les figures d'interférences obtenues avec des rayons X restent évidemment inchangées.

La vérification quantitative se réalise de la façon suivante. Des considérations géométriques montrent facilement que pour une feuille métallique donnée et une distance de la feuille à la plaque photographique inchangée il doit exister entre le rayon de l'anneau de diffraction r et la longueur d'onde λ la relation

$$\frac{r}{\lambda}=\text{const.} \tag{144.1}$$

Comme dans ces expériences on est obligé d'utiliser des électrons d'énergie de l'ordre des keV (par suite de la forte absorption des électrons lents par les feuilles métalliques) la simple expression de la longueur d'onde $\lambda=$

$=12{,}25\ V^{-\frac{1}{2}}$ devient imprécise et on doit utiliser la formule avec une correction sur les effets relativistes*)

$$\lambda=\frac{12{,}25}{\sqrt{V}}(1-0{,}489\cdot10^{-6}V). \tag{142.3}$$

Portant cette expression dans (144.1) on obtient

$$\frac{r}{\lambda}=\frac{rV^{\frac{1}{2}}}{12{,}25(1-0{,}489\cdot10^{-6}V)}\approx\frac{rV^{\frac{1}{2}}}{12{,}25}(1+0{,}489\cdot10^{-6}V)=\text{const.} \tag{144.2}$$

Au tableau XX on a donné les résultats de l'expérience avec les feuilles d'or. On voit dans la troisième colonne du tableau que la constance exigée est réalisée de façon satisfaisante.

---

*) Cette expression s'obtient de la façon suivante. Dans la formule de de Broglie $\lambda=h/mv$ il faut remplacer m par l'expression relativiste de la masse $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

On a alors

$$\lambda=\frac{h}{m_0v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Calculons maintenant la vitesse v en fonction du potentiel accélérateur en utilisant l'expression de l'énergie cinétique en théorie de la relativité (voir § 64)

$$E_k=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)=eV.$$

On en tire

$$v=c\,\frac{\sqrt{e^2V^2+2m_0c^2eV}}{m_0c^2+eV}.$$

Portant dans la formule de de Broglie il vient

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_0eV(1+eV/2m_0c^2)}},$$

ou si le potentiel accélérateur V est exprimé en électrons-volts

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{\frac{m_0e}{150}V\left(1+\frac{eV}{600m_0c^2}\right)}}=\sqrt{\frac{h^2}{m_0e}}\sqrt{\frac{150}{V}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{eV}{600m_0c^2}}}.$$

En donnant des valeurs numériques aux constantes on obtient

$$\lambda=\sqrt{\frac{150}{V}}\frac{1}{(1+0{,}978\cdot10^{-6}V)^{1/2}}\approx\frac{12{,}25}{V^{1/2}}(1-0{,}489\cdot10^{-6}V)$$

qui est bien la formule (142.3) du texte.

Tableau XX

V (volts)	r (cm)	$rV^{1/2}(1+0{,}489\cdot10^{-6}\,V)$
24 600	2,50	398
31 800	2,15	390
39 400	2,0	404
45 600	1,86	405
54 300	1,63	388

Enfin on peut déduire le pas du réseau des différents cristaux sur la base des photographies obtenues pour des rayons d'électrons par la méthode de Debye-Scherrer puis les comparer avec les résultats obtenus pour les mêmes cristaux au moyen des rayons X. Dans les deux cas on obtient des chiffres coïncidant entre eux de façon assez satisfaisante (voir tableau XXI). Actuellement sur la base des expériences d'interférences des faisceaux

Tableau XXI

Métal	Pas du réseau (en Å)	
	d'après l'interférence des électrons	d'après l'interférence des rayons X
Al	4,035	4,063
Au	3,99—4,20	4,06
Pt	3,89	3,91
Pb	4,99	4,92
Fe	2,85	2,86

d'électrons on a élaboré une méthode très efficace d'analyse électronographique dont la précision et les applications ne cèdent pas à l'analyse structurale aux rayons X et parfois même plus commode*).

Exercice. Un faisceau d'électrons d'énergie de 30 keV traverse une mince feuille d'aluminium. Admettant que la formule de Wulff-Bragg est applicable, calculer l'angle de déviation des figures d'interférences du premier ordre. Le pas du réseau de Al est donné au tableau XXI.

§ 145. Phénomènes d'interférences avec des faisceaux moléculaires et des neutrons

Suivant l'hypothèse de de Broglie les propriétés ondulatoires sont caractéristiques non seulement des électrons mais de toutes les particules matérielles, c'est-à-dire également des atomes, des molécules ou des particules élémentaires lourdes (protons, neutrons). Comme d'après la formule de de Broglie la longueur d'onde $\lambda=h/mv$ est inversement proportionnelle à la

*) Voir Z. Pinsker, *Diffraction des électrons*, M., 1949 (en russe).

masse, pour des vitesses égales, dans le cas de particules lourdes, λ doit être de beaucoup plus petit que dans le cas des électrons. C'est pourquoi, l'observation de la diffraction des ondes de de Broglie pour les atomes ou les autres particules lourdes n'est possible que pour des faibles vitesses de ces dernières. Le calcul montre qu'à une température ambiante la longueur d'onde de de Broglie des atomes légers est de l'ordre de 10^{-8} cm, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que la longueur d'onde des rayons X. Des perfections importantes de la technique de maniement des faisceaux dits moléculaires, c'est-à-dire de flux d'atomes neutres ou de molécules rectilignes*), ont permis d'observer également les phénomènes de diffraction avec des faisceaux d'atomes de l'hélium et de molécules d'hydrogène neutre. Etant donné que les atomes et les molécules ne peuvent pénétrer à des faibles vitesses à l'intérieur du cristal ce dernier se comporte avec les ondes de de Broglie comme un réseau à deux dimensions travaillant en réflexion. La diffraction des rayons X par ce réseau a été étudiée au § 32. On y a montré qu'un réseau plan produit une double multitude de spectres de diffraction, par exemple, les spectres d'ordre $(+1, +1)$ ou $(+1, -1)$, etc. Un résultat analogue doit avoir lieu au cas de la réflexion des ondes de de Broglie par un réseau cristallin.

Sur les figures 218 et 219 sont données les figures de diffraction des atomes de l'hélium et des molécules de l'hydrogène par le cristal de fluorure de lithium. Les deux maximums latéraux dans les deux cas correspondent aux diffractions de l'ordre $(+1, -1)$. Le calcul de la position des maximums donne des résultats se conformant très bien à ceux de l'expérience. Ainsi, les expériences avec des faisceaux moléculaires confirment de façon qualitative non seulement l'existence de propriétés ondulatoires de la matière mais justifient en même temps quantitativement la formule de de Broglie dans le cas d'atomes et de molécules.

D'une manière particulièrement parlante les propriétés ondulatoires des particules et la validité de la formule de de Broglie apparurent avec les neutrons. Les neutrons avec les protons constituent les composants élémentaires des noyaux atomiques; leur masse est à peu près égale à celle des protons, mais ils sont dépourvus de charge électrique. Grâce à cette dernière propriété les neutrons pénètrent facilement à l'intérieur des corps solides et ils permettent de produire une diffraction avec un réseau cristallin spatial.

Pour obtenir la diffraction en suivant la méthode de Laue il faut, comme on le sait, un spectre continu de longueurs d'ondes. Dans le cas de neutrons on obtient un faisceau de spectre continu d'ondes de de Broglie (faisceau polyénergétique), car en pénétrant à l'intérieur du corps les neutrons se mettent en équilibre thermique avec la substance. Leur vitesse obéit à la loi de distribution de Maxwell connue de la théorie cinétique et représentée graphiquement pour une température ambiante sur la figure 220. v_0 y est la

*) La méthode des faisceaux moléculaires et ses diverses applications sont exposées dans la monographie de K. F. Smith, *Molecular Beams*, London : Methuen et co. L. T. D., New York : John Wiley et sons, inc., 1955.

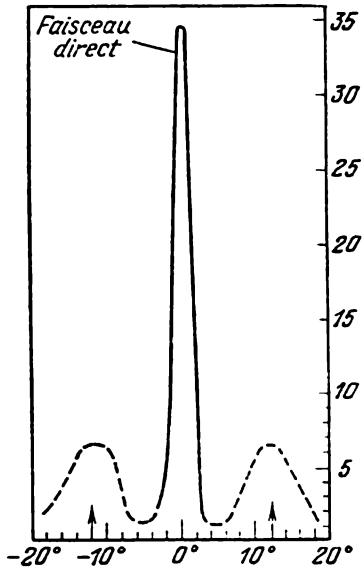


Fig. 218. Figure de diffraction des atomes de l'hélium par le cristal de fluorure de lithium

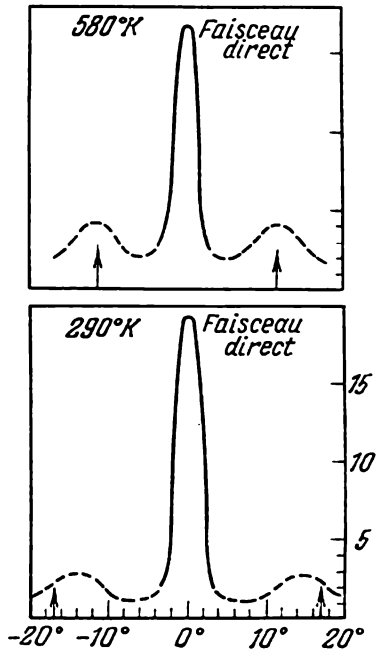


Fig. 219. Figures de diffraction des molécules d'hydrogène par le cristal de fluorure de lithium

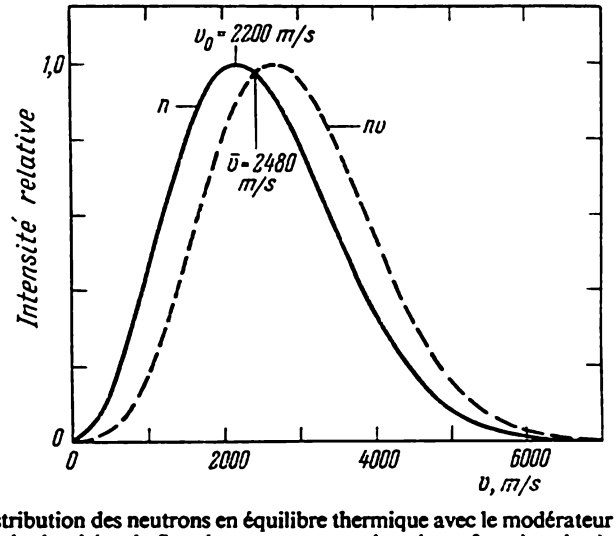


Fig. 220. Distribution des neutrons en équilibre thermique avec le modérateur (T=293 °K; la densité et le flux de neutrons sont donnés en fonction de v)

« vitesse la plus probable »; pour une température ambiante elle est égale à 2200 m/s. La longueur d'onde de de Broglie pour des neutrons de cette vitesse est de 1,8 Å, c'est-à-dire est justement de la grandeur exigée pour la réalisation de la diffraction avec un réseau cristallin. La quantité $\bar{v}=2480$ m/s est la vitesse moyenne des neutrons à la température ambiante; sur la figure on a représenté en pointillé également la courbe de distribution pour un flux de neutrons nv, c'est-à-dire du nombre de neutrons traversant l'aire de 1 cm² par seconde.

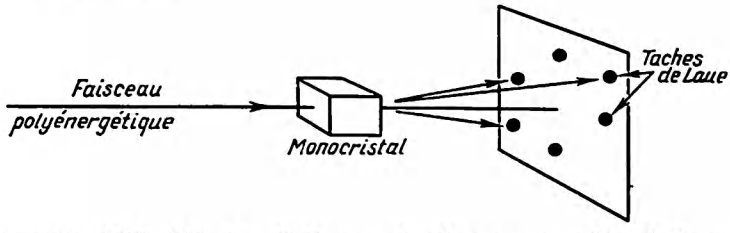


Fig. 221. Méthode de diffraction de Laue appliquée aux rayons X et à des neutrons

Sur la figure 221 on a représenté le schéma de l'expérience de diffraction avec un faisceau de neutrons polyénergétique et sur la figure 222 la photographie prise au cours de la traversée par des neutrons d'un monocristal de NaCl. La distribution de taches, typique pour une diffraction par un réseau spatial, correspond à la symétrie du cristal.

Pour obtenir la diffraction par la méthode de Bragg il faut un flux de neutrons monoénergétique. On obtient un tel faisceau en réalisant une

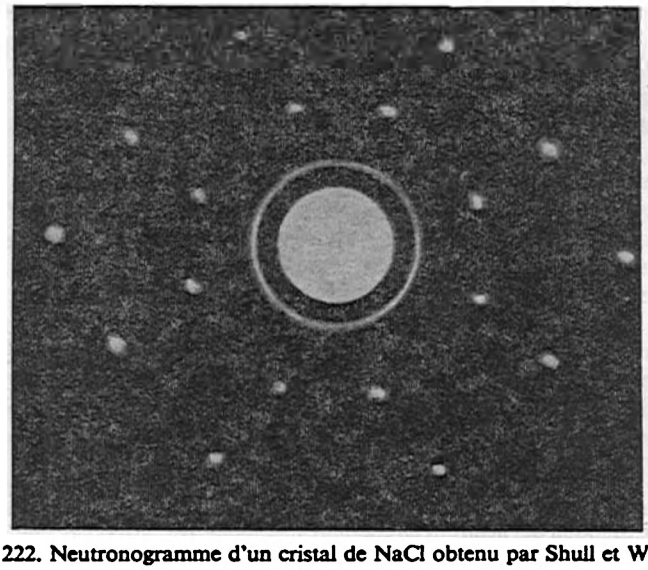


Fig. 222. Neutronogramme d'un cristal de NaCl obtenu par Shull et Wollan

réflexion préalable de ce faisceau de neutrons sur le cristal, qui produit des neutrons de vitesses déterminées et, par suite, de longueur d'onde de de Broglie fixée. Pour un angle de glissement donné les neutrons se réfléchiront au cas où est remplie la condition de Wulff-Bragg

$$\lambda = 2d \sin \vartheta,$$

avec

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

En choisissant de façon appropriée l'angle ϑ on peut dégager du faisceau polyénergétique des neutrons de longueurs d'ondes de de Broglie voulues et les utiliser pour l'étude de la structure des cristaux.

Actuellement l'étude de la structure des cristaux par diffraction des neutrons est l'apanage d'une branche spéciale de l'analyse structurale dite diffractométrie neutronique structurale qui est un appoint important aux méthodes d'analyse au moyen des rayons X et des électrons. En particulier, par exemple, la détermination de la position des atomes d'hydrogène dans les réseaux cristallins n'est devenue possible que grâce à la diffraction des neutrons.

§ 146. Paquet d'ondes et particule

Dans les quatre derniers paragraphes on a pu se convaincre que les expériences d'interférence réalisées avec des « particules » tel l'électron ou même un atome entier témoignent de façon aussi nette en faveur de la nature ondulatoire de ces « particules » que les expériences correspondantes avec la lumière. On est de nouveau mis en présence de la dualité rencontrée pour la première fois pour la lumière. Toutefois, au début de la construction de la mécanique quantique une alléchante tentative fut réalisée dans le but de résoudre la contradiction onde-particule en considérant les particules comme des *paquets d'ondes*. On s'est basé sur des considérations suivantes. L'électron ou toute autre particule matérielle ne peut évidemment être une onde plane sinusoïdale, car cette dernière est infinie, tandis que la particule est localisée dans l'espace et le temps, c'est-à-dire occupe à un certain moment de temps une place définie dans l'espace. On a vu, toutefois, (§ 135), qu'avec des ondes planes, en choisissant de façon appropriée les vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ associés, on peut former un paquet d'ondes d'extension aussi petite que l'on veut. Ne peut-on assimiler la particule à un paquet d'ondes? Cette hypothèse paraît trouver une confirmation dans la remarquable propriété des ondes de de Broglie dont la vitesse de groupe, c'est-à-dire précisément la vitesse avec laquelle se déplace le maximum du paquet, est justement égale à la vitesse de la particule v

$$g = v. \tag{141.2}$$

Si alléchante que soit cette idée simple un examen plus approfondi montre qu'elle est absolument fausse. L'objection décisive est la suivante. Les propriétés propices du paquet trouvées au § 135, notamment sa stabilité

et son mouvement en bloc avec une vitesse de groupe, ne fournissent pas une image complète des propriétés du paquet. Elles ne furent en réalité dégagées qu'en qualité de première approximation, car en étudiant le mouvement du paquet au § 135 on avait utilisé la relation approchée entre ω et k

$$\omega(k)=\omega(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$$

en négligeant tous les termes suivants du développement. Si, au contraire, on conduit le calcul de façon précise, on obtient un résultat quelque peu différent et précisément il apparaît, malgré le déplacement du paquet à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}$ égale pour l'onde de de Broglie à v, que le paquet lui-même, en mouvement dans un milieu dispersif, ne conserve pas sa forme et ses dimensions, mais s'étale progressivement.

La cause de cet étalement se comprend facilement en faisant appel aux considérations qualitatives suivantes. Supposons qu'à un certain moment déterminé une superposition d'ondes planes constitue un paquet. Pour le former il est nécessaire de superposer des ondes de longueurs d'ondes ou, ce qui revient au même, au nombre d'ondes k variant continûment dans un certain intervalle $\pm\Delta k$. Si le milieu n'est pas dispersif, toutes ces ondes se propagent avec la même vitesse et le paquet se conserve. Mais s'il y a dispersion, alors les ondes planes formant le paquet se propageront avec des vitesses de phase différentes : les plus rapides devanceront le paquet, tandis que les plus lentes seront en retard. Par suite, les relations de phase entre les ondes planes nécessaires à la formation du paquet seront violées à l'instant suivant et le paquet en s'allongeant s'étalera. La vitesse de cet étalement se caractérise par la différence entre les vitesses de groupe des ondes les plus rapides et les plus lentes, c'est-à-dire par la quantité $\frac{d^2\omega}{dk^2}\Delta k$ mais le terme contenant $\frac{d^2\omega}{dk^2}$ fut justement négligé au cours de la première étude des paquets.

Des calculs assez rébarbatifs qu'on a omis ici*) montrent que si l'on forme avec les ondes de de Broglie un paquet possédant au moment $t=0$ la forme en cloche de la courbe de probabilité de Gauss

$$u(x, 0)=Ce^{-x^2/2b^2},$$

où u est l'amplitude du paquet au point de coordonnée x et la quantité b caractérise la demi-largeur du paquet au moment $t=0$, alors l'extension du paquet devient double après un intervalle de temps donné par la formule

$$t=\sqrt{3}\,\frac{b^2m}{\hbar},$$

*) Ceux qui s'intéressent à ces calculs peuvent s'adresser à l'ouvrage de D. I. Blokhintsev, *Fondements de la mécanique quantique*, M., 1963 (en russe).

où m est la masse de la particule et $\hbar$ la constante de Planck. Pour une particule de masse $m=1$ g s'étendant sur 2 mm ($b=0{,}1$ cm) le paquet associé devient double après $6\cdot10^{17}$ années. Mais pour une particule de masse de l'électron ($m=0{,}9\cdot10^{-27}$ g) pour $b\sim10^{-12}$ cm $t\approx1{,}6\cdot10^{-26}$ s, c'est-à-dire que le paquet correspondant à l'électron s'étalerait instantanément ce qui manifestement est contraire aux observations les plus élémentaires.

§ 147. Interprétation statistique des ondes de de Broglie

Au paragraphe précédent on a vu que la tentative d'assimiler les particules à des paquets d'ondes s'est soldé par un échec : les paquets s'étalent et disparaissent, quant aux particules elles n'ont pas ces propriétés.

On peut d'autre part invoquer des considérations générales montrant que les particules microscopiques ne peuvent être assimilées à des paquets d'ondes. Un trait essentiel des particules élémentaires est leur indivisibilité. On affirme que l'électricité négative se compose d'électrons parce qu'au cours de la recharge la quantité d'électricité transmise est égale à la charge d'un ou de plusieurs électrons, mais en tout cas d'un nombre entier et non inférieur à un. De même de l'analyse des lois de l'effet photo-électrique se dégage la conclusion de l'existence des photons, car il apparaît que la lumière monochromatique de fréquence ν transporte de l'énergie et la transmet au cours de l'absorption uniquement par photons entiers $h\nu$, mais non par fractions de photon.

Cette propriété d'indivisibilité, les ondes ne la possèdent pas. A la frontière de deux milieux de vitesse de phase différente l'onde se divise en onde réfléchie et onde réfractée, en traversant un cristal elle se divise en une série de faisceaux diffractés, etc. Si l'on assimilait l'électron à un groupe d'ondes, alors, par exemple, au cours de la diffraction d'un faisceau très peu intense, les électrons traversant un à un le cristal, chaque faisceau de diffraction n'aurait dû transporter qu'une partie de l'électron, ce qui en réalité n'a pas lieu.

Si, toutefois, l'indivisibilité des particules au cours de la réflexion, la réfraction, la diffraction doit se conserver, on peut affirmer qu'en frappant la surface de séparation de deux milieux la particule *ou bien* se réfléchira *ou bien* passera dans le second milieu. Mais dans ce cas la liaison entre les ondes et les particules ne peut être interprétée que statistiquement et précisément de la façon suivante : le carré de l'amplitude de l'onde au point considéré se mesurant par son intensité constitue la mesure de la *probabilité* de rencontrer la particule en cet endroit.

Pour éclairer cette interprétation examinons une expérience d'interférence typique : une onde plane frappe un écran opaque dans lequel sont pratiquées deux ouvertures S_1 et S_2 (fig. 223). Dans ce cas, à une distance suffisamment éloignée de l'écran (plaque photographique, écran fluorescent) se forment des figures d'interférences constituées de franges alternativement brillantes et obscures. L'explication de ces figures du point de vue ondulatoire est universellement connue : on doit considérer qu'à gauche de

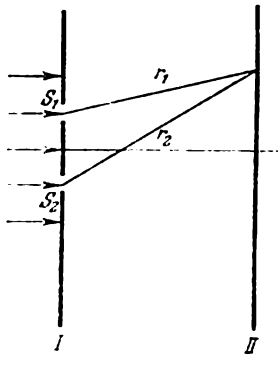


Fig. 223.

l'écran *I* arrive une onde plane; les ouvertures S_1 et S_2 deviennent alors des centres de deux ondes sphériques d'Huygens se propageant à droite de l'écran et interférant entre elles. Au point de l'écran *II* où la différence de marche de ces ondes est égale à zéro ou à un nombre pair de demi-ondes on obtient l'amplitude maximale et en même temps le maximum de la frange brillante; là où la différence de marche est égale à un nombre impair de demi-ondes les ondes en interférant s'annulent mutuellement, l'amplitude est nulle et on est en présence d'une frange obscure.

Comment expliquer l'apparition de ces franges en considérant les électrons comme des « particules » indivisibles? Supposons que le faisceau d'électrons incident est peu intense. L'expérience montre que la nature des figures d'interférences est indépendante de l'intensité. Admettons que la plaque photographique est capable d'enregistrer l'impact des électrons isolés*). Dans ce cas à la traversée de l'écran *I* par un flux d'électrons peu intense il devrait apparaître sur la plaque d'abord des points sombres isolés se répartissant de façon désordonnée et constituant les traces des points d'impact des électrons. On aurait pu remarquer que le nombre de ces taches, c'est-à-dire le nombre de points d'impact, est supérieur aux endroits où auraient dû se former les maximums des figures d'interférences. Si l'expérience dure suffisamment longtemps, ces traces isolées devraient former des franges d'interférences. Ainsi donc, les franges d'interférences brillantes sont des points d'impact des électrons les plus nombreux; les franges obscures sont au contraire des endroits où l'on n'observe pas de points d'impact**).

Si l'on applique maintenant ces considérations non pas à un ensemble d'un très grand nombre d'électrons, mais à des électrons isolés, alors on peut dire que la probabilité de rencontrer l'électron est maximale là où l'amplitude du champ d'onde prend une valeur maximale et est égale à zéro là où l'amplitude est nulle. Mais comme l'amplitude peut être positive et négative, tandis que la probabilité est toujours un nombre positif, il est nécessaire d'exprimer la probabilité par le *carré* de l'amplitude.

En admettant cette méthode statistique d'interprétation des ondes de de Broglie on peut conserver aussi les paquets d'ondes en qualité de procédé commode de raisonnement. Formons un paquet d'ondes de manière qu'il occupe la portion de l'espace où se trouve l'électron à un certain moment et abandonnons le paquet à lui-même. Si maintenant on arrive à trouver

*) Dans la suite de l'exposé on parlera, pour être plus concret, d'électrons tout en ayant en vue des particules microscopiques quelconques.

**) On a ici en vue l'image positive. Il est évident que sur la plaque photographique les endroits frappés par le maximum d'électrons sont obscurs.

la forme du paquet pour un certain moment du temps suivant t, alors le carré de son amplitude en tout point sera proportionnel à la probabilité de retrouver l'électron à l'endroit considéré au moment t.

§ 148. Relations d'incertitude

L'interprétation statistique des ondes de de Broglie analysée au paragraphe précédent permet de relier les résultats obtenus théoriquement aux faits expérimentaux. On a laissé, toutefois, de côté la question de la nature des objets microscopiques : électrons, photons, etc. La principale difficulté réside en ce que pour décrire les faits expérimentaux on doit utiliser tantôt des particules, tantôt des ondes. Les mêmes objets, les électrons, dans l'expérience avec la chambre de Wilson laissent des traces bien marquées, c'est-à-dire se conduisent comme des projectiles se mouvant sur des trajectoires déterminées, tandis que dans l'expérience de la traversée des feuilles microcristalliques ils produisent des anneaux d'interférences alternativement brillants et obscurs, c'est-à-dire se conduisent comme des ondes obéissant au principe de superposition. Puisque, toutefois, les propriétés des particules et des ondes sont non seulement très différentes mais à maints égards s'excluent mutuellement et les électrons possèdent certainement une nature unique, on est obligé de conclure que les électrons ne sont en réalité ni l'une ni l'autre, de sorte que l'image d'onde et de particule s'applique dans certains cas et dans d'autres est inacceptable. Les propriétés des microparticules sont si bizarres, leur comportement ne ressemblant aucunement à celui des corps macroscopiques familiers qui nous entourent qu'on est incapable de leur donner des images appropriées. Il est, toutefois, évident qu'étant obligé pour décrire *les mêmes objets* d'utiliser des images ondulatoires et corpusculaires on ne peut attribuer à ces objets *toutes* les propriétés des particules et *toutes* les propriétés des ondes. Par exemple, l'existence des propriétés ondulatoires chez des électrons doit inéluctablement introduire certaines restrictions dans l'attribution à ces microparticules de notions caractérisant la particule en mécanique classique.

On verra maintenant quelles sont ces restrictions. En mécanique classique les particules possèdent des propriétés fondamentales suivantes : toute particule en tout moment de temps occupe une position déterminée dans l'espace (on entend par position les coordonnées du centre de gravité) et possède une impulsion déterminée [pour des particules de masse au repos non nulle ($p=mv$) à une impulsion donnée correspond une vitesse déterminée v]. La possibilité de détermination précise et simultanée de la position et de la vitesse est une propriété si caractéristique de la particule macroscopique qu'en physique classique l'« état » d'un système de particules est complètement caractérisé par l'ensemble de toutes les coordonnées et de toutes les impulsions associées. On verra maintenant que la possession par les électrons de propriétés ondulatoires introduit des restrictions importantes dans la possibilité d'une *telle* description de l'état du système de microparticules.

Supposons en effet qu'on connaît la position de la microparticule sur l'axe x avec une certaine incertitude Δx de sorte qu'on peut affirmer que la particule se trouve quelque part entre x_0 et $x_0+\Delta x$. Maintenant rappelons que tous les faits de la physique atomique peuvent être également décrits à l'aide de l'image d'ondes (voir §§ 137 à 139). Le fait que la position de la particule n'est connue qu'avec une certaine incertitude Δx est décrit évidemment dans la vision ondulatoire en stipulant que l'amplitude de la fonction d'onde n'est différente de zéro que sur la longueur du segment approximativement égal à Δx. Cette fonction, comme on le sait, peut être construite par superposition d'ondes sinusoïdales mais quant à la fonction elle-même elle n'est pas une onde sinusoïdale. On ne peut donc lui attribuer des valeurs déterminées de ν et de k : limitée dans l'espace la fonction d'onde constitue un paquet d'ondes pour la construction duquel par superposition d'ondes sinusoïdales il faut additionner des ondes au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ dont les valeurs varient continûment dans les limites de l'intervalle déterminé Δk. La relation entre l'extension du paquet Δx et l'intervalle Δk (§ 135) est donnée par la condition

$$\Delta x \Delta k_x \geqslant 2\pi. \tag{135.5}$$

Multipliant les deux membres de cette inégalité par la constante de Planck $\hbar$ et notant que d'après le postulat de de Broglie $\hbar k_x = p_x$ on obtient

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant 2\pi\hbar. \tag{148.1}$$

Il suit de cette relation que x et p_x ne peuvent simultanément posséder des valeurs déterminées : si la valeur de x est déterminée, c'est-à-dire si $\Delta x=0$, alors $\Delta p_x \to \infty$ et, par suite, p_x n'a aucune valeur déterminée et inversement. Mais si x et p_x sont indéterminés dans des limites connues Δx et Δp_x, il existe alors entre ces incertitudes la relation (148.1) de laquelle il suit que plus Δx est petit, c'est-à-dire plus précisément la position de la particule est localisée, plus grand est Δp_x, c'est-à-dire plus est indéterminée la composante associée de l'impulsion.

Pour les deux autres coordonnées on obtient des inégalités analogues [voir les formules (135.6)]

$$\Delta y \Delta p_y \geqslant 2\pi\hbar, \tag{148.1'}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geqslant 2\pi\hbar. \tag{148.1''}$$

Ces inégalités sont appelées relations d'incertitude d'Heisenberg. *Elles constituent justement les restrictions d'applications aux microparticules de notions classiques, dont on a parlé au début de ce paragraphe.* En effet, pour une particule macroscopique comme il a été dit il est possible de déterminer avec précision à chaque moment du temps la position et l'impulsion. La relation (148.1) montre que cette description de l'état perd son sens pour une particule microscopique. Cela se dégage du fait qu'en vertu de la relation (148.1) Δx et Δp_x ne peuvent être *en même temps* égaux à zéro [il en est de même pour Δy et Δz et, par suite, pour Δp_y et Δp_z en application des relations (148.1') et (148.1'')]. Il en résulte qu'il est inutile de se poser la

question quelle est simultanément la valeur précise de x et de p_x, car tout simplement les microparticules ne possèdent pas ces valeurs.

Il faut bien se représenter que cette situation bizarre est la conséquence inéluctable de ce que les électrons et les autres microparticules à côté des propriétés corpusculaires possèdent également des propriétés ondulatoires. Les propriétés corpusculaires exigent que la particule puisse être localisée dans l'espace et le temps. Mais même une localisation approchée (valeur finie de Δx, Δy, Δz) entraîne que le champ d'ondes correspondant doit avoir une extension limitée. Mais dans ce cas on voit entrer en scène un fait ayant lieu pour tout champ d'ondes : *on ne peut construire d'aucune manière un champ d'ondes possédant une extension limitée et en même temps constituant une onde à λ bien déterminé* (c'est-à-dire à valeur de k déterminée). C'est l'une des deux situations qui se présente : soit l'onde sinusoïdale caractérisée par une longueur déterminée de l'onde λ, or cette onde est illimitée, par suite, il ne peut être question de localisation, soit un champ d'ondes limité et alors il n'y a plus d'onde de valeur déterminée λ et il existe un paquet d'ondes se développant en un spectre continu où λ varie continûment dans un intervalle déterminé et d'autant plus grand que le paquet est étroit, c'est-à-dire plus la localisation est précise.

§ 149. Détermination de la position et de l'impulsion de la microparticule

Au paragrahe précédent on a introduit les relations d'incertitude en partant de la dualité de la nature de l'électron. Abordons maintenant l'étude des expériences permettant de déterminer les coordonnées de l'électron et son impulsion. Mais comme dans le paragraphe précédent on respectera tout naturellement le fait expérimentalement bien établi : la dualité onde-particule propre aux microparticules, et à chaque étape des raisonnements ultérieurs on établira des restrictions aux applications aux microparticules de procédés de description convenant aux corps macroscopiques du fait des propriétés ondulatoires des microparticules.

La discussion des expériences destinées à déterminer la coordonnée et l'impulsion de la microparticule, nonobstant son rôle parlant, présente un autre intérêt.

En effet, si la théorie avait abouti à la conclusion qu'il est impossible de parler simultanément de valeurs précises de la coordonnée et de l'impulsion de la microparticule, mais qu'il eût été possible de suggérer une expérience, même irréalisable par suite de *difficultés techniques* dans laquelle les deux quantités aurait pu être mesurées avec la précision voulue, cela signifirait que la théorie est entachée de contradictions internes.

Examinons le montage de l'expérience permettant de mesurer de façon directe la position de l'électron. Supposons qu'un écran percé d'une fente AB de largeur Δx, qu'on appellera par la suite « diaphragme », soit frappé à gauche par un électron de direction perpendiculaire au plan du diaphragme (fig. 224). Dirigeons l'axe x parallèlement au diaphragme et l'axe y perpendi-

culairement à ce dernier. Si l'on détecte l'électron à droite du diaphragme, par exemple, d'après les scintillations engendrées sur un écran fluorescent CD ou d'après la tache laissée sur une plaque photographique, on peut affirmer que l'électron a traversé la fente AB. Dans ce cas la « position de l'électron » *au moment de la traversée de la fente* peut évidemment être déterminée comme la position de la fente par rapport aux autres éléments de l'instrument. En effet, si le diaphragme est suffisamment massif et est rigidement lié aux autres parties de l'instrument, la position de la fente dans le diaphragme sera fixée par rapport à ce système de référence et, par suite, la position de l'électron au moment de la traversée de la fente sera

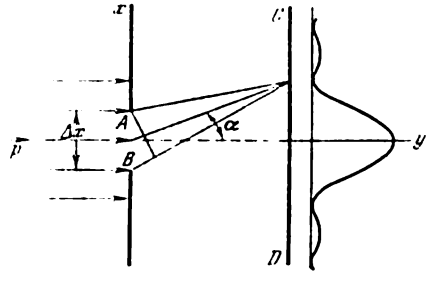


Fig. 224. Détermination de la position de l'électron au moyen d'un écran percé d'une fente

connue avec une imprécision Δx égale à la largeur de la fente. Il est évident qu'en rétrécissant la fente on pourrait déterminer la position de l'électron avec une précision de plus en plus grande et il n'y a aucune limite à l'augmentation de la précision de détermination de la position de l'électron.

Voyons maintenant ce qu'on peut dire de l'impulsion de l'électron. A première vue il peut sembler que l'impulsion est également connue avec une netteté totale. En effet, puisque la direction du déplacement de l'électron à *gauche* du diaphragme est perpendiculaire au plan du diaphragme, la composante x de l'impulsion *à gauche de l'écran* est nulle et la composante y y est égale, par exemple, à p, autrement dit, l'impulsion a une valeur déterminée. Or à la traversée de la fente l'onde plane de de Broglie, représentant le mouvement d'un électron libre, est soumise à la diffraction. Or cela a la signification suivante : supposons qu'au lieu d'un seul électron on a un flux parallèle d'électrons traversant le diaphragme dans la direction de l'axe y. On obtiendra alors sur une plaque photographique des figures de diffraction composées d'un maximum principal étalé, se disposant symétriquement par rapport à l'axe y, et de maximums secondaires d'ordres supérieurs, se plaçant des deux côtés du maximum central (voir la courbe dans la partie droite de la fig. 224). Les figures de diffraction permettent de conclure qu'après la traversée de la fente *la plus grande partie* d'électrons continue à se déplacer dans la direction initiale, c'est-à-dire en conservant la valeur $p_x=0$. Mais il existe également des électrons qui modifient leur

direction et atteignent les différents points de la plaque photographique avec une probabilité correspondant à l'allure de la courbe dans la partie droite de la figure 224.

Notons maintenant la circonstance importante suivante. Les figures de diffraction décrites plus haut n'apparaissent que quand la fente est simultanément traversée par un grand nombre d'électrons. On aurait pu penser que la présence d'un grand nombre d'électrons est nécessaire à la diffraction et que l'électron isolé se conduit de façon différente. Or il n'en est rien. Il est connu de l'optique que la nature des figures de diffraction est absolument indépendante de l'intensité de la lumière. Quant aux électrons, tout récemment, les physiciens soviétiques L. Biberman, N. Souchkine et V. Fabriquant montrèrent que même au cas où des électrons isolés traversent un système de diffraction un par un à des intervalles de temps assez grands et, par suite, se conduisent de façon absolument indépendante l'un de l'autre, en fin de compte, si l'expérience dure suffisamment longtemps, on obtient des figures de diffraction correspondant exactement à celles fournies par des flux de dizaines de millions de fois plus intenses.

Dans l'expérience de L. Biberman, N. Souchkine et V. Fabriquant l'intervalle de temps entre deux passages successifs de l'électron à travers le système de diffraction était d'environ 30 000 fois (!) supérieur au temps mis par un électron pour parcourir tout l'appareil. Néanmoins les figures de diffraction obtenues ne différaient aucunement de celles réalisées avec des faisceaux dont l'intensité était 10^7 fois plus grande. Cela montre que les modifications de la direction de parcours conduisant à l'apparition des figures de diffraction caractéristiques ont lieu dans le cas de traversée par des électrons du système de diffraction (dans le cas concerné de la fente) un par un.

Une question se pose : comment expliquer du *point de vue corpusculaire* le fait qu'à la traversée de la fente certains électrons modifient leur direction? Il est évident que l'électron-particule aurait pu modifier sa direction seulement au cours d'interactions avec les bords de la fente ou avec tout l'écran. Donc la variation de la direction dans la vision corpusculaire est le résultat de ce qu'au moment du passage à travers la fente l'électron acquiert une impulsion complémentaire Δp_x dans la direction de l'axe x. Pour la plupart des électrons, notamment pour ceux d'entre eux qui traversent le diaphragme sans modification de direction et atteignent le lieu du maximum de noircissement de la plaque photographique, cette impulsion complémentaire est égale à zéro. Mais comme le noircissement s'atténue doucement des deux côtés du maximum, il y a aussi des électrons qui arrivent sur la plaque en des lieux différents et, par suite, en traversant la fente, acquièrent une impulsion complémentaire Δp_x différente de zéro.

Il est évident que de la même façon que la largeur de la fente Δx caractérise l'incertitude avec laquelle est connue la position de l'électron au moment de la traversée de la fente, la grandeur de l'impulsion complémentaire Δp_x caractérise l'incertitude avec laquelle la composante x de l'impulsion est connue.

En effet, puisque l'électron possède la probabilité d'atteindre tout point des figures de diffraction (pratiquement dans les limites du maximum central), Δp_x peut prendre toutes les valeurs possibles de zéro jusqu'à une certaine valeur limite dépendant de la largeur du maximum central des figures de diffraction.

On peut toutefois modifier le montage de façon à pouvoir déterminer expérimentalement Δp_x. En appliquant la loi de conservation de l'impulsion (de la quantité de mouvement) aux interactions de la microparticule et du diaphragme qu'elle traverse on peut précisément déterminer l'impulsion de la microparticule.

Comme à la traversée de la fente la particule reçoit une impulsion complémentaire parallèle au diaphragme, c'est-à-dire dans la direction de l'axe x, le diaphragme et sa fente subissent un recul également dans la direction de l'axe x, mais de sens contraire. Connaissant ce recul on aurait pu obtenir Δp_x et puisque la composante y ne varie pas, on connaîtrait avec précision l'impulsion de l'électron au moment du passage à travers la fente.

Pour mesurer le recul il faut que le diaphragme soit suffisamment léger et mobile. Si le diaphragme avant le passage de l'électron se trouvait au repos par rapport aux autres éléments de l'instrument, alors en mesurant la vitesse qu'il acquiert à la traversée de l'électron et connaissant sa masse on pourrait trouver l'impulsion complémentaire Δp_x acquise par le diaphragme et, par suite, celle communiquée à l'électron.

Le fait qu'une telle expérience est irréalisable pour des raisons techniques, par exemple, parce qu'il est impossible de réaliser un écran aussi léger qu'il puisse acquérir une vitesse sensible dans l'interaction avec l'électron, n'influe aucunement sur la justesse des conclusions dégagées sur la base de l'analyse du déroulement attendu du processus. En effet, ce raisonnement ne diffère en rien de la théorie de l'effet Compton où la possibilité d'application de la loi de conservation de l'impulsion aux collisions des microparticules est démontrée expérimentalement. Ainsi donc, le montage avec un diaphragme mobile permet de déterminer Δp_x et, par suite, p avec le degré de précision désiré. Mais si le diaphragme devient mobile, il ne peut plus servir de référentiel fixe permettant de déterminer la position de l'électron au moment de sa traversée de la fente.

On voit donc qu'il est possible de monter deux expériences différentes. L'une permet de déterminer la position de l'électron au moment de la traversée de la fente. Autrement dit, cette expérience permet de réaliser la localisation spatio-temporelle de l'électron. L'autre expérience permet d'utiliser les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie pour la détermination précise de l'impulsion de l'électron, mais pour cela il faut renoncer à la possibilité de localisation spatio-temporelle de l'électron.

Revenons à l'examen du montage avec le diaphragme immobile. Dans ce cas le montage permet de mesurer la position de la particule avec l'incertitude Δx qui peut être rendue aussi petite que l'on veut. Mais puisqu'avec un diaphragme fixé rigidement on est dans l'impossibilité d'apprécier le recul subi par le diaphragme au passage de la particule, l'impulsion com-

plémentaire acquise par la particule reste incertaine dans les limites définies de Δp_x. Montrons que les incertitudes Δx et Δp_x sont liées par la relation $\Delta x \Delta p_x \geqslant 2\pi\hbar$.

De la figure 224 on tire

$$\Delta p_x = p \sin\alpha = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin\alpha. \tag{149.1}$$

De l'autre côté, si l'on tient compte de l'impact de la plaque photographique par l'électron dans le domaine du seul maximum de diffraction central, alors α sera l'angle entre l'axe y et la direction vers le premier minimum de diffraction. La position de ce minimum se détermine par la condition que la différence de marche entre les ondes diffractées par les bords supérieur et inférieur du diaphragme soit égale à λ. Ceci donne (voir fig. 224)

$$\Delta x \sin\alpha = \lambda. \tag{149.2}$$

Combinant (149.1) et (149.2) on obtient

$$\Delta x \Delta p_x = 2\pi\hbar. \tag{149.3}$$

Si l'on tient compte également des maximums de diffraction latéraux, alors au lieu de la condition (149.3) on aura $\Delta x \Delta p_x = n 2\pi\hbar$ et, par suite, en général

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar, \tag{149.4}$$

ce qui est bien la relation d'incertitude.

Pour apprécier l'aspect quantitatif des restrictions imposées à l'application aux microparticules des notions classiques que fixent les relations d'incertitude il est utile d'exprimer p en fonction de la vitesse, $p = mv$, et de tirer de (149.4)

$$\Delta v \approx \frac{\hbar}{m\,\Delta x}. \tag{149.5}$$

Comme $\hbar$ est une quantité très petite,

$$\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27} \text{ erg·s},$$

la quantité Δv dépend essentiellement du rapport entre les valeurs numériques de $\hbar$ et de m. En principe, les relations d'incertitude doivent s'appliquer à toutes les masses y compris les masses macroscopiques, car on peut démontrer que la mécanique classique est un cas limite de la mécanique quantique. Or la relation (149.5) montre qu'avec l'accroissement de la masse Δv tend vers zéro puisque les valeurs raisonnables de Δx sont pour les masses macroscopiques de beaucoup supérieures à la valeur numérique de $\hbar$. Au contraire, pour les microparticules dont l'ordre de grandeur de la masse est proche de celui de $\hbar$ l'incertitude Δv peut atteindre des grandes valeurs, suivant la précision de détermination de la position, c'est-à-dire suivant la valeur de Δx. Eclairons cela par deux exemples. S'il s'agit d'un corps de masse m égale à 1 g, il devient évident que la précision est tout à

fait satisfaisante si la détermination de la position du centre de gravité est telle que Δx ne dépasse pas 10^{-4} cm = 1 μm. Dans ce cas

$$\Delta v = \frac{1{,}054 \cdot 10^{-27}}{10^{-4}} = 1{,}054 \cdot 10^{-23},$$

c'est-à-dire que l'incertitude sur la vitesse est au-delà des limites des possibilités de mesure. Comme il fallait s'y attendre pour des corps macroscopiques les relations d'incertitude ne jouent pratiquement aucun rôle.

Si, toutefois, on applique la même relation à l'électron, le résultat sera différent. La masse de l'électron est égale à $9 \cdot 10^{-28}$ g $\approx 10^{-27}$ g, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que $\hbar$. Dans ce cas l'ordre de grandeur de Δv dépend manifestement de la précision de détermination de la position, c'est-à-dire de la valeur de Δx. Supposons qu'il s'agit de déterminer l'appartenance de l'électron à un certain atome. Dans ce cas la précision raisonnable de détermination de la position doit être au moins $\Delta x = 10^{-9}$ cm, car les dimensions de l'atome sont de l'ordre de 10^{-8} cm. La relation (140.5) donne alors

$$\Delta v = \frac{1{,}054 \cdot 10^{-27}}{0{,}9 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-9}} = 1{,}17 \cdot 10^{9} \text{ cm/s}.$$

Or pour une énergie de l'ordre de 10 eV la vitesse de l'électron donnée par la formule (voir p. 276) $v = 5{,}93 \cdot 10^{7} \sqrt{10}$ cm/s $= 1{,}87 \cdot 10^{8}$ cm/s. On voit donc que dans ce cas l'incertitude sur la vitesse est d'un ordre de grandeur supérieure à la vitesse mesurée. Ceci montre justement que pour des systèmes atomiques les relations d'incertitude jouent un rôle décisif.

Le fait que dans ce cas et des cas analogues le rôle essentiel est joué par l'ordre de grandeur de Δx permet d'expliquer le comportement qui semble paradoxal des microparticules dans la chambre de Wilson. En effet, on y observe *pour des énergies suffisamment grandes des particules* des trajectoires rigoureusement rectilignes et aucun signe d'incertitude sur l'impulsion, liée aux propriétés ondulatoires, ne s'y décèle. Pour expliquer ce phénomène il faut tenir compte de ce que l'étude des photographies de ces trajectoires rectilignes au microscope révèle qu'elles constituent une guirlande de petites gouttelettes de brouillard. La gouttelette est l'« instrument » de mesure enregistrant la position de la microparticule. Les dimensions des gouttelettes sont de l'ordre de 10^{-4} cm; c'est pourquoi dans le cas considéré $\Delta x = 10^{-4}$ et Δp dans le cas des électrons est de l'ordre de 10^{-23}. Comme d'autre part les trajectoires rectilignes ne s'observent que pour des très grandes énergies des microparticules, Δp est très petit par rapport à p et la particule dans les limites indiquées de précision se conduira exactement comme une particule classique. En général *pour des énergies très grandes la longueur d'onde de de Broglie est très petite et de même qu'en optique pour des longueurs d'ondes très faibles l'approximation géométrique est tout à fait justifiée.* En optique dans ce cas sans commettre de grandes erreurs on peut étudier en négligeant la diffraction les rayons lumineux, et dans le cas des microparticules, certaines trajectoires.

Exercices : 1. L'énergie des particules α émises par le radium est égale à $4{,}8 \cdot 10^6$ eV. Utilisant les relations d'incertitude apprécier pour quelle précision de détermination de la position des particules α on peut encore négliger l'incertitude sur l'impulsion Δp relativement à la grandeur de l'impulsion p elle-même. Faire le même calcul pour des électrons d'énergie 10^8 eV. (*Conseil.* — Pour une telle énergie l'électron se comporte déjà comme une particule relativiste et son impulsion doit être calculée suivant la formule $p = h/\lambda$.)

2. La particule est « bloquée » dans une zone dont les dimensions linéaires sont de l'ordre de 10^{-8} cm. Quelle doit être l'énergie minimale de cette particule pour que les relations d'incertitude soient satisfaites? Exprimer cette énergie en ergs et en électrons-volts.

3. Apprécier le rôle des relations d'incertitude pour la mécanique d'une molécule d'hydrogène. Connaissant les dimensions de la molécule apprécier la précision minimale raisonnable de détermination de la position de ses atomes et trouver l'incertitude correspondante sur l'impulsion.

4. La mécanique newtonienne devient inutilisable quand la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre des dimensions du système étudié. Etudier sous cet angle l'application de la mécanique newtonienne à l'atome d'hydrogène en supposant que l'électron se déplace sur une orbite circulaire de rayon $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm et que son moment cinétique est égal à $h/2\pi$ (première orbite de Bohr de l'hydrogène). Trouver d'après ces données la vitesse de l'électron et la longueur d'onde de de Broglie.

5. Faire la même étude pour un atome d'hydrogène de la molécule d'hydrogène. La masse de l'atome d'hydrogène est à prendre d'après les tables. La vitesse sera déterminée d'après les données suivantes : assimiler la molécule d'hydrogène à un oscillateur linéaire et trouver l'énergie cinétique moyenne ($E = 1/2\ kT$) des atomes dans le cas de l'équilibre thermique à la température de 300 °K. Comparer la longueur d'onde de de Broglie calculée de cette façon avec l'amplitude des vibrations de l'atome d'hydrogène en supposant que leur fréquence est égale à 10^{14} s^{-1}. Refaire les calculs pour un équilibre à la température de 10 °K et comparer entre eux les deux cas.

§ 150. Interprétations erronées des relations d'incertitude

Les relations d'incertitude ont donné lieu à différentes interprétations erronées.

On en donne souvent l'interprétation suivante : « Les microparticules, électrons, protons, photons, sont très petites mais à chaque moment du temps elles *possèdent* des coordonnées déterminées et une impulsion déterminée, c'est-à-dire constituent en quelque sorte un modèle réduit des boules de billard ou des grenailles, ne s'en différenciant que quantitativement, par des dimensions. En outre il existe une loi de la nature, s'exprimant dans les relations d'incertitude, qui interdit de déterminer simultanément avec la précision voulue leur position et leur impulsion. » Cette interprétation est tout d'abord inacceptable du point de vue philosophique, car elle fixe une limite à la connaissance et, par suite, peut servir d'argument à l'agnosticisme, c'est-à-dire à l'une des variantes de l'idéalisme. Elle est également fausse du point de vue physique. Pour s'en convaincre examinons encore une expérience.

Soient un diaphragme percé de *deux* fentes et, à une distance suffisamment grande de celui-ci, une plaque photographique. Si à travers ce diaphragme on fait passer un faisceau parallèle d'électrons il doit apparaître sur la plaque photographique des figures de diffraction connues, produites par les deux fentes et différant des figures de diffraction obtenues avec une

fente par leur nature et non pas tout simplement par l'intensité. Cachons l'une des fentes; on obtient alors sur la plaque photographique l'image de la fente non cachée identique à la fente elle-même (ou, si la fente est suffisamment étroite, des figures de diffraction à partir d'une fente). Cachons la fente qui était auparavant non masquée et dégageons l'autre fente : on obtiendra de nouveau l'image de la fente non masquée. Dégageons les deux fentes : l'image obtenue n'est nullement la somme des deux images précédentes obtenues chaque fois avec une seule fente, mais présentera une alternance

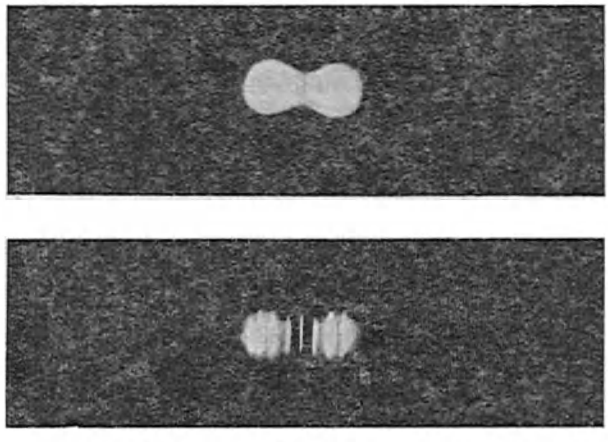


Fig. 225. La photographie du haut est prise à la traversée par la lumière d'abord d'une fente puis de l'autre; la photographie du bas est obtenue au cours de la traversée simultanée des deux fentes par la lumière

de franges brillantes et obscures dont la position est déterminée par *les deux fentes*. Sur la figure 225 on a donné deux photographies de V. Arkadiev illustrant ce qu'on vient d'exposer. Les photographies furent prises avec la lumière, mais avec des électrons on obtiendrait une image identique.

Il est absolument évident que cette expérience ne peut être accordée avec l'assimilation de l'électron à une particule se mouvant suivant une trajectoire déterminée, c'est-à-dire possédant à chaque moment du temps des coordonnées et une impulsion déterminées. Une telle particule dont le modèle parlant est représenté par une grenaille réduite aux extrêmes limites de petitesse doit absolument traverser *une fente* bien déterminée; l'absence ou la présence d'une seconde fente ne peut exercer d'influence sur sa trajectoire. Or les électrons ainsi que les autres microparticules se comportent de *façon essentiellement différente* dans l'un et l'autre cas, c'est-à-dire dans le cas où la seconde fente est masquée et dans celui où elle est dégagée. L'expérience décrite montre que les électrons et les autres microparticules ne peuvent en aucune façon être assimilés à des simples microgrenailles. Le modèle d'une très petite particule se mouvant sur une trajectoire déterminée et possédant

en chaque point de cette trajectoire une vitesse déterminée tant qu'elle n'est pas l'objet de mesure ne peut servir de représentation du mouvement de l'électron. La notion de trajectoire perd son sens pour l'électron de *façon absolument analogue à la disparition de la notion de rayon lumineux dans l'optique ondulatoire.*

L'expérience de Biberman, Souchkine et Fabriquant rappelée à la page 441 est une nouvelle et très parlante démonstration de ce que les électrons ne peuvent en aucune façon être considérés comme un ensemble de particules « classiques », c'est-à-dire de particules-billes. Dans cette expérience le rôle de système de diffraction était joué par un cristal de l'oxyde de magnésium. Après la traversée de ce cristal les électrons solitaires à des intervalles de temps très grands se dirigeaient après diffraction suivant des directions déterminées vers les maximums de diffraction. L'électron-microgrenaille serait entré en interaction avec un ou en tout cas avec un très petit nombre d'atomes du réseau cristallin; or la nature des figures de diffraction, la distribution de leurs maximums et minimums, est déterminée par *tout le réseau en bloc*, c'est-à-dire par un énorme nombre d'atomes se disposant en milliers de couches. Notons entre autres que des expériences de diffraction analogues sont réalisées avec des neutrons ne possédant pas de charge électrique et entrant en interaction avec les atomes du réseau au moyen des forces nucléaires décroissant rapidement avec la distance, par suite, la possibilité d'interprétation des figures de diffraction comme le résultat d'interaction des neutrons avec des atomes isolés du réseau est absolument exclue.

C'est pourquoi le sens des relations d'incertitude n'est pas dans ce qu'elles « interdisent » la connaissance des propriétés existant réellement des microparticules ou qu'elles établissent une limite à notre connaissance, mais dans ce qu'elles introduisent des restrictions à l'application aux microparticules de notions de la mécanique classique qui en son essence est une mécanique *corpusculaire*. En mécanique classique, on l'a déjà souligné, la connaissance simultanée de toutes les coordonnées q_i du système de particules macroscopiques et de toutes les impulsions associées p_i est la condition nécessaire de la description complète de l'état du système. Pour les microparticules cette description est irréalisable. De l'exposé précédent il devient toutefois clair que la question de valeurs *simultanées* des coordonnées et des impulsions de l'électron est en général dépourvue de contenu physique, car l'électron *de par sa nature* est un objet pour lequel cette caractéristique est *impropre*.

Si néanmoins on tente de décrire le comportement de l'électron en termes de la mécanique classique, c'est-à-dire en indiquant simultanément sa position et son impulsion, il y a pour cela des raisons. En effet, le schéma de toute expérience réalisée en physique atomique est tel que quel que soit le montage de l'expérience on s'efforce d'obtenir la réponse à la question de déroulement du tel ou tel processus objectif se réalisant dans l'espace et dans le temps. Cette question est posée en utilisant en fin de compte des instruments constituant des corps macroscopiques. Le comportement de ces

instruments, par exemple le déplacement de l'aiguille du galvanomètre ou le mouvement du style enregistreur obéit à la mécanique classique; le montage lui-même, la disposition géométrique de ses éléments, fentes, condensateurs, champs magnétiques, etc., constituent un système de référence spatio-temporel. Il va de soi que le comportement des microparticules étudiées est nécessairement décrit dans ce même système de référence spatio-temporel en utilisant toujours les notions de la mécanique classique au moyen desquelles on avait décrit le montage macroscopique. On mesure, par exemple, l'écartement du spot lumineux formé par l'électron percutant l'écran d'un oscillographe cathodique ou on s'intéresse aux déviations de l'électron en un endroit donné du montage, etc. Puisqu'on applique à l'électron et aux autres microparticules des descriptions classiques qui ne sont pas propres à ces objets, on doit nécessairement indiquer la *limite de l'application* de cette description classique, car les microparticules obéissent à des lois différentes des règles de la mécanique classique et ces dernières ne leur sont applicables qu'approximativement. Les relations d'incertitude indiquent justement cette limite.

En examinant l'expérience de détermination de la coordonnée et de l'impulsion de la microparticule au § 149 on a vu qu'en tentant de déterminer simultanément les deux grandeurs on se heurtait à une difficulté : plus le montage utilisé répond à l'objectif de détermination de la position de la particule, moins il convient à la détermination de l'impulsion. La raison en est dans ce que pour la détermination de la position on doit utiliser un système de référence fixé de façon rigide dans l'espace. Mais c'est justement pourquoi on n'a plus la possibilité de déterminer la composante de l'impulsion car dirigée dans le sens contraire l'impulsion de recul est absorbée par le support massif commun dont l'immobilité garantit justement la possibilité de déterminer la position. Inversement, l'application de la loi de conservation de l'impulsion à un diaphragme très mobile nous enlève la possibilité de l'utiliser pour la détermination de la position de la particule. Cette situation n'est pas propre au montage de l'expérience examiné au § 149. L'analyse de différents montages pouvant être utilisés pour la détermination de la position et de l'impulsion de la microparticule réalisée par N. Bohr*) montra que cette situation est générale. Elle est le résultat du fait que par suite de la grandeur finie (non égale à zéro) du quantum d'action h on ne peut négliger l'interaction entre l'objet mesuré et l'instrument de mesure quand il s'agit de mesures réalisées sur des microparticules. L'expression quantitative de ce fait apparaît justement dans les relations d'incertitude (voir § 149).

Bohr affirme toutefois que cette circonstance a un contenu profond aussi bien physique que philosophique. Notamment Bohr nie l'existence de

*) Cette analyse est décrite de la façon la plus exhaustive dans l'article de Bohr, *Discussion avec Einstein sur les problèmes épistémologiques de la physique atomique*. Cet article a été publié dans le livre de Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, Editions Gauthier, 1961.

contradiction entre les propriétés ondulatoires et corpusculaires de la matière, car seuls les montages destinés à déceler les propriétés ondulatoires les détectent, tandis que d'autres montages ne permettent de détecter que les propriétés corpusculaires. Ainsi donc, d'après Bohr les propriétés ondulatoires et corpusculaires ne s'opposent pas mutuellement, mais sont complémentaires : pour des raisons indiquées plus haut on ne peut dans une seule expérience décrire toutes les propriétés des microparticules, mais on doit se servir de montages différents dont chacun ne permet de décrire qu'un aspect des propriétés des microparticules et seule la combinaison de ces montages se complétant mutuellement permet ainsi d'épuiser tout ce qu'on peut savoir sur le sujet.

Cette conception a donné naissance au début à une multitude de malentendus et de formulations incorrectes du point de vue physique comme philosophique. La cause de ces malentendus fut en partie le résultat de l'utilisation par Bohr dans ses premiers articles d'une terminologie insuffisamment nette. Par la suite Bohr a précisé ses formulations et a amélioré sa terminologie permettant ainsi de dégager le contenu matérialiste de ces conceptions. Ces précisions s'éclairent par des extraits donnés plus bas d'un des ouvrages les plus récents de Bohr. En indiquant que les relations d'incertitude d'Heisenberg « ... établissent le lien entre les tolérances dans les valeurs des variables cinématiques et dynamiques fixant l'état du système physique », Bohr continue : « Par la nature même de l'appareil formel de la mécanique quantique ces relations ne peuvent pas, toutefois, être utilisées comme des propriétés « modèles » des objets, c'est-à-dire des propriétés s'appuyant sur les conceptions parlantes classiques. »

Et il continue : « Dans ce contexte on dit quelquefois : « L'observation perturbe la marche du phénomène » ou « Les propriétés physiques des objets atomiques sont générées par leur mesure ». Mais ces déclarations ne peuvent qu'engendrer la confusion, car les mots « phénomène » et « observation » de même que les mots « propriétés » et « mesure » y sont utilisés dans un sens incompatible avec le langage habituel et leur définition pratique... Un trait particulièrement caractéristique de la physique atomique est l'apparition de nouvelles relations entre les phénomènes observés dans des conditions d'expériences différentes pour la description desquelles on est obligé de se servir de notions élémentaires différentes. En effet, si contradictoires que n'apparaissent, quand on tâche de représenter la marche des processus atomiques dans l'esprit classique, les données expérimentales obtenues dans ces conditions on doit les considérer comme complémentaires dans le sens qu'elles constituent des informations également essentielles sur les systèmes atomiques et prises ensemble épuisent ces informations. *La notion de complémentarité ne suppose en aucune façon une renonciation à notre situation d'observateurs indépendants de la nature...* »*) (les parties en italiques sont de l'auteur).

*) Voir l'article de Bohr, *The Unity of Knowledge*, N. Y., 1955.

§ 151. Relations d'incertitude et principe de causalité

En 1927 Heisenberg dans le même travail où il a formulé les relations d'incertitude a affirmé en guise de conclusion générale que « la mécanique quantique a nettement établi la carence de la loi de causalité ». Cette affirmation s'appuye sur le fait que le principe de causalité exige que la connaissance précise de l'état du système à un certain noment de temps doive permettre de prévoir son état pour tout moment de l'avenir. La mécanique classique de Newton satisfait complètement à cette exigence, ce qui montre de façon particulièrement explicite l'exemple de l'astronomie. Comme on le sait, l'astronomie (la mécanique céleste) permet de prévoir par le calcul le mouvement des corps célestes, leurs trajectoires et leurs vitesses, pour tout moment futur avec un degré de précision permis par la solution mathématique du problème et, par suite, autorise la prévision avec précision des phénomènes astronomiques (par exemple les éclipses de Soleil et de Lune) aussi longtemps que l'on veut à l'avance. Cette possibilité acquiert une expression nette dans la forme même des équations mathématiques de la mécanique classique. Ces équations en leur forme la plus commode pour la discussion des problèmes de principe, celle des équations canoniques hamiltoniennes (§ 58), sont :

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k=1, 2, \ldots, f. \tag{151.1}$$

Dans le cas le plus simple d'un point matériel se mouvant dans un champ de forces déterminé $k=1, 2, 3$, c'est-à-dire qu'on a en tout six équations différentielles du premier ordre par rapport au temps. La solution de ces équations permet d'exprimer toutes les coordonnées q_k et toutes les impulsions p_k en fonction du temps et de six constantes arbitraires

$$\begin{aligned} q_k&=f_k(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ p_k&=\varphi_k(t, C_1, C_2, \ldots, C_6). \end{aligned} \tag{151.2}$$

Si l'on détermine toutes les coordonnées q_k^0 et toutes les impulsions p_k^0 pour un certain moment initial $t=0$ en effectuant dans ce but les mesures nécessaires, alors en portant ces valeurs connues de q_k^0 et p_k^0 dans les équations (151.2) on peut calculer (pour $t=0$) les six constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_6$. Après cela les formules (151.2) permettent de prédire q_k et p_k pour tout moment t. Ainsi il vient qu'à partir d'un état initial (pour $t=0$) *défini par l'ensemble de toutes les coordonnées et de toutes les impulsions* on est en mesure de prévoir l'état pour tout moment futur en accord absolu avec la loi de causalité.

Les relations d'incertitude affirment toutefois que les valeurs simultanées des coordonnées et des impulsions ne peuvent être mesurées qu'avec d'inévitables incertitudes Δq_k et Δp_k satisfaisant aux relations $\Delta q_k \, \Delta p_k \approx \hbar$. De là Heisenberg a déduit que l'état initial ne peut être déterminé précisément et que, par suite, on ne peut prévoir avec précision l'état futur, ce qui est en contradiction avec la loi de causalité. Cette conclusion est toutefois erronée. Il est évident, sans contestation, que les valeurs simultanées des

coordonnées et des impulsions ne peuvent, pour des microparticules, être déterminées qu'avec des incertitudes exigées par les relations d'incertitude. Mais la notion même de l'« état du système » doit évidemment être formulée en mécanique quantique de façon différente qu'en mécanique classique et précisément pour la définition complète de l'état il est nécessaire de posséder un *autre ensemble de paramètres*. Or pour formuler *quantitativement* la loi de causalité il est nécessaire d'indiquer les variables définissant l'état.

Eclairons-le par un exemple. Les équations fondamentales du champ électromagnétique (les équations de Maxwell) constituent un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre par rapport au temps pour les intensités du champ $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$, la densité des charges ϱ et la densité des courants j considérées en fonction des coordonnées et du temps. C'est pourquoi en définissant $\mathscr{E}$, $\mathscr{H}$, ϱ et j pour un certain moment de temps on peut prévoir leurs valeurs pour tout moment (futur ou passé). Ainsi donc, le principe de causalité pour un champ électromagnétique ne peut être formulé quantitativement que dans le cas où l'« état » du champ est défini par un choix correct des paramètres ($\mathscr{E}$, $\mathscr{H}$, ϱ, j).

Cet exemple montre clairement que pour formuler le principe de causalité pour tout phénomène physique il faut définir nettement la notion de l'« état du système » et indiquer explicitement les paramètres dont dépend cet état.

Revenons maintenant aux « particules » microscopiques et à la mécanique quantique. Dans les chapitres suivants on verra que l'état de la microparticule est défini par une certaine fonction ψ appelée fonction d'onde ou plus simplement fonction ψ (un exemple simple de cette fonction est fourni par la formule de l'onde plane de de Broglie écrite sous forme de fonction complexe) qui est une fonction soit *des seules coordonnées et du temps*, soit des *seules impulsions et du temps*. On verra également que cette fonction satisfait à l'équation différentielle (l'équation générale de Schrödinger, voir § 152) du premier ordre par rapport au temps.

Il s'ensuit qu'en définissant la fonction ψ pour le moment $t=0$ on prédétermine sa valeur pour tout moment de temps futur.

Ainsi l'état du système de microparticules défini en conformité avec les exigences de la *mécanique quantique* et non pas *classique* se dégage univoquement de l'état antérieur *comme l'exige la loi de causalité*.

Il n'y a rien d'étonnant ou de paradoxal que quand on décrit l'état des microparticules en faisant appel à *des notions de mécanique classique qui ne leur sont pas propres* et ne pouvant y arriver de façon précise on est obligé de recourir à des descriptions statistiques. Mais en aucune façon on n'en doit conclure à l'inapplication de la loi de causalité dans le microcosme. Ceci montre seulement que la formulation quantitative du principe de causalité utilisée pour des petits corpuscules solides ne peut être appliquée aux microparticules et que la description de l'état de la microparticule en fixant simultanément les valeurs de toutes les coordonnées et de toutes les impulsions *ne correspond pas à la nature des microparticules*.

Cependant l'affirmation que la mécanique quantique ait soi-disant réfuté la loi de causalité a servi de prétexte pour toute une série de dénaturations idéalistes jusqu'à l'argumentation en faveur du fidéisme.

Ainsi par exemple A. Eddington dans son livre « The Nature of the Physical World » a même affirmé que « ... les arguments de la science contemporaine permettent peut-être de conclure que la religion est devenue acceptable pour l'esprit sensé d'un scientifique depuis 1927 ».

Les affirmations de ce genre n'ont évidemment aucune base ni dans les relations d'incertitude, ni dans la mécanique quantique.

Dans les trois derniers paragraphes on a examiné en détail les relations d'incertitude ainsi que leurs conséquences. On a vu que ces relations ne fixent aucune limite à la connaissance et ne sont que l'expression de l'inapplication des conceptions de la mécanique classique au mouvement des particules microscopiques. Plus précisément, ces relations donnent une mesure quantitative des limites de la description de l'état des microobjets par la définition simultanée des coordonnées et des impulsions comme cela se fait dans la mécanique classique pour des corps macroscopiques : si, comme on l'a vu sur des exemples analysés à la page 444, pour une incertitude raisonnable dans le cas considéré sur la détermination de la coordonnée Δq les relations d'incertitude $\Delta q \, \Delta p \sim \hbar$ fournissent pour Δp une valeur négligeable, l'objet se conduit de façon absolument « classique », c'est-à-dire qu'on peut parler de sa trajectoire et de sa vitesse en chaque point de celle-ci. Dans le cas contraire l'image de « *particule classique* » ne convient plus et la notion de trajectoire perd son sens *de la même façon que dans le domaine de l'application de l'optique ondulatoire perd son sens la notion de rayon lumineux*. Il s'ensuit que les relations d'incertitude ont pour base les singulières propriétés physiques des électrons et des autres microparticules, mais nullement les facultés cognitives du sujet.

La limitation de l'application des conceptions classiques dans le domaine de l'univers atomique ne signifie en aucune façon que nos facultés de connaissance sont limitées et ne fixe que les frontières à la représentation mécaniste de l'univers. Cette représentation a déjà montré sa carence dans la théorie du champ électromagnétique dont il s'est révélé impossible de construire le modèle mécanique malgré de nombreuses tentatives. Le développement postérieur de la physique en contribuant au grand progrès de la connaissance du monde extérieur et, en particulier, au développement de la physique atomique a chaque fois montré de façon évidente toute l'étroitesse de la conception mécaniste du monde. Lénine dans « Matérialisme et empiriocriticisme » montra que « La reconnaissance d'éléments invariables quelconques, de « l'essence invariable des choses », etc., n'est pas du matérialisme mais n'est qu'un matérialisme *métaphysique*, c'est-à-dire un matérialisme antidialectique »*).

D'autre part on a vu de même que les relations d'incertitude se basant sur des propriétés objectives des microparticules existant réellement ont

*) V. Lénine, *Oeuvres*, t. 14, Editions du Progrès, Moscou.

été utilisées par des écoles physiques idéalistes en qualité d'arguments de la soi-disante « ruine du matérialisme », de l'« annulation » de la loi de causalité, etc., jusqu'à l'argumentation « scientifique » de la religion (Eddington, A. Compton). Cette différence entre les interprétations matérialiste et idéaliste des mêmes faits et phénomènes a comme toujours été caractérisée brillamment par V. Lénine en des termes parlants suivants : « ... La question vraiment importante de la théorie de la connaissance, qui divise les courants philosophiques, n'est pas de savoir quel degré de précision ont atteint nos descriptions des rapports de causalité, ni si ces descriptions peuvent être exprimées dans une formule mathématique précise, *mais si la source de notre connaissance de ces rapports est dans les lois objectives de la nature ou dans les propriétés de notre esprit, dans sa faculté de connaître certaines vérités a priori*, etc. »*) (les mots en italiques sont de l'auteur).

*) V. Lénine, *Oeuvres*, t. 14, Editions du Progrès, Moscou.

CHAPITRE XI

ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

§ 152. Equation de Schrödinger et contenu physique de ses solutions

Une des particularités les plus remarquables de la mécanique des particules microscopiques est l'existence de niveaux d'énergies discontinues. La nécessité de postuler cette discontinuité est apparue dès les premières phases de développement de la physique quantique (voir ch. VI). Or, dans le cadre de la physique classique l'acceptation d'états atomiques discontinus était une notion complètement étrangère allant à l'encontre de tout le système de la physique classique. Dans ce chapitre on verra que dans la mécanique quantique la discontinuité de l'énergie non seulement ne s'oppose pas aux fondements de cette mécanique mais se dégage de ses équations aussi naturellement que, par exemple, l'existence d'harmoniques de la corde vibrante découle des équations de la mécanique classique. Au cours du développement historique de la mécanique quantique ce résultat fut obtenu le premier et il apparut à l'époque le plus remarquable. Mais très vite on s'aperçut que de l'équation fondamentale de la mécanique quantique ainsi que de l'interprétation de ses solutions il se dégage d'autres conséquences non moins remarquables que la quantification. Ces conséquences permirent d'expliquer tout un ensemble de faits et contribuèrent au développement fécond de la mécanique quantique. Enfin, en conclusion de cette phase il apparut possible d'édifier un système de mécanique quantique cohérent et logique quoique inattendu.

Dans le but de préparer le lecteur à la compréhension de ce système on adoptera une voie très proche de son développement historique et dans ce chapitre on se limitera à l'établissement de l'équation fondamentale de la mécanique quantique en montrant sur l'exemple de problèmes très simples du point de vue mathématique quelques applications de cette équation. Quant au système de la mécanique quantique on en abordera l'étude dans le second volume de ce livre.

Jusque-là (ch. X) on n'a étudié que le mouvement des particules microscopiques libres et on a constaté que ce mouvement pouvait être décrit par les ondes planes de de Broglie. Il nous faut maintenant étudier le mouvement des particules dans différents champs de forces. Dans ce but on recherchera d'abord l'équation différentielle à laquelle obéissent les ondes de de Broglie, puis on généralisera cette équation au cas du mouvement

dans des champs de forces. Cette voie nous permettra d'obtenir l'équation fondamentale de la mécanique quantique, l'équation de Schrödinger.

Pour obtenir l'équation cherchée on agira de la façon suivante. Au § 133 on a indiqué que l'équation des ondes électromagnétiques (correspondant aux photons) se dégage directement des équations fondamentales du champ électromagnétique (équations de Maxwell). En écrivant cette équation d'onde et en y introduisant la solution sous forme d'ondes planes on obtient une relation entre la pulsation et les composantes du vecteur d'onde (loi de dispersion) caractérisant la nature des ondes électromagnétiques :

$$\frac{\omega^2}{c^2}=k_x^2+k_y^2+k_z^2. \tag{133.3}$$

On suivra maintenant une voie inverse : utilisant la loi de dispersion des ondes de de Broglie on recherchera l'équation différentielle correspondante. Au § 141 on avait établi la loi de dispersion des ondes de de Broglie :

$$\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{\omega_0^2}{c^2}+k_x^2+k_y^2+k_z^2, \tag{141.6}$$

où $\omega_0=mc^2/\hbar$. Cette loi a été obtenue à partir de la relation relativiste entre l'impulsion et l'énergie

$$\frac{E^2}{c^2}=m_0^2c^2+(p_x^2+p_y^2+p_z^2).$$

Cependant l'équation de Schrödinger qui nous intéresse ne satisfait pas aux exigences de la théorie de la relativité, c'est une équation non relativiste. On l'obtient à partir de la relation entre l'impulsion et l'énergie de la mécanique newtonienne. Cette relation est (voir § 58) :

$$E=\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2). \tag{152.1}$$

Profitons maintenant des relations quantiques pour l'énergie et les composantes de l'impulsion

$$E=\hbar\omega, \quad p_x=\hbar k_x, \quad p_y=\hbar k_y, \quad p_z=\hbar k_z.$$

Portant ces expressions dans (152.1) on trouve après simplification par $\hbar$:

$$\omega=\frac{\hbar}{2m}(k_x^2+k_y^2+k_z^2). \tag{152.2}$$

C'est bien la loi cherchée de dispersion des ondes de de Broglie dans l'approximation non relativiste.

Pour obtenir l'équation de Schrödinger prenons la formule de l'onde plane de de Broglie

$$\psi=Ae^{i(kr-\omega t)}=Ae^{i(xk_x+yk_y+zk_z-\omega t)}$$

en la différentiant une fois par rapport au temps et deux fois en toutes les coordonnées. Il vient

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2\psi,$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2\psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2\psi.$$

En en tirant ω, k_x, k_y, k_z et en portant dans la loi de dispersion (152.2) il vient immédiatement

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \omega}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right),$$

de sorte que

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi. \tag{152.3}$$

Dans ce chapitre on ne s'intéressera qu'aux solutions de (152.3) correspondant aux ondes monochromatiques stationnaires. Pour ces ondes la solution peut être présentée sous forme d'un produit de deux fonctions dont l'une est fonction des seules coordonnées et l'autre uniquement du temps, la dépendance du temps s'exprimant par le facteur $e^{-i\omega t} = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ de sorte que

$$\psi(x, y, z, t) = \psi^0(x, y, z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}. \tag{152.4}$$

Notons avant tout que pour ces solutions le premier membre de (152.3) donne

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi. \tag{152.5}$$

Portant la solution (152.4) dans (152.3) et tenant compte de (152.5) on trouve après simplification par le facteur temporel $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ et permutation des termes

$$\Delta\psi^0 + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi^0 = 0. \tag{152.6}$$

L'équation (152.3) est bien l'équation d'onde cherchée de la particule libre; la partie de sa solution dépendant des seules coordonnées obéit à l'équation (152.6). Dans la suite on écrira la fonction satisfaisant à (152.6) sans l'indice ^{0} en se rappelant que dans ce chapitre il s'agit des solutions « monochromatiques » de l'équation (152.3) obtenues en attribuant à ψ^0 le facteur $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$.

On a obtenu l'équation (152.6) pour le cas d'une particule microscopique libre. Voyons comment s'effectue la généralisation à une particule se mouvant dans un champ de forces caractérisé par l'énergie potentielle U. L'énergie totale de la particule dans un tel champ est égale à la somme $T+U=E$.

Au cas de la particule libre l'énergie totale se confond avec l'énergie cinétique ($U=0$), c'est-à-dire $E=T$. Pour la généralisation qui nous intéresse il est nécessaire de répondre à la question : comment interpréter dans le cas du mouvement dans un champ l'énergie E entrant dans l'équation (152.6), comme une énergie totale ou une énergie cinétique? Il est clair que si l'on considérait l'énergie E comme une énergie totale, alors dans l'équation généralisée on ne trouverait pas de terme décrivant tel ou tel champ. Si, au contraire, on n'entendait par E, au cas d'une *particule libre*, que l'énergie cinétique, alors au cas du mouvement dans un champ d'énergie potentielle U on devrait au lieu de E introduire dans (152.6) l'énergie cinétique $T=E-U$ et l'équation (152.6) prendrait la forme

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0. \tag{152.7}$$

C'est bien l'équation fondamentale de la mécanique quantique, l'équation de Schrödinger de la particule dans un champ potentiel.

Il va de soi que les considérations exposées doivent être comprises comme des raisonnements expliquant l'établissement de l'équation de Schrödinger et non pas comme sa déduction. Comme toutes les équations fondamentales de la physique (par exemple, les équations mécaniques de Newton ou les équations du champ électromagnétique de Maxwell) l'équation de Schrödinger ne peut être déduite rigoureusement. Elle ne se déduit pas, mais s'établit et sa justesse ne se confirme que par l'accord avec l'expérience des conséquences qui en découlent.

A l'équation (152.7) correspond une équation plus générale de la fonction ψ dépendant non seulement des coordonnées, mais également du temps. Au cas d'un champ conservatif quand la fonction potentielle U ne dépend pas explicitement du temps, on peut toujours admettre que la dépendance de ψ du temps s'exprime par le facteur « monochromatique » $e^{-i\omega t}=e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. Considérant que dans ce cas on a la relation (152.5) et récrivant l'équation (152.7) sous la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+U\psi=E\psi,$$

où

$$\psi=\psi^0(x, y, z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \tag{152.8}$$

il vient

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+U\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{152.9}$$

C'est bien l'équation générale de Schrödinger, fonction du temps.

En conclusion faisons encore une remarque. Pour obtenir l'équation de Schrödinger pour le cas d'une particule libre on aurait pu utiliser au lieu de la fonction d'onde de la particule libre écrite sous la forme

$$\psi=Ae^{i(kr-\omega t)}$$

la fonction complexe conjuguée

$$\psi^* = A^* e^{-i(kr-\omega t)}. \tag{152.10}$$

Dans ce dernier cas, comme il est facile de voir,

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = i\omega\psi^*, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi^*, \quad \text{etc.}$$

Au lieu de l'équation (152.3) on aurait alors

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi^* \tag{152.11}$$

et de façon correspondante se transformerait l'équation (152.9). Or on verra maintenant que le contenu physique est exprimé non pas par la fonction ψ, mais par le carré de son module, c'est-à-dire par $\psi\psi^*$. C'est pourquoi il est indifférent sous laquelle de ces deux formes on écrit l'équation de Schrödinger.

Examinons maintenant le sens physique des solutions de l'équation de Schrödinger. Ecrivons l'équation d'onde de la physique classique rencontrée au § 133 :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \tag{133.4}$$

et comparons à l'équation de Schrödinger, fonction du temps

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi. \tag{152.9}$$

L'équation d'onde classique a des solutions réelles de la forme $a \cos [(kr-\omega t)+\delta]$. Or par une vérification directe il est facile de se convaincre que l'équation de Schrödinger n'est pas satisfaite par ces solutions réelles et n'admet que les solutions complexes, par exemple, pour $U=0$

$$\psi = Ae^{i(kr-\omega t)}.$$

Cette particularité de l'équation de Schrödinger s'explique par le fait qu'elle contient (à la différence de l'équation d'onde classique) la dérivée première par rapport au temps et les dérivées secondes par rapport aux coordonnées. On a montré que ce résultat a été obtenu parce qu'on a cherché l'équation d'onde correspondant à la loi de dispersion des ondes de de Broglie (à l'approximation newtonienne)

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \tag{152.2}$$

où ω est au premier degré, tandis que les composantes du vecteur d'onde sont au second degré.

Cette circonstance est essentielle pour la compréhension du sens de l'équation de Schrödinger. Elle montre que si l'équation de Schrödinger est dans certains cas satisfaite par des solutions périodiques, elle ne décrit aucune onde réelle se propageant dans un milieu physique. Si néanmoins

on parle quelquefois d'« ondes » matérielles stationnaires et mobiles, de nœuds et de ventres, etc., c'est uniquement dans le but de suggérer une image parlante. En accord avec l'interprétation statistique actuellement adoptée le sens des solutions de l'équation de Schrödinger est tout à fait autre.

En effet, dans le chapitre précédent on a vu que le comportement d'un électron libre se décrit par l'onde plane de de Broglie, mais ce n'est que le *carré de l'amplitude* de cette onde qui présente un contenu physique et qui est évidemment égal au carré du module de la fonction complexe ψ satisfaisant à l'équation de Schrödinger (152.9) pour $U=0$. En effet, pour

$$\psi = Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \equiv ae^{i\delta}\cdot e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$

$$\psi^* = A^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)} \equiv ae^{-i\delta}\cdot e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

il vient

$$a^2 = |A|^2 = \psi^*\psi.$$

Ce carré de l'amplitude a été interprété statistiquement comme $a^2\,d\tau = \psi^*\psi\,d\tau$ qui d'après le § 147 est la probabilité de trouver la particule dans l'élément de volume $d\tau = dx\,dy\,dz$, c'est-à-dire dans la région de coordonnées entre x et $x+dx$, y et $y+dy$, z et $z+dz$. Cette interprétation statistique se conserve également pour les solutions de l'équation (152.9) dans le cas général : le carré du module de la fonction complexe ψ satisfaisant à cette équation s'interprète comme la densité de probabilité de trouver la particule dans l'élément de volume $d\tau$ autour du point de coordonnées x, y, z. Quant à la probabilité elle est proportionnelle à $\psi\psi^*\,d\tau$.

La fonction ψ de par son contenu doit satisfaire à certaines conditions naturelles. Tout d'abord elle doit être partout continue et univoque. Puis puisqu'on interprète $\psi\psi^*\,d\tau$ comme une probabilité, on doit normaliser cette fonction ψ de façon que la probabilité de l'événement certain soit égale à l'unité. Comme les coordonnées cartésiennes varient de $-\infty$ à $+\infty$, l'événement certain signifie que la particule se trouve *quelque part* dans l'espace. La condition de normalisation sera donc :

$$\int_{--}^{+\infty} \varphi^*\psi\,d\tau = 1. \qquad (152.12)$$

Dans les cours d'analyse on démontre*) que l'intégrale impropre aux limites infinies existe dans le cas où la fonction décroît suffisamment vite avec l'éloignement de l'origine des coordonnées et précisément la fonction de carré intégrable doit diminuer tout au moins comme $1/r^p$, où $p>1$. On verra dans ce chapitre et les suivants que les conditions naturelles mentionnées ont en mécanique quantique une énorme importance. Les propriétés des solutions de l'équation de Schrödinger sont telles qu'elles

*) V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, t. II. Editions Mir, 1970 (traduit du russe).

ne peuvent satisfaire à ces exigences que dans des conditions bien déterminées, par exemple pour des valeurs discrètes déterminées de l'énergie entrant dans l'équation en qualité de paramètre. C'est en quoi, comme il le sera montré sur des exemples concrets, réside la clef de l'explication de la discontinuité des grandeurs mécaniques en mécanique quantique.

§ 153. Réflexion et franchissement d'une barrière de potentiel

Au chapitre X on a étudié le mouvement d'une particule dans un espace dénué de champ. En qualité de première application de l'équation de Schrödinger examinons le comportement d'une particule à la frontière de deux régions *I* et *II* dans chacune desquelles l'énergie potentielle de la particule reste constante, et ces énergies potentielles ne diffèrent que d'une grandeur finie. En schématisant les conditions rencontrées en réalité on supposera qu'à la frontière des régions *I* et *II* l'énergie potentielle varie par saut, comme c'est montré sur les figures 226 et 227.

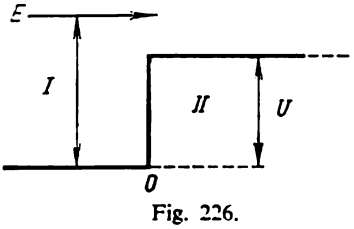


Fig. 226.

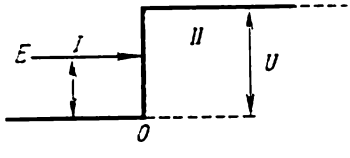


Fig. 227.

Choisissons un système de coordonnées de façon que l'axe x soit parallèle à la direction du mouvement de la particule. Alors ψ ne dépendra que de x. Le laplacien Δ se réduit alors à la dérivée seconde totale $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ et l'équation de Schrödinger prend une forme plus simple

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0.$$

Dans ce cas l'énergie potentielle est définie par les conditions :

$$(I) \text{ pour } x\leqslant 0 \qquad U=0,$$

$$(II) \text{ pour } x\geqslant 0 \qquad U=U_0=\text{const}.$$

Pour résoudre le problème il faut en somme porter dans l'équation de Schrödinger l'expression de U en fonction des coordonnées puis procéder à une intégration. Mais comme pour les conditions posées U ne peut être exprimé sous forme de fonction analytique x on agira de la façon suivante. Ecrivons l'équation de Schrödinger séparément pour la région *I* et la région *II* et cherchons dans les deux cas les solutions, c'est-à-dire les fonctions ψ_1 et ψ_2. Comme la fonction ψ doit être continue dans tout l'espace, on exigera qu'à la frontière des régions où s'effectue le saut de potentiel les fonctions ψ_1

et ψ_2 soient égales l'une à l'autre. Comme il sera montré plus loin, à la frontière des deux régions ce n'est pas seulement la fonction ψ qui doit être continue mais également sa dérivée première. Les deux conditions de continuité, celle de la fonction et de sa dérivée première, permettent d'aboutir à la solution du problème.

Ecrivons donc l'équation de Schrödinger :

pour la région *I*

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0, \tag{153.1}$$

pour la région *II*

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi_2=0. \tag{153.2}$$

Introduisons les notations

$$k_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}=\frac{mv_1}{\hbar}=\frac{2\pi}{\lambda_1}, \tag{153.3}$$

$$k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}=\frac{mv_2}{\hbar}=\frac{2\pi}{\lambda_2}, \tag{153.4}$$

où λ_1 et λ_2 sont les longueurs d'ondes de de Broglie respectivement dans les régions *I* et *II*. Les équations (153.1) et (153.2) peuvent maintenant s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+k_1^2\psi_1=0, \tag{153.1'}$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+k_2^2\psi_2=0. \tag{153.2'}$$

Ce sont des équations différentielles ordinaires à coefficients constants. Leurs solutions particulières prennent la forme $e^{\pm ik_1x}$ et $e^{\pm ik_2x}$.

Il est évident que ces solutions particulières constituent des ondes planes de de Broglie pour les régions *I* et *II*. En effet prenons l'une de ces solutions, par exemple e^{ik_1x}, et multiplions-la par un facteur temporel « monochromatique » $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}=e^{-i\omega t}$; on obtient

$$e^{ik_1x}e^{-i\omega t}=e^{i(xk_1-\omega t)}.$$

Or c'est bien la formule de l'onde plane se propageant dans la région *I* dans le sens positif de l'axe x.

Les solutions générales des équations (153.1') et (153.2') sont :

$$\psi_1=a_1e^{ik_1x}+b_1e^{-ik_1x}, \tag{153.5}$$

$$\psi_2=a_2e^{ik_2x}+b_2e^{-ik_2x}. \tag{153.6}$$

Examinons maintenant les conditions de passage de la particule de la région *I* dans la région *II* dans deux cas : a) quand l'énergie totale de la particule E est supérieure à son énergie potentielle U dans la région *II* (fig. 226) et b) quand $E<U$ (fig. 227).

a) Pour $E>U$ la particule obéit à la mécanique classique et passe obligatoirement (autrement dit avec *certitude*) de la région *I* à la région *II*. En effet, supposons que cette particule porte une charge électrique et se déplace dans la région *I* de gauche àdroite. A la frontière de *I* et *II* elle passe dans le champ ralentisseur de potentiel *U*, mais comme son énergie totale *E* est supérieure à *U* la particule franchit le champ ralentisseur et continue son mouvement dans la région *II* avec une énergie inférieure $E-U$.

On verra maintenant que la particule obéissant à l'équation de Schrödinger, par exemple l'électron, doit se comporter de façon différente. Cela découle déjà des considérations qualitatives suivantes. Le mouvement de l'électron est représenté par l'onde plane de de Broglie. A la frontière des deux domaines où a lieu la brusque variation de potentiel, cette onde doit se comporter de la façon dont se conduit l'onde lumineuse à la frontière de deux milieux d'indices de réfraction différents (voir § 143). Cela signifie qu'à la frontière des régions *I* et *II* l'onde de de Broglie subit d'une part une réflexion et d'autre part traverse la région *II*. On peut également affirmer qu'en passant d'une région à l'autre l'électron possède une certaine probabilité de se réfléchir et une certaine probabilité de traverser la région *II*.

Notre objectif est maintenant de rechercher ces probabilités. Pour cela on notera auparavant que la solution particulière e^{ik_1x} correspond à l'onde se dirigeant dans le sens positif de l'axe x (de gauche à droite), c'est-à-dire à l'onde incidente, et la solution particulière e^{-ik_1x} correspond à l'onde réfléchie. Il en est de même des solutions particulières $e^{\pm ik_2x}$. Etant donné que dans la région *I* se propagent aussi bien l'onde incidente que l'onde réfléchie, on voit que pour cette région c'est la solution générale (153.5) qui a un sens et elle est composée de deux termes :

$$\psi_1=a_1e^{ik_1x}+b_1e^{-ik_1x}, \tag{153.5}$$

or a_1^2 est l'intensité de l'onde incidente et b_1^2 l'intensité de l'onde réfléchie. Dans la région *II*, au contraire, se propage uniquement l'onde transmise. Il faut donc poser dans (153.6) $b_2=0$ et alors

$$\psi_2=a_2e^{ik_2x}. \tag{153.6'}$$

Posons maintenant que l'amplitude de l'onde incidente a_1 est égale à l'unité et calculons les deux autres amplitudes b_1 et a_2. Pour cela passons aux « conditions aux limites » imposant qu'à la frontière des régions soient continues non seulement la fonction ψ mais également sa dérivée première. La continuité de la dérivée première découle des considérations suivantes. Supposons que le gradin vertical, à gauche sur la fig. 228, est remplacé par un gradin en pente (en pointillé sur la fig. 228); soit $2l$ la largeur de la zone de transition et admettons que le potentiel y varie continûment de 0 à *U*. En tenant compte des notations (153.3) et (153.4) récrivons les deux équations (153.1') et (153.2') sous la forme

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-k'^2\psi. \tag{153.7}$$

Dans ce cas le coefficient k' dans la région s'étendant de $-l$ à $+l$ varie continûment de $k'=k_1$ à $k'=k_2$. Pour cette région on a d'une part

$$\int_{-l}^{+l} \frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx=\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{+l}-\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{-l},$$

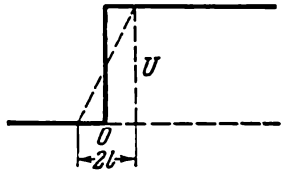


Fig. 228.

et d'autre part en appliquant le théorème de la moyenne au second membre de (153.7)

$$\int_{-l}^{+l} k'^2\psi\,dx=2l\overline{k'^2\psi}.$$

Ainsi donc,

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{+l}-\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{-l}=-2l\overline{k'^2\psi}$$

ou en passant à la limite pour $l\to 0$

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0}=\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}.$$

La continuité de la fonction ψ à la limite des deux domaines donne

$$(\psi_1)_{x=0}=(\psi_2)_{x=0}$$

ou, si l'on a recours à (153.5), pour $a_1=1$ et (153.6′)

$$1+b_1=a_2. \tag{153.8}$$

De la condition de continuité de la dérivée

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0}=\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$$

en utilisant (153.5) et (153.6′) on trouve

$$1-b_1=\frac{k_2}{k_1}a_2. \tag{153.9}$$

Résolvant les équations (153.8) et (153.9) par rapport à b_1 et a_2 on obtient

$$b_1=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2},\quad a_2=\frac{2k_1}{k_1+k_2}. \tag{153.10}$$

Maintenant on peut, en utilisant l'analogie optique, déterminer le coeffiicient de réflexion R et le coefficient de transparence D. Le coefficient de réflexion est égal au rapport des carrés des amplitudes des ondes réfléchie et incidente ou en considérant que l'amplitude de l'onde incidente a_1 est par hypothèse égale à l'unité :

$$R=b_1^2=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2. \tag{153.11}$$

Pour calculer le coefficient de transparence D il faut multipler le rapport des carrés des amplitudes des ondes transmise et incidente par le rapport des vitesses des particules dans les deux régions pour la raison suivante. Le coefficient de transparence est égal au rapport du flux de particules transmises à celui de particules incidentes. Soit un cylindre de base égale à 1 cm^2 et de hauteur égale à la vitesse v. Si la densité de particules dans ce cylindre est égale à ϱ, le nombre total de particules contenues dans le cylindre est ϱv, toutes ces particules traversant la base du cylindre en 1 s. Ainsi donc, le flux de particules est égal à ϱv et, par suite, le coefficient de transparence est donné par la relation

$$D=\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{v_2}{v_1}.$$

Mais la densité de particules ϱ est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde de de Broglie et le rapport des vitesses :

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

ou, en vertu de (153.3) et de (153.4),

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{k_2}{k_1}.$$

De sorte qu'on a en définitive

$$D=\frac{a_2^2}{a_1^2}\frac{k_2}{k_1}=a_2^2\frac{k_2}{k_1} \tag{153.12}$$

(a_1 est toujours égal à l'unité) et utilisant l'expression de a_2 d'après (153.10) il vient

$$D=\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}. \tag{153.13}$$

Les coefficients R et D peuvent s'interpréter du point de vue corpusculaire de la façon suivante : R est la probabilité pour la particule de subir une réflexion à la frontière des régions et D est la probabilité de traverser le domaine *II* ou, comme on a l'habitude de s'exprimer, la probabilité de franchissement de la barrière de potentiel.

En additionnant (153.11) et (153.13) on trouve $R+D=1$ à quoi il fallait s'attendre d'après le théorème d'addition des probabilités, car on peut affirmer avec certitude qu'à la frontière des régions la particule soit sera réfléchie, soit poursuivra son chemin.

Calculons maintenant les coefficients de réflexion et de transparence en fonction du rapport entre l'énergie totale E et l'énergie potentielle U. On a

$$k_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}=\frac{p_1}{\hbar},\quad k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}=\frac{p_2}{\hbar},$$

$$R=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=\left(\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{1-U/E}}{1+\sqrt{1-U/E}}\right)^2,$$

$$D=1-R=4\frac{\sqrt{1-U/E}}{(1+\sqrt{1-U/E})^2}.$$

Au tableau XXII on a donné plusieurs valeurs numériques de R et de D. On voit dans ce tableau que quand l'énergie de la particule est deux fois supérieure à la hauteur de la « barrière de potentiel » U, la probabilité de réflexion acquiert une valeur bien sensible (près de 3 %) et pour $U=E$ la pénétration dans la région *II* est en général impossible, or d'après la mécanique classique dans ce cas comme dans tous les autres la particule pénètre certainement dans la région *II*, mais son énergie cinétique y est égale à zéro.

Tableau XXII

U/E	R	D	E/U
0,1	0,0007	0,9993	10
0,5	0,0296	0,9704	2
0,8	0,1459	0,8541	1,25
0,9	0,2700	0,7300	1,11
1,0	1,000	0,000	1,0

La raison pour laquelle on n'observe pas cette réflexion quantique dans des expériences macroscopiques ordinaires avec des électrons est que le potentiel varie à la frontière sur un intervalle de dimension « macroscopique » et ne s'accroît pas brusquement comme c'est montré sur la figure 227. Si, toutefois, la largeur de transition possède des dimensions atomiques (1 à 10 Å), l'effet quantique doit avoir lieu et on doit en tenir compte.

b) Pour $E<U$ *d'après la mécanique classique* le passage de la région *I* à la région *II* est impossible, car à cette condition (l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie totale) l'énergie cinétique dans *I* devrait devenir négative et la vitesse, imaginaire.

Calculons le coefficient de réflexion R dans ce cas sur la base de la mécanique quantique. Il faut avant tout remarquer que pour $E<U$ la quantité k_2 devient un imaginaire pur :

$$k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}=i\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}=ik,$$

où $k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}$. Il s'ensuit que pour calculer R d'après la formule (153.11) il faut au lieu de l'élévation au carré effectuer une multiplication des quantités complexes conjuguées RR^* ou, ce qui revient au même, prendre le carré du module :

$$R=\left|\frac{k_1-ik}{k_1+ik}\right|^2=1, \quad D=1-R=0.$$

Ainsi donc, pour $E<U$ le coefficient de réflexion est égal à l'unité, c'est-à-dire que la réflexion est totale. Comme on voit, ce résultat correspond à celui qu'on attendait. Toutefois, comme on le verra aussitôt, une conséquence imprévue apparaît, car quoique la réflexion soit totale il existe une certaine probabilité de retrouver la particule dans la région *II*. Autrement dit, la réflexion ne se produit pas obligatoirement sur la frontière même des régions et quelques particules pénètrent dans la région *II* pour en ressortir et revenir dans la région *I*. En effet, puisque pour $E<U$ le coefficient k_2 devient un imaginaire pur égal à ik, la solution de l'équation de Schrödinger pour la région *II* prend la forme

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2 x} = a_2 e^{-kx},$$

et la probabilité de trouver la particule sur l'unité de longueur sera donc

$$\psi_2 \psi_2^* = \psi_2^2 = a_2^2 e^{-2kx} = a_2^2 e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,x}. \qquad (153.14)$$

Cela signifie qu'il existe une probabilité bien déterminée de retrouver la particule dans la région *II*. Il est vrai que cette probabilité diminue exponentiellement (c'est-à-dire très rapidement) avec l'accroissement de x, mais elle est différente de zéro : les particules microscopiques peuvent pénétrer dans des régions « interdites » aux particules macroscopiques.

Calculons, par exemple, la probabilité relative de trouver l'électron à la distance $x=1$ Å $=10^{-8}$ cm de la frontière au cas où $U-E=1$ eV $=1{,}6\cdot10^{-12}$ erg. On a

$$\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,x = \frac{2}{1{,}05\cdot10^{-27}}\sqrt{1{,}87\cdot10^{-27}\cdot1{,}6\cdot10^{-12}}\cdot10^{-8} = 1{,}045,$$

$$e^{-1{,}045} = 0{,}29.$$

Comme on le voit, la probabilité est très grande (près de 30 %); pour $x=5$ Å elle devient égale à $e^{-5{,}2}=0{,}005$, c'est-à-dire petite, mais toujours sensible; mais déjà pour $x=10$ Å le facteur exponentiel devient égal à une quantité insignifiante $e^{-10{,}45}=4{,}54\cdot10^{-8}$.

L'interprétation des résultats obtenus du point de vue ondulatoire ne présente pas de difficultés, car le cas de $E<U$ est analogue à celui de la réflexion totale en optique. En effet, du point de vue de l'optique géométrique au cours du passage de la lumière d'un milieu plus réfringent dans un milieu moins réfringent, quand l'angle d'incidence est supérieur à l'angle critique, la lumière ne peut traverser le milieu moins réfringent. Or l'optique ondulatoire montre et l'expérience le confirme qu'en réalité dans ce milieu moins réfringent même pour des angles d'incidence supérieurs à leur valeur critique il existe un champ d'onde à amplitude décroissant exponentiellement. Ce décroissement de l'amplitude se définit approximativement par le facteur $e^{-2\pi x/\lambda}$ et la décroissance de l'intensité par le facteur $e^{-4\pi x/\lambda}$, donc, d'après une règle analogue à la règle de décroissance de la densité de probabilité ψ^2 pour $E<U$. Ensuite, le calcul montre que malgré la pénétration de la lumière dans le second milieu la valeur moyenne de la composante du

vecteur de Oumov-Poynting (flux d'énergie) normale au dioptre est égale à zéro pour un intervalle de temps suffisamment grand. Cela signifie qu'il n'existe pas de mouvement d'énergie dirigé unilatéralement du premier milieu dans le second.

Une analyse détaillée de ce cas réalisée par A. Eichenwald a montré que dans le cas d'une réflexion totale les lignes du vecteur de Oumov-Poynting deviennent courbes; elles pénètrent dans le second milieu puis reviennent dans le premier; la réflexion reste totale malgré l'établissement d'un champ dans le second milieu*). De façon correspondante dans le cas examiné le coefficient de réflexion R est égal à l'unité et le coefficient de transparence est nul: les particules « pénètrent » dans la région *II* à une certaine distance puis reviennent dans la région *I*.

Si l'interprétation ondulatoire de la pénétration dans le domaine « interdit » apparaît ainsi assez simple, du point de vue corpusculaire le phénomène est à première vue incompréhensible. En effet, s'il existe une probabilité non nulle de retrouver la particule à droite de la barrière, cela veut dire qu'il est possible de la détecter dans cette région. Du point de vue de la mécanique classique il est impossible de trouver la particule dans la région où $E<U$, car le passage de la particule de la région *I* dans la région *II* au cas de $E<U$ constituerait une dérogation à la loi de conservation de l'énergie.

En mécanique quantique, par contre, il n'existe aucun paradoxe à ce qu'on puisse détecter la particule dans la région où $E<U$. D'abord il faut toujours se rappeler que pour des particules microscopiques en vertu des relations d'incertitude la connaissance simultanée des valeurs précises de x et de p est impossible. Donc, il n'y a aucun sens de parler de valeurs déterminées simultanément des énergies potentielle (de la fonction x) et cinétique (de la fonction p). Puis, quelle est la signification de l'expression : détecter la particule à droite de la barrière? Pour cela il faut évidemment mesurer sa coordonnée x.

L'analyse de la question de ce point de vue montre que tout procédé de mesure de la coordonnée au cas où $E<U$ ne convient pas et s'il est approprié, alors la particule reçoit de la part de l'instrument de mesure une telle portion d'énergie complémentaire que la loi de conservation de l'énergie ne se trouve plus violée.

Faisons cette analyse. Supposons qu'on est arrivé à mesurer la coordonnée de la particule approximativement, mais de sorte que la particule se trouve quelque part à droite de la barrière dans les limites d'un segment égal à l. Dans ce cas la coordonnée de la particule ne sera plus complètement indéterminée, mais sera connue avec une incertitude $\Delta x=l$. Mais si l'on a déjà déterminé la coordonnée avec une incertitude $\Delta x=l$, alors l'impulsion doit acquérir une incertitude

$$\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{l}. \tag{153.15}$$

*) Voir, par exemple, G. Landsberg, *Optique*, M., 1957 (en russe).

D'où peut venir cette impulsion complémentaire Δp? Pour pouvoir affirmer de façon certaine que la particule se trouve à droite et non pas à gauche de la barrière, le pouvoir de résolution de l'appareil optique au moyen duquel se définissait la coordonnée de la particule doit être suffisamment grand. Et pour cela, on le sait de l'optique, la longueur d'onde lumineuse utilisée pour l'éclairement de la particule doit être suffisamment petite. Mais dans ce cas la particule au cours de la diffusion de la lumière est soumise à l'effet Compton qui occasionne justement l'incertitude de l'impulsion.

Mais à l'incertitude de l'impulsion Δp correspond l'incertitude de l'énergie $\Delta E=\frac{(\Delta p)^2}{2m}$. Essayons d'apprécier cette dernière. Comme la probabilité de présence de la particule suivant la formule (153.14) décroît exponentiellement avec l'augmentation de x il y a des raisons de chercher la particule à de telles distances de la barrière pour lesquelles l'exposant dans (153.14) soit de l'ordre 1, c'est-à-dire

$$\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}l\sim 1,$$

d'où

$$l\sim\frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U-E)}}.$$

Ainsi donc, l'incertitude de l'impulsion d'après (153.15) sera

$$\Delta p\geqslant 2\sqrt{2m(U-E)},$$

et, par suite, à plus forte raison

$$\Delta p>\sqrt{2m(U-E)}.$$

C'est pourquoi

$$(\Delta p)^2>2m(U-E)$$

et

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m}>U-E.$$

Ainsi l'énergie complémentaire reçue par la particule au cours de la mesure de la coordonnée est supérieure à la différence entre les énergies potentielle et cinétique et, par suite, la possibilité de détecter la particule à droite de la barrière ne contredit pas la loi de conservation de l'énergie.

§ 154. Barrière de potentiel de largeur finie

Poursuivons l'examen du problème des barrières et étudions le cas d'une barrière de largeur finie. Les conditions du problème dont la solution sera abordée dans ce paragraphe sont : la particule se déplace de gauche à droite parallèlement à l'axe x dans un champ qu'on divisera en trois régions.

Dans la région *I*, c'est-à-dire pour $x \leqslant 0$, l'énergie potentielle $U=0$;

dans la région *II*, c'est-à-dire pour $0 \leqslant x \leqslant d$, l'énergie potentielle $U=$ $=\text{const} \neq 0$;

dans la région *III*, c'est-à-dire pour $x \geqslant d$, l'énergie potentielle $U=0$.

Ce type de barrière représente schématiquement les conditions qu'on rencontre lors de la résolution d'un grand nombre de problèmes de la physique atomique (par exemple, l'émission des électrons par les métaux, la désintégration, etc.).

Ecrivons l'équation de Schrödinger pour chaque région séparément : pour les régions *I* et *III* ($U=0$) :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0 \tag{154.1}$$

et pour la région *II* ($U \neq 0$) :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0. \tag{154.2}$$

Les solutions de ces équations seront respectivement

$$\psi_{I,\,III}=e^{\pm ik_1x}\left(k_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}=\frac{2\pi}{\lambda}\right), \tag{154.3}$$

$$\psi_{II}=e^{\pm ik_2x}\left(k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}\right). \tag{154.4}$$

Dans le paragraphe précédent on a examiné le cas de la pénétration de la particule dans une région d'extension infinie et d'énergie potentielle différente et on a constaté que pour tout rapport entre l'énergie de la particule et la hauteur de la barrière de potentiel il y a une probabilité déterminée pour que la particule subisse une réflexion et une probabilité déterminée pour qu'elle pénètre dans la région *II*. Dans le cas qu'on va examiner la barrière de potentiel a une largeur finie; on verra que, dans ce cas, il y a également une probabilité déterminée pour que la particule *traverse* la région *II* et pénètre dans la région *III*. Il est particulièrement intéressant que même au cas où l'énergie totale de la particule incidente est inférieure à son énergie potentielle dans la région *II*, cette probabilité a une valeur finie, la particule pénétrant dans ce cas dans la région *III* avec l'énergie qu'elle possédait dans la région *I*.

La différence entre le cas examiné et celui étudié au paragraphe précédent consiste dans ce que la réflexion y a lieu aussi bien à la frontière des régions *I* et *II* que *II* et *III*. En accord avec ce qui vient d'être dit les solutions seront

$$\begin{aligned}\psi_I&=e^{ik_1x}+b_1e^{-ik_1x},\\ \psi_{II}&=a_2e^{ik_2x}+b_2e^{-ik_2x},\\ \psi_{III}&=a_3e^{ik_1x}.\end{aligned} \tag{154.5}$$

Et comme dans le paragraphe précédent le coefficient a_1 est toujours égal à l'unité.

Pour le calcul des coefficients R et D il faut avant tout trouver les constantes b_1, b_2, a_2, a_3. Dans ce but on utilisera les conditions de continuité de la fonction ψ et de sa dérivée première à la frontière des régions *I* et *II*, *II* et *III*, c'est-à-dire pour $x=0$ et pour $x=d$. Ecrivons ces conditions :

$$(\psi_I)_{x=0}=(\psi_{II})_{x=0}, \quad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0}=\left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}, \tag{154.6}$$

$$(\psi_{II})_{x=d}=(\psi_{III})_{x=d}, \quad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=d}=\left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=d}. \tag{154.7}$$

Ces conditions donnent

$$\left.\begin{aligned} &1+b_1=a_2+b_2, \quad k_1-k_1b_1=k_2a_2-k_2b_2, \\ &a_2e^{ik_2d}+b_2e^{-ik_2d}=a_3e^{ik_1d}, \quad a_2e^{ik_2d}-b_2e^{-ik_2d}=a_3\frac{k_1}{k_2}e^{ik_1d}. \end{aligned}\right\} \tag{154.8}$$

En résolvant ce système d'équations on trouve l'expression suivante pour a_3

$$a_3=\frac{4k_1k_2e^{ik_1d}}{(k_1+k_2)^2e^{-ik_2d}-(k_1-k_2)^2e^{ik_2d}}. \tag{154.9}$$

On ne calculera pas le coefficient de réflexion R, car ce calcul ne nous apportera rien d'essentiellement différent par rapport à ce qui a été dit au paragraphe précédent. C'est pourquoi les constantes restantes b_1, a_2, b_2 ne seront pas utilisées. Dans le cas considéré le coefficient de transparence de la barrière D [voir la formule (153.12)] est simplement égal au carré du module de a_3, car la longueur d'onde dans les régions *I* et *III* est la même :

$$D=|a_3|^2=a_3a_3^*. \tag{154.10}$$

La grandeur D ne présente de l'intérêt que dans le cas où $E<U$. Alors

$$k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}$$

sera évidemment un imaginaire pur. Posons

$$k_2=ik,$$

où

$$k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}. \tag{154.11}$$

Les fonctions exponentielles $e^{\pm ik_2d}$ entrant dans le dénominateur de (154.9) seront à cette condition des nombres réels $e^{\mp kd}$. Au lieu de (154.9) on obtient

$$a_3=\frac{i4k_1ke^{ik_1d}}{(k_1+ik)^2e^{kd}-(k_1-ik)^2e^{-kd}}, \quad a_3^*=\frac{-i4k_1ke^{-ik_1d}}{(k_1-ik)^2e^{kd}-(k_1+ik)^2e^{-kd}}.$$

Introduisant les fonctions hyperboliques

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

ramenons les expressions de a_3 et de a_3^* à la forme

$$a_3=\frac{i2k_1ke^{ik_1d}}{(k_1^2-k^2)\operatorname{sh} kd+2ikk_1\operatorname{ch} kd},\quad a_3^*=\frac{-i2k_1ke^{-ik_1d}}{(k_1^2-k^2)\operatorname{sh} kd-2ikk_1\operatorname{ch} kd}.$$

Cela donne

$$D=a_3a_3^*=\frac{4k_1^2k^2}{(k_1^2-k^2)^2\operatorname{sh}^2 kd+4k^2k_1^2\operatorname{ch}^2 kd};$$

après transformation considérant que

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,$$

il vient

$$D=\frac{4k_1^2k^2}{(k_1^2+k^2)^2\operatorname{sh}^2 kd+4k_1^2k^2}. \tag{154.12}$$

Remarquons maintenant que dans la plupart des cas qui nous intéressent on peut considérer que sh^2kd est simplement égal à $1/2\,e^{2kd}$. En effet, par exemple, dans le cas des électrons pour

$$U-E=150\text{ V}\quad\text{et}\quad d=10^{-8}\text{ cm}\quad kd=\frac{2\pi}{10^{-8}}\cdot10^{-8}=6{,}28.$$

Donc

$$e^{2kd}=e^{12{,}56}=2{,}8\cdot10^6,\quad e^{-2kd}=e^{-12{,}56}=3{,}5\cdot10^{-7}.$$

Ecrivant maintenant D sous la forme

$$D=\frac{4}{\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k}+\frac{k}{k_1}\right)^2e^{2kd}+4},$$

on remarque que dans le dénominateur on peut négliger 4 par rapport à e^{2kd} et comme k_1 et k sont du même ordre de grandeur, alors, au facteur négligeable près,

$$D\sim e^{-2kd}=e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}d}. \tag{154.13}$$

Cette formule montre que la perméabilité de la barrière dépend de façon importante de la largeur d.

Calculons le facteur exponentiel pour des électrons. Prenons pour la masse de l'électron $m=9{,}8\cdot10^{-28}$ et pour la constante quantique $\hbar=1{,}05\cdot10^{-27}$. Si la différence entre la hauteur de la barrière U et l'énergie de l'électron est égale à V électrons-volts ou à $1{,}6\cdot10^{-12}\,V$ erg, alors

$$\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}=1{,}08\cdot\sqrt{V}\cdot10^8\text{ cm}^{-1}.$$

En définissant la différence $U-E=V=5$ eV on obtient les valeurs suivantes pour le facteur exponentiel en faisant varier la largeur de la barrière :

d (en Å)	1	1,3	1,5	1,8	2,0	5,0	10,0
D	0,1	0,04	0,03	0,016	0,008	$5{,}54\cdot10^{-7}$	$1{,}4\cdot10^{-12}$

Comme on voit pour une largeur de la barrière de 1 Å (dimension atomique) la perméabilité est relativement grande (quelques pour cent), mais déjà pour $d=10$ Å elle devient très faible.

Il est intéressant de noter que la traversée d'une barrière de potentiel ne s'accompagne pas pour la particule d'une perte d'énergie : elle sort des limites de la barrière avec l'énergie avec laquelle elle y pénètre.

On a examiné le cas de franchissement d'une barrière de potentiel de forme rectangulaire fort simple. On peut montrer que le coefficient de transparence d'une barrière de forme quelconque (voir fig. 229) est donné de façon suffisamment approchée par une formule constituant une généralisation naturelle de la formule (154.13)

$$D=Ce^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{(U-E)}\,dx}, \tag{154.14}$$

où C est une constante non essentielle de l'ordre de l'unité. Cette formule sera appliquée ultérieurement à certains problèmes concrets de la physique.

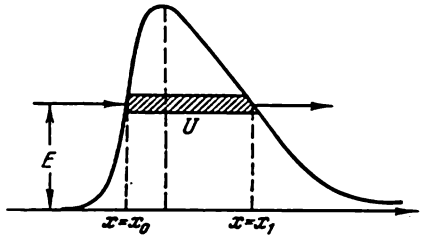


Fig. 229. Barrière de potentiel de forme arbitraire

Le franchissement de la barrière de potentiel est quelquefois appelé, pour faire image, *effet tunnel :* pour franchir la barrière la particule ne l'escalade pas en remontant jusqu'à son sommet mais la traverse *par dessous* le sommet comme si elle utilisait un tunnel. Les fondements de la théorie des traversées par tunnel ont été mis au point dans l'ouvrage de L. Mandelstamm et M. Léontovitch.

De nombreux phénomènes inexplicables en mécanique classique se trouvent facilement expliqués en mécanique quantique grâce précisément aux propriétés bizarres des particules microscopiques examinées dans les deux paragraphes précédents. On reviendra encore à cette question dans les paragraphes suivants.

§ 155. Vibration d'une corde

Les problèmes étudiés dans les paragraphes précédents montrent aussitôt la nature singulière des lois auxquelles obéissent les mouvements de très petites particules. On montrera dans la suite, par exemple, de quelle façon de l'équation de Schrödinger découle directement la propriété déjà connue des systèmes atomiques qui les rend très différents des systèmes obéissant à la mécanique classique : l'existence de niveaux d'énergie discrets. On verra que cette singularité est en liaison étroite avec certaines propriétés de l'équation différentielle de Schrödinger, propriétés déjà découvertes depuis longtemps au cours de la résolution des problèmes de la physique classique.

Pour faciliter la compréhension de l'exposé ultérieur examinons auparavant l'un de ces problèmes classiques, le problème de la vibration d'une corde tendue possédant sur toute sa longueur une même densité (ϱ=const) et une même tension (T=const).

L'équation d'une corde vibrante*) est une équation d'onde à une dimension

$$\frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{155.1}$$

où $u(x, t)$ est l'écartement de la corde de sa position d'équilibre et c' la vitesse de propagation de l'onde le long de la corde, liée à la tension T de la corde et à sa densité ϱ par la formule

$$c'=\sqrt{\frac{T}{\varrho}}. \tag{155.2}$$

Pour T et ϱ constants, c'=const.

Supposons tout d'abord que la corde est infinie et examinons le cas quand l'onde est sinusoïdale (monochromatique). Alors chaque point de la corde effectue des vibrations harmoniques et on peut rechercher la solution de l'équation (155.1) sous la forme

$$u(x, t)=y(x)e^{i2\pi\nu t}. \tag{155.3}$$

Portant cette solution dans (155.1) après simplification par $e^{i2\pi\nu t}$ on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{4\pi^2\nu^2}{c'^2}y=0 \tag{155.4}$$

ou, en remplaçant ν/c' par $1/\lambda$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}y=0. \tag{155.5}$$

Cette équation est satisfaite par les solutions $e^{\pm i\frac{2\pi}{\lambda}x}$. La solution générale sera donc

$$y=B_1e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x}+B_2e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x}, \tag{155.6}$$

où B_1 et B_2 sont des constantes arbitraires en général complexes, c'est-à-dire incluant les phases initiales δ_1 et δ_2 (voir § 47) :

$$B_1=b_1e^{i\delta_1},\quad B_2=b_2e^{-i\delta_2}.$$

Introduisant dans la solution (155.6) les amplitudes réelles b_1 et b_2 on obtient

$$y=b_1e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta_1\right)}+b_2e^{-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta_2\right)}. \tag{155.7}$$

*) Le mode d'établissement de l'équation de la corde vibrante voir dans V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, t. II, Editions Mir, 1970 (traduit du russe).

Si maintenant on multiplie chaque terme de (155.7) par le facteur temporel $e^{i\omega t}=e^{i\frac{2\pi}{\lambda}c't}$, on obtiendra la solution générale de l'équation (155.1) :

$$u(x, t)=b_1 e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+c't)+\delta_1\right]}+b_2 e^{-i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-c't)+\delta_2\right]}, \qquad (155.8')$$

la partie réelle est égale à

$$u(x, t)=b_1\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+c't)+\delta_1\right]+b_2\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-c't)+\delta_2\right]. \qquad (155.8)$$

Chaque terme de cette solution constitue une onde se propageant le long de la corde; et si le premier terme correspond à l'onde se propageant de gauche à droite (à la vitesse $+c'$), le second l'est à l'onde se déplaçant de droite à gauche (à la vitesse $-c'$).

Posons $b_1=b_2=a/2$ et transformons la somme des cosinus entrant dans (155.8). On obtient

$$u(x, t)=a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}c't+\delta\right)=$$

$$=a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right)\cos(\omega t+\delta), \qquad (155.9)$$

où $\frac{\delta_1+\delta_2}{2}=\delta'$, $\frac{\delta_1-\delta_2}{2}=\delta$. Il est évident que cette solution représente les ondes stationnaires de la corde, car pour des valeurs de x satisfaisant à la condition

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right)=0$$

l'élongation $u(x, t)$ sera égale à zéro pour tout t. Cela signifie qu'il existe des points sur la corde pour lesquels l'élongation est toujours nulle; ce sont les nœuds entre lesquels se disposent des points où l'élongation est maximale et représentant des ventres.

Supposons maintenant que la corde est fixée de façon rigide à une extrémité (par exemple pour $x=0$). On a ainsi une condition aux limites :

$$u(0, t)=0. \qquad (155.10)$$

Cette condition aux limites sera satisfaite si

$$u(0, t)=a\cos\delta'\cdot\cos(\omega t+\delta),$$

ce qui ne peut arriver (à l'exception du cas trivial de $a=0$) que si $\delta'=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire

$$u(x, t)=a\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\cos(\omega t+\delta). \qquad (155.11)$$

Si la corde possède une longueur finie l et est fixée aux deux extrémités, la solution (155.9) doit satisfaire à deux conditions aux limites

$$u(0, t)=0 \quad \text{et} \quad u(l, t)=0.$$

En appliquant la première condition on obtient la solution connue (155.11); la seconde condition aux limites une fois explicitée exige que

$$a \sin \frac{2\pi}{\lambda} l \cos(\omega t + \delta) = 0$$

pour toutes valeurs de t. Cette exigence sera satisfaite si

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} l = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{155.12}$$

d'où

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = n\frac{\pi}{l} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} c' = n\frac{\pi c'}{l}. \tag{155.13}$$

Ainsi donc, les solutions satisfaisant à l'équation différentielle (155.1) et aux conditions aux limites (155.12) constituent un ensemble d'un nombre infini de fonctions *choisies*

$$\sin n\frac{\pi x}{l} \cos(\omega_n t + \delta) \equiv \sin n\frac{\pi x}{l} \cos\left(n\frac{\pi c'}{l} t + \delta\right)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{155.14}$$

Ces fonctions décrivent différentes *ondes stationnaires* ou *vibrations propres* que la corde peut effectuer une fois fixée aux deux extrémités. En effet, posant dans (155.14) $n = 1$ on obtient la solution

$$u_1 = \sin \pi\frac{x}{l} \cos\left(\frac{\pi c'}{l} t + \delta\right). \tag{155.15}$$

Cette solution représente une onde stationnaire possédant deux nœuds pour $x = 0$ et pour $x = l$, car c'est seulement pour ces valeurs de x que la fonction (155.15) devient nulle pour toutes valeurs de t. Pour $n = 2$ on obtient l'onde stationnaire

$$u_2 = \sin 2\frac{\pi x}{l} \cos\left(2\frac{\pi c'}{l} t + \delta\right)$$

qui possède trois nœuds pour $x = 0, l/2, l$, c'est-à-dire deux nœuds aux deux extrémités de la corde et un nœud au milieu. En général la m-ème fonction

$$u_m = \sin m\frac{\pi x}{l} \cos\left(m\frac{\pi c'}{l} t + \delta\right)$$

décrit une onde stationnaire possédant $m+1$ nœuds. Notons dès maintenant que le nombre entier m joue ici le même rôle que les nombres quantiques dans les problèmes de la physique atomique.

Les longueurs d'ondes se formant sur une corde fixée aux deux extrémités peuvent être tirées de la formule (155.12) :

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \tag{155.16}$$

et c'est seulement ces longueurs d'ondes qui peuvent se propager le long de la corde, sinon les conditions aux limites ne seront pas remplies. La série choisie des fréquences correspondant à ces longueurs d'ondes sera

$$\nu_n = n\frac{c'}{2l} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{155.17}$$

Ces fréquences s'appellent *fréquences propres* de la corde vibrante. Comme on voit, elles constituent une suite discontinue : la fréquence propre la plus petite est égale à $\nu_1 = c'/2l$; les fréquences suivantes seront $2\nu_1$, $3\nu_1$, ...

Introduisons la terminologie suivante qu'on utilisera dans la suite. Les fonctions

$$y_n = \sin n\frac{\pi x}{l} \tag{155.18}$$

satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}y = 0 \tag{155.19}$$

et aux conditions aux limites

$$y(0) = y(l)$$

seulement dans le cas où la longueur d'onde λ entrant dans l'équation (155.19) en qualité de paramètre prend l'une des valeurs suivantes :

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Ces valeurs seront appelées *valeurs propres* du paramètre et les fonctions qui leur sont associées les *fonctions propres* de l'équation différentielle (155.19).

§ 156. Particule dans une boîte

Revenons maintenant à l'équation de Schrödinger et montrons avant tout sur un exemple simple comment se dégage de cette équation la quantification de l'énergie.

Soit une particule microscopique se trouvant dans un champ défini de la façon suivante : de $x=0$ à $x=l$ l'énergie potentielle U est constante et égale à zéro; aux frontières du domaine $(0, l)$ U croît brusquement jusqu'à l'infini (fig. 230). A ces conditions on peut affirmer que la particule ne quitte pas le domaine $0, l$. Pour faire image on peut se représenter la particule enfermée dans une boîte aux parois parfaitement réfléchissantes; à l'intérieur de la boîte la particule se meut librement entre ses parois, mais elle ne peut sortir de la boîte.

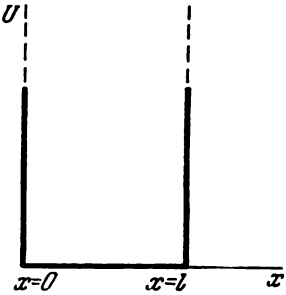


Fig. 230.

Etablissons avant tout les conditions aux limites de ce problème. Dans ce but on écrira

l'équation de Schrödinger pour un mouvement unidimensionnel, parallèle à l'axe x :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0. \tag{156.1}$$

L'énergie potentielle U du problème doit satisfaire aux conditions :

$$U=\begin{cases}0 & \text{pour } 0\leqslant x\leqslant l,\\ \infty & \text{pour } x=0 \quad \text{et pour} \quad x=l.\end{cases} \tag{156.2}$$

Montrons que pour remplir ces conditions $\psi(x)$ doit s'annuler aux parois de la boîte. En effet, désignant $d^2\psi/dx^2$ par ψ'' on peut récrire (156.1) sous la forme

$$\frac{\psi''}{\psi}=-\frac{2m}{\hbar^2}(E-U). \tag{156.3}$$

Pour toutes les valeurs de x entre 0 et l la valeur $U=0$ et le rapport ψ''/ψ admet une valeur finie; pour $x\to 0$ et $x\to l$ l'énergie potentielle tend vers l'infini. En vertu des conditions standard (§ 152, finitude et continuité de ψ et de ψ') ceci ne peut se produire qu'au cas où $\psi(x)\to 0$. Ainsi le problème se ramène à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0 \tag{156.4}$$

pour les conditions aux limites

$$\psi(0)=0, \quad \psi(l)=0. \tag{156.5}$$

Comme on voit ce problème est absolument identique à celui examiné au paragraphe précédent de vibrations stationnaires de la corde. On peut donc utiliser les résultats obtenus en leur donnant une interprétation correspondant au cas considéré. Notamment les fonctions propres de l'équation (156.4) seront [voir (155.18)]

$$\psi_n=\sin n\frac{\pi x}{l}. \tag{156.6}$$

Pour trouver les valeurs propres de l'énergie on tiendra compte de ce que le coefficient $2mE/\hbar^2$ de l'équation (156.4) remplace le coefficient $4\pi^2/\lambda^2$ de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}y=0. \tag{155.19}$$

Comme les valeurs propres de λ dans (155.19) se déterminent d'après la formule $\lambda_n=2l/n$, $4\pi^2/\lambda_n^2=4\pi^2(n/2l)^2$. On obtient de cette façon

$$\frac{2m}{\hbar^2}E_n=4\pi^2\left(\frac{n}{2l}\right)^2,$$

d'où

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{\pi^2 l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{156.7}$$

On voit donc que les conditions aux limites du problème ne seront satisfaites que pour une suite discrète de valeurs de l'énergie (156.7). Or, cela signifie que « la particule enfermée dans une boîte » ne peut posséder que des valeurs quantifiées de l'énergie (156.7).

Cette conclusion paraît à première vue inattendue. On montrera cependant que même pour une très petite particule la quantification devient apparente seulement dans le cas où la « boîte » est de dimensions atomiques. Calculons pour cela la distance entre les niveaux d'énergie pour un électron de masse $m = 9{,}8 \cdot 10^{-28}$ g placé dans une boîte de longueur $l = 1$ cm. Alors

$$E_n = n^2 \frac{(1{,}05 \cdot 10^{-27})^2 \cdot 9{,}8}{8 \cdot 10^{-28}} = n^2 \cdot 5{,}4 \cdot 10^{-27} \text{ erg} = n^2 \cdot 3{,}37 \cdot 10^{-15} \text{ eV}.$$

La distance entre des niveaux voisins ($\Delta n = 1$) sera donc

$$\Delta E_n \approx 2n \cdot 3{,}37 \cdot 10^{-15} \text{ eV} = 6{,}74 \cdot 10^{-15} n \text{ eV}.$$

Ces distances sont si petites que pratiquement on a affaire à une suite continue d'énergies. Au paragraphe suivant on verra toutefois que l'existence de niveaux discrets même au cas d'une boîte de dimensions macroscopiques présente une grande importance pour des particules élémentaires douées de propriétés quantiques déterminées (par exemple pour les électrons, voir p. 481).

Supposons maintenant que la boîte est de dimensions atomiques, par exemple $l = 10$ Å $= 10^{-7}$ cm. Alors

$$E_n = 5{,}4 \cdot 10^{-13} n^2 \text{ erg} = 0{,}34 n^2 \text{ eV},$$

et la distance entre les niveaux pour $\Delta n = 1$

$$\Delta E_n = 0{,}68 n \text{ eV}.$$

Ce sont déjà des distances tout à fait perceptibles.

Jusque-là on s'est intéressé uniquement aux valeurs propres de l'énergie. Examinons maintenant les propriétés des fonctions propres du problème considéré. Démontrons avant tout que les fonctions propres possèdent des propriétés d'*orthogonalité* s'exprimant par l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x) \psi_n(x)\, dx = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n.$$

A des fins de démonstration notons avant tout qu'en vertu des conditions aux limites (156.5) la fonction ψ s'annule pour $x = 0$ et $x = l$. L'intégration entre des limites infinies se réduit donc à l'intégration dans l'intervalle

de 0 à l. Etant donné l'expression générale des fonctions propres (156.6) il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = \int_0^l \sin m\frac{\pi x}{l} \sin n\frac{\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left[\cos(m-n)\frac{\pi x}{l} - \cos(m+n)\frac{\pi x}{l}\right] dx = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour $m=n$ l'intégrale est différente de zéro, ce qui autorise de *normer* à 1 les fonctions ψ_n. Supposons qu'on a trouvé le facteur N_n tel que la fonction $N_n\psi_n$ soit normée, c'est-à-dire qu'on ait la condition

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1.$$

Comme auparavant les intégrales de $-\infty$ à 0 et de l à $+\infty$ sont égales à zéro, car la fonction ψ_n est nulle dans ces intervalles et on obtient

$$1 = N_n^2 \int_0^l \sin^2 n\frac{\pi x}{l}\,dx = N_n^2\,\frac{l}{2},$$

d'où

$$N_n = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Ainsi le facteur de normalisation pour toutes les fonctions ψ_n est le même et les fonctions propres normées sont :

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin 2\frac{\pi x}{l}, \quad \ldots$$

Rappelons que quand la particule se trouve dans l'état décrit par les fonctions propres ψ_n la dépendance du temps s'exprime par le facteur « monochromatique » $e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$, de sorte qu'en tout moment du temps la fonction décrivant l'état de la particule d'énergie E_n est :

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} = \sin n\frac{\pi x}{l}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}.$$

En outre d'après ce qui a été dit au § 152 le facteur temporel doit être essentiellement complexe, c'est-à-dire qu'on ne doit pas se limiter à sa partie réelle. Cependant le sens physique est dévolu non pas à la fonction $\psi_n(x, t)$, mais au carré de son module

$$|\psi_n(x, t)|^2 = \psi_n^*(x, t)\psi_n(x, t) = \psi_n^2(x) = \sin^2 n\frac{\pi x}{l}.$$

Il est évident que l'état décrit par les fonctions $\psi_n(x, t)$ ne dépend pas du temps : c'est un *état stationnaire.*

Sur la figure 231 on a représenté les graphiques des fonctions propres (156.6) et sur la figure 232, les carrés de leurs modules. Par leur contenu ces derniers constituent la distribution de probabilité de trouver la particule microscopique par unité de longueur en tel ou tel endroit à l'intérieur de la boîte pour différentes valeurs de l'énergie de la particule. Comme on voit

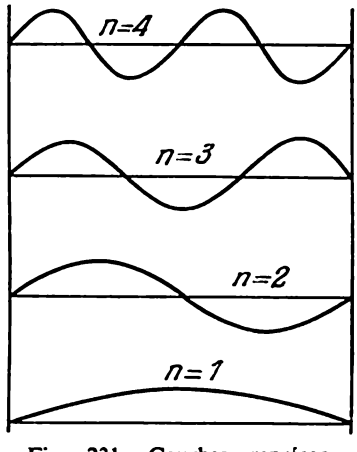


Fig. 231. Courbes représentatives des fonctions propres

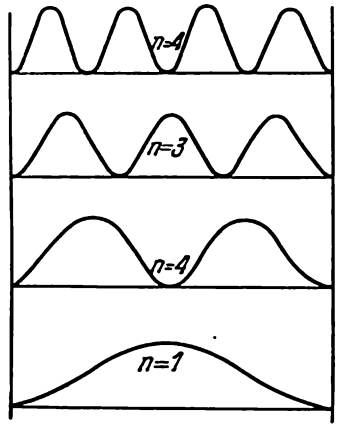


Fig. 232. Distribution de la densité de probabilité de la position de la particule dans une boîte

d'après le dessin, dans l'état énergétique inférieur ($n=1$) la probabilité est la plus grande de trouver la particule autour du milieu de la boîte, tandis que la probabilité de la trouver près des parois est nulle. Ce résultat diffère fortement de ce à quoi on peut s'attendre pour une particule macroscopique. Une telle particule peut être trouvée évidemment avec une même probabilité en tout point de la boîte, de sorte que la courbe de densité de probabilité doit évoluer dans ce cas parallèlement à l'axe des abscisses. Le dessin montre qu'avec l'accroissement de l'énergie de la particule (augmentation du nombre quantique n) les maximums de la courbe $|\psi_n|^2$ se rapprochent de plus en plus, de sorte que, pour des valeurs très grandes du nombre quantique n, on obtient une distribution correspondant à la particule macroscopique. Ici comme dans tous les autres cas le principe de correspondance est satisfait.

§ 157. Electron dans un puits de potentiel

En qualité d'application des résultats obtenus au paragraphe précédent examinons le comportement d'un électron dans un champ représenté par le diagramme de potentiel de la figure 233 : l'énergie potentielle de l'électron à l'extérieur de la boîte ou du « puits » $OABC$ est nulle, à l'intérieur du puits elle est égale à $-U$. C'est dans un tel champ que se trouve, par exemple, l'électron à l'intérieur du métal.

Puisque le choix du zéro de l'énergie potentielle est arbitraire, choisissons-le de façon que l'énergie potentielle de l'électron au repos à l'intérieur du métal soit positive et égale, par exemple, à U'' (fig. 234). Alors à l'extérieur du métal (dans le vide) l'énergie potentielle de l'électron au repos sera également positive et égale à U', tandis que la différence $U'-U''=U_0$ constitue justement la profondeur du puits de potentiel à l'intérieur duquel se trouve l'électron dans le métal.

Si l'électron dans le métal est en mouvement, son énergie totale sera supérieure à U'' et égale, par exemple, à E. L'excès d'énergie par rapport à U'', c'est-à-dire la quantité $E-U''=T$, sera en ce cas évidemment égal à l'énergie cinétique.

On sait que l'électron enfermé dans une boîte ne peut posséder que des valeurs déterminées de l'énergie formant une suite discontinue (§ 156). Il est vrai que pour un morceau de métal de dimensions finies la distance entre ces niveaux d'énergie sera très petite. Cependant leur existence se manifeste de façon bien déterminée grâce à l'importante loi de la nature appelée *principe d'exclusion de Pauli*. En effet, les particules élémentaires (électrons, protons, neutrons, etc.) possèdent une singulière propriété toujours présente analogue à la charge ou à la masse et consistant dans la possession d'un moment cinétique intrinsèque appelé spin (en anglais *spin* signifie « en rotation ») et d'un moment magnétique. Une propriété importante du spin de l'électron est que son vecteur peut s'orienter relativement à la direction choisie et en particulier par rapport au vecteur du spin d'un autre électron *rien que de deux manières : parallèlement ou antiparallèlement*. Dans le second volume on traitera de cette propriété de l'électron de façon plus

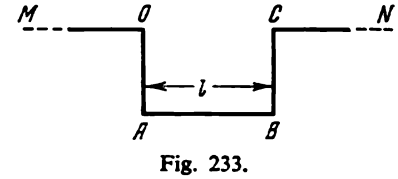


Fig. 233.

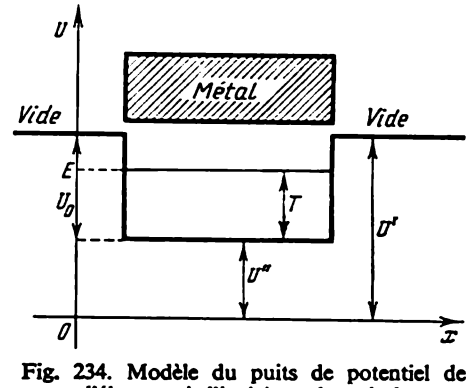


Fig. 234. Modèle du puits de potentiel de l'électron à l'intérieur du métal

exhaustive en notant pour l'instant qu'en vertu du principe mentionné de Pauli, à chaque niveau d'énergie de l'électron dans le métal on ne peut trouver que *deux électrons aux spins antiparallèles*, mais si l'on imagine, au début, un réseau d'ions positifs, au sein duquel on introduit un à un des électrons à la température du zéro absolu, alors les deux premiers électrons se placeront au niveau le plus bas; le troisième ne pourra déjà plus occuper ce niveau et devra se placer sur le niveau suivant plus élevé, c'est-à-dire qu'il possédera à côté d'une énergie potentielle une certaine petite énergie cinétique. Comme le nombre d'électrons libres dans un métal est très grand (par exemple, un atome-gramme de métal monovalent, disons du sodium, possède $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ d'électrons libres), il ne sera occupé qu'un nombre correspondant, c'est-à-dire deux fois inférieur, de niveaux d'énergie. Le niveau supérieur de ces niveaux occupés constitue, à la température du zéro absolu, une limite bien marquée entre les niveaux occupés et libres. Ce niveau supérieur ζ est appelé niveau critique ou niveau de Fermi. Il est évident que pour la libération d'un électron du métal il est nécessaire de lui communiquer une énergie au moins égale à la différence entre la profondeur du puits de potentiel et l'énergie cinétique du niveau critique (fig. 235). Cette différence

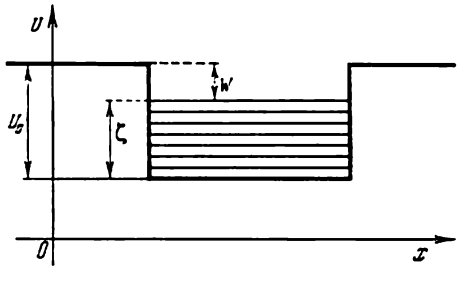


Fig. 235. Travail d'extraction et potentiel intérieur

$$w = U_0 - \zeta$$

est justement le travail d'extraction de l'électron du métal se manifestant dans l'effet photoélectrique (le terme P dans l'équation d'Einstein).

Toutefois l'électron peut être extrait du métal non pas uniquement par l'action de la lumière, mais également par chauffage (émission thermo-électronique). A une température supérieure au zéro absolu une partie des électrons occupent les niveaux supérieurs libres, c'est-à-dire les niveaux se disposant au-dessus du niveau de Fermi. Si après chauffage du métal l'énergie de l'électron est si grande qu'il devient capable de surmonter le champ ralentisseur et de sortir hors du métal, on voit se déclencher alors l'effet thermionique.

Auto-émission (émission froide). Il apparaît, toutefois, que sous l'influence d'un fort champ électrique les électrons commencent à sortir du métal à des températures aussi basses que l'on veut. Du point de vue qualitatif ce phénomène peut s'expliquer également en partant de la mécanique classique, mais les valeurs de l'intensité du courant obtenues ainsi ne s'accordent pas avec celles de l'expérience.

L'explication classique de ce phénomène de *décharge froide* est la suivante. La distribution du potentiel à l'intérieur du métal et près de sa

surface en l'absence du champ peut se représenter de façon approchée comme auparavant par la ligne brisée *KLMN* (fig. 236). Appliquons maintenant au métal un champ électrique d'intensité $\mathcal{E}$. La force agissant sur l'électron se trouvant hors du métal est constituée de la force e, $\mathcal{E}$, s'exerçant de la part du champ à laquelle s'ajoute la dénommée « force de l'image ». Cette dernière est due à la production par l'électron lui-même à la surface du métal par induction électrostatique de charges positives qui attirent l'électron comme si à l'intérieur du métal se trouvait à la distance x de sa surface

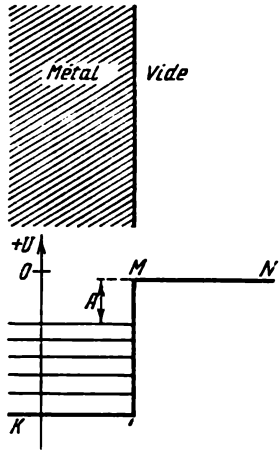


Fig. 236.

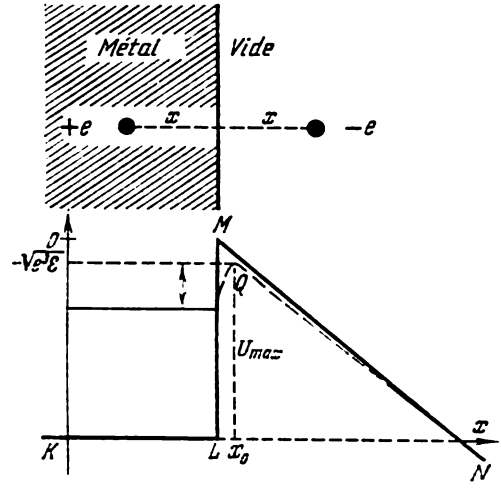


Fig. 237.

une charge $+e$ constituant l'image électrique de l'électron (fig. 237). Ains donc, la force résultante est

$$F=e\mathcal{E}-\frac{e^2}{4x^2},$$

tandis que l'énergie potentielle de l'électron dans le champ de cette force sera

$$U=U_0-e\mathcal{E}x-\frac{e^2}{4x}. \qquad (157.1)$$

Sur la figure 237 on a représenté en pointillé la courbe de cette énergie potentielle. Cette courbe, comme on le voit, présente un maximum à la distance $x=x_0$ de la surface. Pour trouver x_0 écrivons

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_0}=-e\mathcal{E}+\frac{e^2}{4x_0^2}=0,$$

d'où $x_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{\mathcal{E}}}$. Portant cette valeur de x_0 dans (157.1) on obtient pour la profondeur du puits de potentiel

$$U_{\max}=U_0-\sqrt{e^3\mathcal{E}}.$$

On voit que le champ *abaisse* la hauteur du mur du puits de potentiel d'une quantité

$$\sqrt{e^3\mathcal{E}}.$$

Du point de vue de la mécanique classique les électrons au sein du métal possédant une énergie inférieure à $U_{\max}$ ne peuvent franchir sa surface, car ils sont retenus par la barrière de potentiel *LQN*, mais les électrons dont l'énergie dépasse $U_{\max}$ peuvent se libérer. Ainsi en présence du champ le travail d'extraction de l'électron diminue et devient égal à

$$w'=U_{\max}-\zeta=U_0-\sqrt{e^3\mathcal{E}}-\zeta=w-\sqrt{e^3\mathcal{E}},$$

où w est le travail d'extraction en l'absence du champ.

Il est évident que le courant maximal s'obtiendrait au cas où le travail w' deviendrait nul. Dans ce cas l'intensité du champ appliqué sera évidemment

$$\mathcal{E}=\frac{w^2}{e^3}=7\cdot10^6w^2 \text{ V/cm}.$$

Pour le tungstène $w=4{,}9$ V; c'est pourquoi $\mathcal{E}=2\cdot10^8$ V/cm. Or Millikan a obtenu des courants puissants pour des décharges froides déjà pour $\mathcal{E}=4\cdot10^6$ V/cm.

La clef du mystère de cette contradiction brutale est justement fournie par l'électron possédant la propriété d'effectuer des passages par effet tunnel, inconnus en mécanique classique. Examinons de nouveau le potentiel se formant près de la surface du métal en présence d'un champ. Si l'on ne tient pas compte de la force de l'image (la prise en considération de cette force donnerait un résultat plus précis mais compliquerait fortement les calculs), la variation du potentiel sera représentée par la ligne brisée *KLMN* (fig. 238). L'électron possédant l'énergie E inférieure en valeur absolue à la hauteur de la barrière U_0 en vertu des lois de la mécanique quantique peut quitter le métal directement par effet tunnel. La probabilité de cette sortie est exprimée par la transparence de la barrière égale d'après la formule (154.14) à

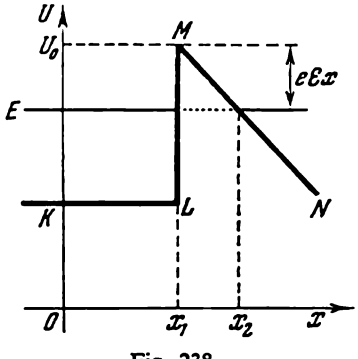


Fig. 238.

$$D=Ce^{-\frac{2}{\hbar}\int_x^{x_2}\sqrt{2m(U-E)}\,dx},$$

où U est l'énergie potentielle en un point quelconque de la barrière et E l'énergie de la particule calculée à partir du même niveau que la hauteur de la barrière.

Il est évident (fig. 238) que

$$U=U_0-e\mathcal{E}x.$$

Donc en posant $x_1=0$ on peut écrire

$$\int_0^{x_2}\sqrt{U-E}\,dx=\int_0^{x_2}\sqrt{U_0-e\mathcal{E}x-E}\,dx=-\frac{2}{3e\mathcal{E}}(U_0-e\mathcal{E}x_2-E)^{3/2}+\frac{2}{3e\mathcal{E}}(U_0-E)^{3/2}.$$

Sur le dessin on voit aussitôt que $U_0-e\mathcal{E}x_2=E$, par suite, le premier terme est nul et on obtient pour la transparence de la barrière

$$D=Ce^{-\frac{2(U_0-E)^{3/2}\sqrt{2m}}{3e\hbar}\frac{1}{\mathcal{E}}}$$

ou en désignant $\frac{2(U_0-E)^{3/2}\sqrt{2m}}{3e\hbar}=\alpha$ on obtient $D=Ce^{-\alpha/\mathcal{E}}$. C'est précisément la dépendance trouvée expérimentalement entre le « courant froid » et l'intensité du champ.

Il est intéressant de comparer les données de la transparence de la barrière et de l'intensité du courant froid pour des tensions différentes (voir tableau XXIII).

Tableau XXIII

$\mathcal{E}$ (en V/cm)	$E=-2$ V		$E=-5$ V	
	D	J (A/cm²)	D	J (A/cm²)
10^6	10^{-30}	10^{-74}	10^{-328}	10^{-322}
$5\cdot10^6$	$8\cdot10^{-15}$	$1{,}5\cdot10^{-7}$	$8\cdot10^{-65}$	$6\cdot10^{-58}$
10^7	$1{,}3\cdot10^{-6}$	100	10^{-31}	$3\cdot10^{-24}$
$2\cdot10^7$	0,013	$4\cdot10^6$	$2\cdot10^{-15}$	$3\cdot10^{-7}$
$3\cdot10^7$	1	$7\cdot10^8$	$6\cdot10^{-10}$	0,18

Il est remarquable que la transparence croît très rapidement avec l'augmentation de l'intensité du champ, de même que pour de très petites valeurs de D les courants deviennent intenses. Cette dernière circonstance s'explique par le grand nombre d'électrons bombardant par seconde le mur de la barrière de sorte que même pour une probabilité infime d'extraction on voit apparaître des courants intenses.

Différence de potentiel de contact. Si l'on met en contact deux métaux de nature différente (par exemple le cuivre et le zinc), il s'établit entre eux une différence de potentiel (différence de potentiel de contact). Ce phénomène découvert encore par Volta s'explique si l'on examine les conditions dans lesquelles se trouvent les électrons dans les deux métaux.

Soient deux métaux dont les potentiels internes et les travaux d'extraction w_1 et w_2 sont différents et soit $w_1 < w_2$. Rapprochons-les de manière que la distance entre leurs surfaces parallèles soit de dimensions atomiques $\sim(10^{-8}$ cm). Dans les deux métaux tous les niveaux d'énergie inférieurs au niveau de Fermi ζ sont occupés par des électrons, les niveaux au-dessus de ce dernier étant inoccupés. Mais le niveau de Fermi dans le métal *I* se dispose plus haut par rapport au niveau zéro *OX* que le niveau de Fermi dans le métal *II* par rapport au même niveau (fig. 239). Par suite les électrons occupant les niveaux supérieurs du métal *I* peuvent franchir la barrière de potentiel séparant les deux métaux (effet tunnel) et occuper les niveaux libres du métal *II*. Mais les électrons du métal *II* ne peuvent pénétrer dans le métal *I*, car tous les niveaux de ce dernier se trouvant à la même hauteur avec ζ_2 et au-dessous dans le métal *I* sont occupés par des paires d'électrons. Le métal *II* se chargera donc négativement et le métal *I* positivement. Ce processus se déroulera tant que les niveaux critiques des deux métaux ne s'égalisent. De plus, entre les deux métaux il s'établira une différence de potentiel extérieure égale à la différence de leurs travaux d'extraction.

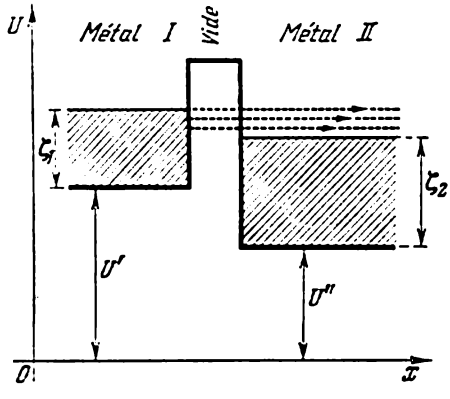


Fig. 239.

Fig. 240.

On peut s'en convaincre sur la base des considérations suivantes. Soient deux métaux *I* et *II* en contact aux travaux d'extraction w_1 et w_2 tels que $w_1 < w_2$. Considérons un point *A* se trouvant dans le vide près de la surface du métal *I* et un point *B*, près de la surface du métal *II* (fig. 240). A la pénétration de l'électron du point *A* à l'intérieur du métal *I* jusqu'à son niveau de Fermi, il s'accomplira un travail d'extraction w_1; à la pénétration du point *B* à l'intérieur du métal *II* jusqu'à un niveau de Fermi, il se produira un travail d'extraction w_2. Mais le niveau de Fermi dans les métaux en contact s'établit, d'après ce qui a été dit, à une même hauteur. Quant au travail d'extraction intrinsèque à chaque métal il n'est pas influencé par le fait que les deux métaux sont en contact. Si donc $w_2 > w_1$, la hauteur du niveau de Fermi étant la même, ceci ne peut avoir lieu que si le potentiel au point *B* est supérieur au potentiel au point *A* d'une quantité égale précisément à la différence $w_2 - w_1$.

§ 158. Oscillateur linéaire harmonique

Un modèle essentiel utilisé en physique atomique est justement l'oscillateur linéaire harmonique. Dans l'exposé antérieur on a utilisé plusieurs fois ce modèle. L'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique, comme il est connu, est égale à

$$U=\frac{fx^2}{2}=\frac{m\omega_0^2x^2}{2}, \tag{158.1}$$

où $\omega_0=\sqrt{\frac{f}{m}}$ est la pulsation de l'oscillateur calculée en mécanique classique. Le diagramme de potentiel correspondant est la parabole de la figure 241. Il est facile de constater que ce diagramme de potentiel se présente sous forme d'une boîte aux parois réfléchissantes semblable à celle examinée au § 156. L'oscillateur macroscopique d'énergie E vibre entre les « murs » d'un mouvement de va-et-vient en restant dans les limites du segment x_1x_2, c'est-à-dire en ne pénétrant pas à droite de x_2 et à gauche de x_1. Pour trouver la solution du problème de l'oscillateur microscopique il faut examiner les ondes stationnaires se formant à l'intérieur de la boîte; en principe le procédé est le même que celui utilisé pour la recherche des vibrations propres de la corde. Toutefois une particularité survient qui complique énormément la résolution mathématique du problème; à l'intérieur de la boîte l'énergie potentielle n'est pas partout constante, mais varie suivant la loi parabolique; c'est pourquoi la longueur d'onde $\lambda=\frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-U)}}$ ne reste pas constante en divers points de la boîte, mais augmente vers les bords et diminue au milieu.

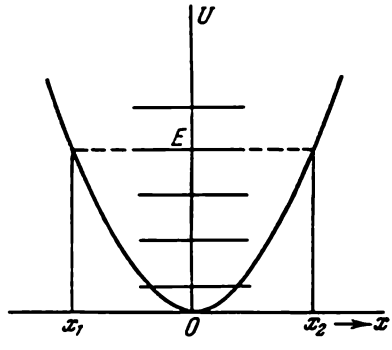


Fig. 241. Diagramme de potentiel de l'oscillateur linéaire harmonique

L'équation de Schrödinger pour le problème de l'oscillateur harmonique prend la forme

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0, \tag{158.2}$$

la fonction ψ y devant satisfaire à la condition : pour $x\to\pm\infty$ $\psi(x)=0$ de même qu'aux autres conditions standard (§ 152).

A des fins de simplification introduisons les notations

$$\frac{2m}{\hbar^2}E=\lambda, \qquad \frac{m\omega_0}{\hbar}=\alpha; \tag{158.3}$$

l'équation de Schrödinger peut se récrire de la façon suivante :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+(\lambda-\alpha^2x^2)\psi=0. \tag{158.4}$$

Afin d'intégrer (158.4) examinons d'abord le cas limite de x très grand, de sorte que $\alpha x \gg \lambda$. Alors dans (158.4) on peut négliger λ comme une quantité petite devant $\alpha^2 x^2$ et on obtient

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2 x^2 \psi = 0. \tag{158.5}$$

Pour $x \gg 1$ cette équation est satisfaite avec une précision suffisante par la solution

$$\psi = e^{\pm \alpha x^2/2}. \tag{158.6}$$

En effet, on a

$$\frac{d\psi}{dx} = \pm \alpha x e^{\pm \alpha x^2/2}, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2 x^2 e^{\pm \alpha x^2/2} \pm \alpha e^{\pm \alpha x^2/2}.$$

Mais pour $x \gg 1$ le deuxième terme du second membre de la dernière égalité est négligeable par rapport au premier et, par suite, l'équation (158.5) est vérifiée asymptotiquement par la solution (158.6). Des deux signes possibles de cette solution il faut choisir le signe moins

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2},$$

car la solution avec le signe plus augmente indéfiniment pour $x \to \infty$, ce qui contredit les conditions naturelles imposées à la fonction ψ (§ 152).

Considérant le cas limite qu'on vient d'examiner cherchons la solution de (149.4) sous la forme

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} f(x), \tag{158.7}$$

où $f(x)$ est une fonction encore inconnue qui doit être choisie de façon que (158.7) satisfasse à l'équation (158.4). Portons la solution de (158.7) dans (158.4) en calculant auparavant les dérivées

$$\frac{d\psi}{dx} = \left(-\alpha x f + \frac{df}{dx} \right) e^{-\alpha x^2/2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(-\alpha f - 2\alpha x \frac{df}{dx} + \alpha^2 x^2 f + \frac{d^2 f}{dx^2} \right) e^{-\alpha x^2/2}.$$

En remplaçant dans (158.4) après de simples transformations et la simplification par $e^{-\alpha x^2/2}$ on a

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - 2\alpha x \frac{df}{dx} + (\lambda - \alpha) f = 0. \tag{158.8}$$

Cette équation sera transformée par l'introduction d'une nouvelle variable indépendante ξ au lieu de x :

$$\xi = \sqrt{\alpha} \cdot x; \tag{158.9}$$

ξ est un nombre sans dimensions, car α a la dimension de $[\text{cm}^{-2}]$ [il est facile de s'en convaincre directement d'après l'expression de α (158.3)]. On a maintenant

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{\alpha} \frac{d}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \alpha \frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Après changement de variable et simplification par α l'équation (158.8) prend la forme

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}-2\xi\frac{dH}{d\xi}+\left(\frac{\lambda}{\alpha}-1\right)H=0, \tag{158.10}$$

où $H(\xi)$ est une fonction obtenue par remplacement dans $f(x)$ de la variable indépendante x par ξ. Cherchons $H(\xi)$ sous forme d'une série de puissances

$$H(\xi)=a_\nu\xi^\nu+a_{\nu+1}\xi^{\nu+1}+a_{\nu+2}\xi^{\nu+2}+\ldots\equiv\sum_{k=\nu}^{\infty}a_k\xi^k. \tag{158.11}$$

Pour garantir la finitude de la solution on commence la série par une certaine puissance ν en déterminant ν par la suite de telle façon que la fonction $H(\xi)$ ne devienne nulle part infinie. Ecrivons les dérivées de $H(\xi)$:

$$\frac{dH}{d\xi}=\nu a_\nu\xi^{\nu-1}+(\nu+1)a_{\nu+1}\xi^\nu+(\nu+2)a_{\nu+2}\xi^{\nu+1}+\ldots,$$

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}=\nu(\nu-1)a_\nu\xi^{\nu-2}+(\nu+1)\nu a_{\nu+1}\xi^{\nu-1}+(\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2}\xi^\nu+\ldots$$

Portant ces valeurs dans (158.10) on obtient après des transformations simples

$$\nu(\nu-1)a_\nu\xi^{\nu-2}+(\nu+1)\nu a_{\nu+1}\xi^{\nu-1}+(\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2}\xi^\nu+\ldots=$$
$$=\left[2\nu-\left(\frac{\lambda}{\alpha}-1\right)\right]a_\nu\xi^\nu+\ldots$$

Comme cette égalité doit avoir lieu identiquement, les coefficients des mêmes puissances de ξ à gauche et à droite doivent être mutuellement égaux. Le terme inférieur à gauche est $\nu(\nu-1)a_\nu\xi^{\nu-2}$; son coefficient doit être nul, car à droite il n'y a pas de terme de telle puissance de ξ. Ceci donne $\nu(\nu-1)=0$ d'où $\nu=0$ ou $\nu=1$. En égalant à zéro le coefficient du terme suivant on obtient $\nu=0$ ou $\nu=-1$. La première solution n'apporte rien de nouveau, la seconde ne convient pas, car la série commençant par le terme avec ξ^{-1} devient infinie pour $\xi=0$.

Comparant les coefficients des termes contenant ξ^i on trouve

$$(i+1)(i+2)a_{i+2}=\left[2i-\left(\frac{\lambda}{\alpha}-1\right)\right]a_i,$$

d'où

$$a_{i+2}=\frac{2i+1-\frac{\lambda}{\alpha}}{(i+1)(i+2)}a_i. \tag{158.12}$$

Cette formule permet de calculer par récurrence tous les termes de la série en sautant chaque fois un. Comme la série peut commencer soit par la puissance $\nu=0$, soit par la puissance $\nu=1$, la formule de récurrence (158.12) donne deux séries dont l'une n'est composée que de termes pairs :

$$a_0+a_2\xi^2+a_4\xi^4+\ldots, \tag{158.13}$$

et l'autre que de termes impairs :

$$a_1\xi+a_3\xi^3+a_5\xi^5+\ldots \tag{158.14}$$

Ces séries constituent des solutions particulières de l'équation (158.10).

Examinons maintenant le comportement des séries obtenues pour des grandes valeurs de ξ. Prenons une de ces séries, par exemple (158.13), et montrons que pour ξ suffisamment grand elle se comporte comme e^{ξ^2}. Pour cela comparons la série (158.13) avec la série e^{ξ^2}. Il est connu que

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots$$

et par suite

$$e^{\xi^2}=1+\frac{\xi^2}{1!}+\frac{\xi^4}{2!}+\frac{\xi^6}{3!}+\ldots+\frac{\xi^\tau}{\left(\frac{\tau}{2}\right)!}+\frac{\xi^{\tau+2}}{\left(\frac{\tau}{2}+1\right)!}+\ldots$$

Pour ξ suffisamment grand les premiers termes de cette somme ont des valeurs négligeables par rapport aux termes supérieurs. Désignons les coefficients de ξ^τ et $\xi^{\tau+2}$ par b_τ et $b_{\tau+2}$; leur rapport

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau}=\frac{(\tau/2)!}{(\tau/2+1)!}=\frac{1}{\tau/2+1}. \tag{158.15}$$

Pour τ suffisamment grand au dénominateur de (158.15) on peut négliger 1 :

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau}=\frac{1}{\tau/2}=\frac{2}{\tau}. \tag{158.16}$$

Pour la relation des termes correspondants de la série (158.13) la formule de récurrence donne

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau}=\frac{2\tau+1-\lambda/a}{(\tau+2)(\tau+1)};$$

pour un τ suffisamment grand

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau}=\frac{2}{\tau}. \tag{158.17}$$

Rapprochant (158.16) et (158.17) on voit que

$$\frac{b_{\tau+2}}{a_{\tau+2}}=\frac{b_\tau}{a_\tau}=\ldots=\text{const},$$

c'est-à-dire que les termes supérieurs de la série considérée ne diffèrent des termes supérieurs de la série e^{ξ^2} que d'un facteur constant, ce qui signifie que $H(\xi)$ pour des ξ grands croît comme e^{ξ^2} et, par suite, en vertu de (158.7) et de (158.9),

$$\psi=e^{-\alpha x^2/2}f(x)=e^{-\xi^2/2}H(\xi)\to e^{\xi^2/2},$$

c'est-à-dire pour $\xi\to\infty$ et $\psi\to\infty$.

On voit ainsi que les solutions fournies par les séries de puissances à formule de récurrence (158.12) ne satisfont pas en général aux conditions

aux limites. Or il est facile de remarquer que pour des valeurs choisies de λ/α les séries s'arrêtent à un certain terme, autrement dit, se transforment en des polynômes. Ainsi, par exemple, pour $\lambda/\alpha=5$ la série (158.13) n'est formée que d'un seul terme a_0, car d'après (158.12) on voit que pour $\lambda/\alpha=5$ le coefficient $a_2=0$, par suite, les coefficients suivants seront nuls. Pour $\lambda/\alpha=9{,}13, \ldots$ la même série s'arrêtera au second terme, au troisième, etc.

Mais si $H(\xi)$ est réduit à un polynôme, alors la présence d'un facteur exponentiel assurera l'annulation de ψ pour $\xi\to\infty$. Ainsi les solutions satisfaisant aux conditions standard ne s'obtiennent que dans le cas où les séries (158.13) et (158.14) deviennent des polynômes. En vertu de la formule de récurrence (158.12) on obtient un polynôme s'arrêtant sur le terme de puissance n si

$$\frac{\lambda}{\alpha}=2n+1.$$

En y portant les valeurs de λ et de α tirées de (149.3) il vient

$$\frac{2mE_n}{\hbar^2}E_n=\frac{m\omega_0}{\hbar}(2n+1),$$

d'où

$$E_n=\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{158.18}$$

On voit ainsi que parmi les fonctions ψ satisfaisant à l'équation d'onde de l'oscillateur ne satisfont en même temps aux conditions aux limites que les fonctions correspondant à la série discontinue des valeurs de l'énergie de l'oscillateur (158.18). Notons que cette formule diffère quelque peu de l'ancienne formule de la théorie quantique

$$E_n=n\hbar\omega_0.$$

Précisément, d'après la formule (158.18) le nombre quantique de l'oscillateur linéaire s'exprime toujours par des demi-entiers $n+1/2$. Par suite dans l'état quantique inférieur (pour $n=0$) l'énergie de l'oscillateur ne s'annule pas mais est égale à

$$E_0=\frac{\hbar\omega_0}{2}. \tag{158.19}$$

Cette valeur de E_0 est appelée « énergie nulle ». L'origine de cette appellation est liée à ce que l'énergie $^1/_2\hbar\omega_0$ persiste même au zéro absolu. Son contenu de même que son rôle seront expliqués dans les paragraphes suivants.

On a vu au § 156 que la quantification de l'énergie de « la particule dans une boîte » s'obtient par application des conditions aux limites analogues à celles du problème de la corde vibrante. Dans le problème de l'oscillateur linéaire examiné dans ce paragraphe la quantification a été la conséquence de la condition naturelle de la finitude de la fonction dans

tout l'espace. La possibilité d'obtenir la quantification en qualité de conséquence simple de semblables conditions naturelles constitue justement la remarquable particularité de l'équation de Schrödinger, mentionnée au § 158.

§ 159. Etats normal et excités de l'oscillateur linéaire

A chaque valeur propre de l'énergie de l'oscillateur linéaire

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

correspond sa fonction propre

$$\psi=N_n e^{-\xi^2/2}H_n(\xi),$$

où N_n est le facteur constant de normalisation, $H_n(\xi)$ le polynôme de n-ième degré dont les coefficients sont calculés au moyen de la formule de récurrence (158.12) pour $\frac{\lambda}{\alpha}=2n+1$. Cherchons les polynômes premiers $H_n(\xi)$. Le coefficient de ξ^n s'exprime à l'aide de (158.12) de la façon :

$$a_n=\frac{[2(n-2)+1]-(2n-1)}{(n-1)n}\,a_{n-2}=-\frac{1\cdot 2^2}{n(n-1)}\,a_{n-2},$$

d'où

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2^2}\,a_n;$$

il est facile d'obtenir ensuite

$$a_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 2^2}\,a_{n-2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 2^4}\,a_n, \quad \text{etc.}$$

Le polynôme cherché sera donc :

$$H_n(\xi)=a_n\left[\xi^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2^2}\,\xi^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 2^4}\,\xi^{n-4}-\ldots\right]. \quad (159.1)$$

Posant dans (159.1) $a_n=2^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ on obtient les polynômes suivants :

$$\left.\begin{array}{ll} H_0(\xi)=1, & H_3(\xi)=8\xi^3-12\xi, \\ H_1(\xi)=2\xi, & H_4(\xi)=16\xi^4-48\xi^2+12, \\ H_2(\xi)=4\xi^2-2, & H_5(\xi)=32\xi^5-160\xi^3+120\xi, \quad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (159.2)$$

Ce sont justement les polynômes dits de Tchébychev-Hermite qu'on peut présenter sous la forme suivante facile à retenir :

$$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n(e^{-\xi^2})}{d\xi^n}. \quad (159.2')$$

En effet, par exemple, pour $n=1$

$$H_1=-e^{\xi^2}\frac{d}{d\xi}(e^{-\xi^2})=2\xi,$$

pour $n=2$

$$H_2=e^{\xi^2}\frac{d}{d\xi^2}(e^{-\xi^2})=e^{\xi^2}\frac{\xi}{d\xi}(-2\xi e^{-\xi^2})=4\xi^2-2,$$

etc.

Pour le calcul des différents polynômes il est commode d'utiliser la formule de récurrence permettant de calculer d'après deux polynômes le troisième. Cette formule s'obtient de la façon suivante. Par définition on a

$$H_{n+1}(\xi)=(-1)^{n+1}e^{\xi^2}\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}(e^{-\xi^2})=-(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}(e^{-\xi^2}). \qquad (159.3)$$

Puis

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}(e^{-\xi^2})=\frac{d^n}{d\xi^n}\left(\frac{de^{-\xi^2}}{d\xi}\right)=\frac{d^n}{d\xi^n}(-2\xi e^{-\xi^2})=-2\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi e^{-\xi^2}).$$

Profitons maintenant de la formule connue de la dérivée d'ordre n d'un produit de deux fonctions uv

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv)=u\frac{d^nv}{dx^n}+n\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+\ldots$$

A l'aide de cette formule on obtient

$$\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi e^{-\xi^2})=\xi\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2})+n\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(e^{-\xi^2}),$$

par suite

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}(e^{-\xi^2})=-2\left[\xi\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2})+n\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(e^{-\xi^2})\right],$$

et d'après (159.3)

$$H_{n+1}(\xi)=2\xi(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2})+2n(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-2}}(e^{-\xi^2})=$$

$$=2\xi(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2})-2n(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(e^{-\xi^2}),$$

soit, d'après la définition générale de (159.2'),

$$H_{n+1}(\xi)=2\xi H_n(\xi)-2nH_{n-1}(\xi). \qquad (159.4)$$

C'est bien la formule de récurrence cherchée liant entre eux H_{n+1}, H_n et H_{n-1}. Il est facile de vérifier que les polynômes (159.2) s'obtiennent à partir de H_0 et H_1 au moyen de cette formule. Elle peut être appliquée pour le calcul du polynôme d'un ordre quelconque d'après les deux polynômes précédents.

Les fonctions propres de l'oscillateur linéaire jouissent de la propriété importante suivante : elle sont orthogonales dans l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx=0 \quad \text{pour} \quad m\neq n.$$

Au cas où $m=n$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx$$

a une valeur finie, ce qui peut être utilisé pour le calcul du facteur de normalisation N_n. La condition de normalisation (voir § 152) réside dans ce que

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx=1.$$

En y portant l'expression de la fonction ψ_n et en faisant les calculs**) on trouve

$$N_n^2 \frac{2^n n!\pi^{1/2}}{\alpha^{1/2}}=1,$$

d'où

$$N_n=\sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}n!2^n}}.$$

Pour l'état nul $n=0$ on a

$$N_0=\sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}}.$$

Ainsi donc, la fonction propre pour l'état nul est

$$\psi_0(x)=N_0 e^{-\xi^2/2}H_0(\xi)=\sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}}\,e^{-\alpha x^2/2},$$

et la densité de probabilité associée

$$\psi_0^2(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha x^2}.$$

La courbe représentative de $\psi_0^2(x)$ a la forme en cloche de la courbe de Gauss de répartition des erreurs (fig. 242, *b*). Cette courbe montre qu'une fois déterminé un grand nombre de positions de la particule dans l'état nul de l'oscillateur on la rencontre le plus souvent près de la position d'équilibre ($x=0$). Mais il existe en outre une probabilité finale de trouver la particule

*) Voir la démonstration dans l'Annexe V à la fin du livre.
**) Voir l'Annexe V à la fin du livre.

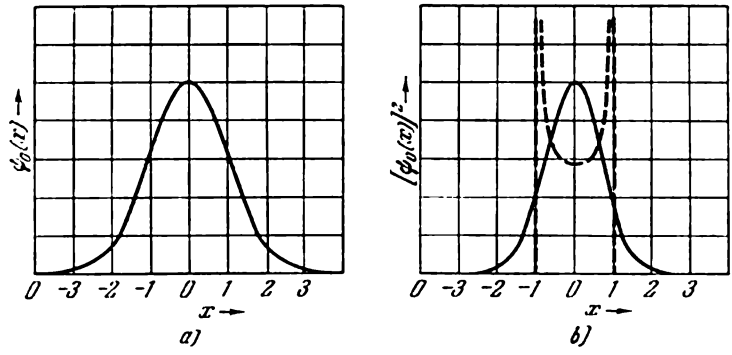


Fig. 242. Fonction propre (*a*) et distribution de la densité de probabilité à l'état nul de l'oscillateur linéaire harmonique (*b*)

non seulement dans les limites du segment égal au double de l'amplitude des vibrations de l'oscillateur classique, mais également dans la zone « interdite » (à droite et à gauche des droites verticales en pointillé) où l'énergie potentielle de la particule est supérieure à l'énergie totale (voir fig. 242).

Il est intéressant de comparer cette courbe avec la courbe correspondante de répartition de la probabilité de trouver la particule macroscopique accomplissant des vibrations harmoniques sur la partie du trajet dx en un certain point de ce trajet. Soit un pendule accomplissant des petites vibrations dont on enregistre cinématographiquement les positions de la bille. Il n'y a aucun doute que dans la majorité des images obtenues on trouvera la bille quelque part près de la position extrême, car en ces points sa vitesse est proche du zéro; le nombre le plus faible d'images correspondra à la position de la bille près de l'état d'équilibre, car alors sa vitesse est maximale. Il est évident que la probabilité de trouver la bille en un point donné est inversement proportionnelle à sa vitesse en ce point ou, ce qui revient au même, est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée de son énergie cinétique, c'est-à-dire à $1/\sqrt{E-U}$ où E est l'énergie totale et U l'énergie potentielle. La courbe correspondante est représentée en pointillé sur la figure 242, *b* : elle diffère sensiblement de la courbe de l'oscillateur quantique.

Etudions maintenant en plus de détails les différents états de l'oscillateur quantique et commençons par l'état nul. La singularité de cet état est que l'énergie de l'oscillateur n'est pas nulle mais est égale à $1/2\,\hbar\omega_0$. Et conformément à cette situation l'oscillateur quantique au zéro absolu ne se trouve pas au repos : on le rencontre avec une certaine probabilité en tout point du segment égal au double de l'amplitude des vibrations de l'oscillateur classique et même au-delà de ce segment. Il n'est pas difficile de constater que ce fait est la conséquence inéluctable des relations d'incertitude. En effet, si la particule liée de façon quasi élastique se trouvait

au repos au zéro absolu, autrement dit, possédait une coordonnée bien déterminée, cela signifirait qu'il existe un état pour lequel la coordonnée de la particule et son impulsion sont déterminées (impulsion nulle). Or cela contredit la relation d'incertitude. D'autre part, et on le montrera, l'énergie nulle $1/2\,\hbar\omega_0$ est justement l'énergie minimale que doit posséder l'oscillateur à l'état nul pour que les relations d'incertitude soient satisfaites.

Exprimons l'incertitude de la position de la particule par l'erreur moyenne quadratique, c'est-à-dire par la racine carrée positive de la fluctuation moyenne quadratique :

$$\overline{\Delta x}=\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}.$$

Mais $\overline{\varepsilon^2}=\overline{x^2}-(\bar{x})^2$ et comme on peut poser, sans restreindre la généralité, $\bar{x}=0$ (cela ne signifie que l'origine des coordonnées doit être placée au point coïncidant avec la position d'équilibre), alors

$$\overline{\Delta x}=\sqrt{\overline{x^2}}.$$

Ainsi donc,

$$\overline{\Delta x}=\sqrt{\overline{x^2}}=\sqrt{a^2\,\overline{\cos^2\omega_0 t}}=\sqrt{\frac{1}{2}a^2}, \tag{159.5}$$

où a est l'amplitude des vibrations de l'oscillateur classique. Il est toutefois facile de voir que puisque $1/2\,ma^2\omega_0^2=E_0$ (voir § 46), alors $a^2=\frac{2E_0}{m\omega_0^2}=\frac{2E_0}{f}$ et, par conséquent,

$$\overline{\Delta x}=\sqrt{\frac{E_0}{f}}. \tag{159.6}$$

Puis de façon analogue on a

$$\overline{\Delta p}=\sqrt{\overline{p^2}}=\sqrt{m^2a^2\omega_0^2\,\overline{\sin^2\omega_0 t}}=\sqrt{\frac{1}{2}m^2a^2\omega_0^2}=\sqrt{mE_0}. \tag{159.7}$$

Ainsi donc,

$$\overline{\Delta x}\,\overline{\Delta p}=E_0\sqrt{\frac{m}{f}}=\frac{E_0}{\omega_0}. \tag{159.8}$$

Mais d'après les relations d'incertitude $\Delta x\,\Delta p\approx\hbar$. La valeur précise de la limite inférieure du produit des erreurs moyennes quadratiques est $\hbar/2$ de sorte que

$$\Delta x\,\Delta p\geqslant\frac{\hbar}{2}. \tag{159.9}$$

En prenant ici le signe d'égalité (c'est-à-dire en prenant la limite inférieure du produit des erreurs) et comparant (159.8) à (159.9) on trouve

$$\frac{E_0}{\omega_0}=\frac{\hbar}{2},\quad E_0=\frac{\hbar\omega_0}{2}.$$

On voit ainsi que l'énergie nulle de l'oscillateur est en fait l'énergie minimale que doit posséder l'oscillateur à l'état nul pour que les relations d'incertitude soient satisfaites.

Il est nécessaire aussi d'expliquer pourquoi la courbe de distribution de la probabilité de position ne donne pas des valeurs égales à zéro pour cette probabilité au-delà des limites de la trajectoire classique de l'oscillateur, c'est-à-dire dans les domaines où l'énergie totale est inférieure à son énergie potentielle. Puisque toutefois le diagramme de potentiel de l'oscillateur est celui d'une « particule dans une boîte » (voir le début du § 158) et les vibrations de la particule peuvent être interprétées comme des « réflexions » sur les parois de cette boîte, l'explication sera identique à celle du cas de la réflexion sur une barrière rectangulaire (§ 153).

Examinons maintenant le cas d'un état excité. Sur la figure 243 on a représenté les variations de la fonction propre pour certaines valeurs de n. Si l'on ajoute le facteur temporel périodique $e^{i\omega t}$, on obtiendra des ondes rappelant des ondes stationnaires. Pour $n=0$ (fig. 243) on a deux nœuds et un maximum (« ventre ») au milieu; il est vrai que les nœuds ne se disposent pas sur les parois de la boîte mais à l'infini. Pour $n=1$ (fig. 243) on a deux nœuds à l'infini et un nœud au milieu du segment correspondant au domaine des vibrations de l'oscillateur classique; pour $n=2$ outre deux nœuds à l'infini on a encore deux nœuds, etc. En examinant les dessins il est facile de voir que près du milieu du segment gras représentant la trajectoire classique la distance entre les nœuds est plus petite, que sur les

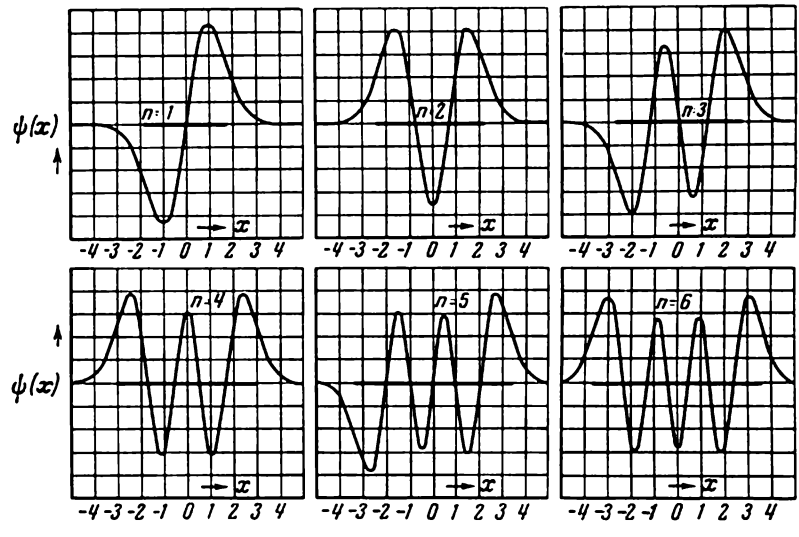


Fig. 243. Fonctions propres de l'oscillateur linéaire harmonique pour $n=1, 2, 3, 4, 5$ (d'après Pauling et Wilson)

bords. Cela correspond à ce que la longueur d'onde de de Broglie $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-U)}}$ près de la position d'équilibre, où U passe par la valeur zéro, doit être minimale.

Sur la figure 244 on a donné des courbes de distribution de la densité de probabilité $|\psi|^2$ pour différents états de l'oscillateur quantique (pour $n=0, 1, 2, 3, 4$) et en même temps on a tracé en pointillé la courbe de l'oscillateur macroscopique (bille du pendule). On voit que pour des nombres

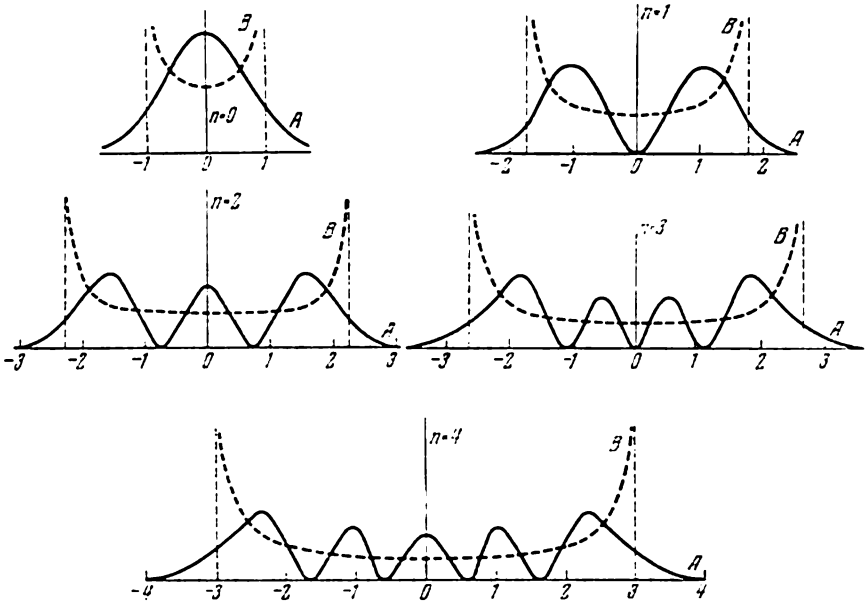


Fig. 244. Distribution de la densité de probabilité pour $n=0, 1, 2, 3, 4$ (d'après Pauling et Wilson)

quantiques n petits l'oscillateur quantique se conduit différemment de l'oscillateur classique. Au contraire, plus n est grand plus la distribution quantique des probabilités se rapproche de la distribution classique. C'est particulièrement évident sur la figure 245 où la distribution est donnée pour $n=10$. Si l'on trace en trait plein la courbe joignant les maximums de la distribution quantique, cette courbe sera presque parallèle à la courbe classique. Quand n continue à augmenter, les maximums se resserrant davantage, les variations de la courbe de probabilité se rapprochent de plus en plus de la courbe classique comme l'exige le principe de correspondance.

Exercices : 1. Calculer l'énergie nulle de l'oscillateur dont la fréquence classique des vibrations est égale à 10^{14} s^{-1}. Exprimer cette énergie en électrons-volts. Dans quelle partie du spectre se trouve la longueur d'onde associée à cette fréquence?

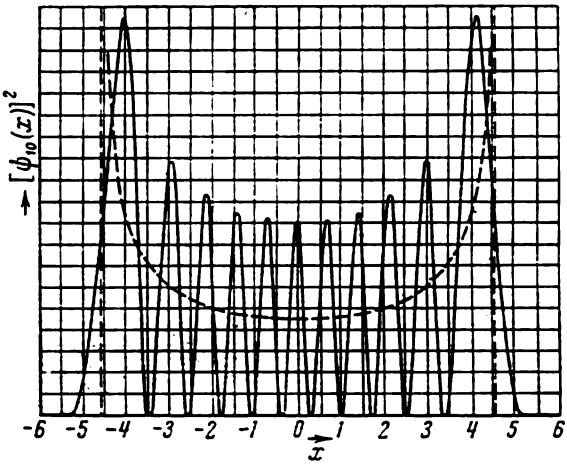


Fig. 245. Distribution de la densité de probabilité pour $n=10$ (d'après Pauling et Wilson)

2. L'oscillateur est constitué d'une particule de masse 1 g et liée à la position d'équilibre par un ressort à $f=10^4$ dyn·cm^{-1}. Calculer l'énergie nulle de cet oscillateur.

3. Calculer le nombre quantique de l'oscillateur de l'exercice précédent si son énergie est égale à kT où $k=1{,}38\cdot10^{-16}$ erg·degré$^{-1}$ est la constante de Boltzmann et $T=300$ °K. Vérifier que pour ce nombre quantique l'énergie de l'oscillateur varie pratiquement continûment (calculer les variations de l'énergie pour $\Delta n=1$).

§ 160. Oscillateurs couplés. Forces de Van der Waals

Au § 159 on a vu que la solution du problème de l'oscillateur linéaire en mécanique quantique aboutit à la conclusion que même au zéro absolu il doit exister une énergie nulle égale à $\hbar\omega_0/2$. Si singulière que soit cette conclusion l'expérience montre que la formule obtenue pour l'énergie de l'oscillateur linéaire

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$

correspond mieux aux faits que la formule antérieure semi-classique $E_n=n\hbar\omega_0$ qu'avait utilisée Planck. Ce fait est confirmé en particulier par l'étude des spectres moléculaires mais ce qui est plus important c'est que l'existence de l'énergie nulle joue un rôle essentiel et inattendu dans l'interprétation de certains phénomènes déjà connus mais inexpliqués. Cela concerne les forces dites de cohésion intermoléculaire auxquelles on faisait appel pour expliquer la tension superficielle, l'adsorption ainsi que d'autres phénomènes moléculaires. Comme ces forces apparaissent déjà dans l'équation d'état des gaz réels de Van der Waals

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

on les a appelées forces de Van der Waals.

Les tentatives de les expliquer dans le cadre de la physique classique furent nombreuses, et, dans tous les cas, leur origine était attribuée aux phénomènes électriques. Puisque l'action des forces de Van der Waals apparaît au cours des interactions entre des atomes ou des molécules neutres, leur apparition ne peut être comprise qu'au cas où on assimile les interactions de ces systèmes neutres à celles des dipôles électriques ou, pour des systèmes plus symétriques, des quadripôles. Les forces d'interaction entre les dipôles décroissent en raison inverse de la quatrième puissance de la distance et les forces d'interaction entre les quadripôles, en raison inverse de la sixième puissance de la distance. Ce fait s'accorde avec le phénomène connu depuis longtemps que les forces d'interaction moléculaires décroissent très rapidement avec la distance (rappelons les rayons de la « sphère d'action » que l'on invoque dans l'explication élémentaire des forces moléculaires).

Néanmoins les tentatives d'explication détaillée, en particulier, quantitative, des interactions moléculaires dans le cadre de la physique classique se sont heurtées à des barrières infranchissables. Tout d'abord complètement incompréhensible était l'apparition d'interactions moléculaires dans des gaz nobles. Les atomes de ces gaz possèdent une grande symétrie électrique et, par conséquent, il est impossible de leur attribuer dans l'état statique un moment dipolaire et même quadripolaire constant. Néanmoins ils se liquifient tous et, par suite, manifestent de façon évidente l'existence de forces moléculaires. Ensuite, des tentatives d'édification de théories quantitatives même pour des substances telles que les composés halogénés HCl, HBr, HI possédant notoirement des moments dipolaires intenses aboutirent à des résultats inacceptables.

Ces difficultés disparaissent si l'on tient compte non seulement des interactions statiques, mais également des interactions résultant des mouvements rapides des électrons dans la molécule.

Soient deux molécules pour lesquelles à *l'état de repos* les charges se distribuent avec une symétrie sphérique, de sorte que les molécules n'interagissent pas entre elles. Si l'on écarte les charges de leur position d'équilibre, les molécules acquièrent un moment dipolaire et l'interaction devient possible. Cet écartement se produit en fait par suite de l'existence, quelles que soient les conditions, de vibrations nulles dont l'énergie est $1/2\,\hbar\omega_0$. Mais l'apparition du moment dipolaire dans l'une des molécules engendre dans l'espace environnant un champ qui induit un moment dipolaire dans l'autre molécule. Ces moments dipolaires qui varient rapidement se trouvent l'un par rapport à l'autre dans une phase entraînant l'attraction. Telle est l'explication qualitative des forces moléculaires. Comme on le voit, elle est inéluctablement liée à l'existence de vibrations nulles dont la nécessité découle des relations d'incertitude.

Montrons maintenant que cette simple image permet de réaliser un calcul quantitatif et de dégager la loi des interactions moléculaires. Pour cela, toutefois, il faut se rappeler comment on résout en mécanique classique

le problème des vibrations de deux oscillateurs en interaction, autrement dit, de deux oscillateurs couplés.

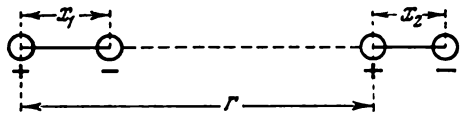


Fig. 246.

Soient deux dipôles électriques alignés distant l'un de l'autre de r (fig. 246). La masse associée à chaque charge est considérée égale à m, la distance entre des charges de noms opposés étant dans le premier dipôle égale à x_1 et dans le second à x_2. L'énergie d'interaction des dipôles est due à l'attraction des charges de noms contraires et à la répulsion des charges de même nom. D'après la loi de Coulomb elle est égale à

$$U_{12}=-\frac{e^2}{r-x_1}-\frac{e^2}{r+x_2}+\frac{e^2}{r+x_2-x_1}+\frac{e^2}{r}=\frac{e^2}{r}\left(-\frac{1}{1-\frac{x_1}{r}}-\frac{1}{1+\frac{x_2}{r}}+\frac{1}{1+\frac{x_2-x_1}{r}}+1\right).$$

Comme r est toujours de beaucoup plus grand que x_1 et x_2, on peut développer les fractions entre parenthèses en séries suivant la formule générale

$$\frac{1}{1+\frac{a}{r}}=\left(1+\frac{a}{r}\right)^{-1}=1-\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}-\ldots$$

Si l'on se limite dans chacun de ces développements aux trois premiers termes, alors après de simples calculs on obtient

$$U_{12}=-\frac{2e^2}{r^3}x_1x_2. \qquad (160.1)$$

C'est bien l'énergie potentielle résultant de l'interaction des dipôles.

Supposons maintenant que les dipôles soient animés de vibrations; pour de faibles élongations, les vibrations seront sinusoïdales. Comme les masses des charges et les forces qui les lient sont les mêmes pour chaque dipôle, en *l'absence de liaison entre les dipôles* (par exemple, si la distance entre les dipôles est très grande) les deux dipôles accompliront des vibrations sinusoïdales simples *avec une même pulsation* ω_0 :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{f}{m}},$$

où f est la constante de la force quasi élastique qui est la même pour les deux dipôles.

Prenons maintenant en considération la liaison existant entre les oscillateurs. L'écartement de la charge, disons dans le premier oscillateur, engendre une force quasi élastique $-fx_1$ et dans le second oscillateur, la force $-fx_2$. Mais par suite de la liaison entre les oscillateurs la variation du moment dipolaire dans le second oscillateur entraîne l'apparition d'une force complémentaire dans le premier et inversement. Ces forces complé-

mentaires F_{12} et F_{21} peuvent être obtenues si l'on connaît l'énergie d'interaction U_{12} et on a :

$$F_{12}=-\frac{\partial U_{12}}{\partial x_1}=\frac{2e^2}{r^3}x_2, \quad F_{21}=-\frac{\partial U_{12}}{\partial x_2}=\frac{2e^2}{r^3}x_1.$$

Introduisant la notation

$$\frac{2e^2}{r^3}=k, \tag{160.1'}$$

on peut écrire les équations du mouvement des deux oscillateurs sous la forme

$$\ddot{x}_1+\omega_0^2x_1-\frac{k}{m}x_2=0, \quad \ddot{x}_2+\omega_0^2x_2-\frac{k}{m}x_1=0, \tag{160.2}$$

où, par exemple, $m\omega_0^2x_1=fx_1$ est la force quasi élastique s'exerçant dans le premier oscillateur.

Posons la question pour quelles conditions les deux oscillateurs couplés accompliront des vibrations sinusoïdales simples. Il est évident que si ces vibrations des oscillateurs seront simples, elles s'effectueront avec une même pulsation. Ainsi, pour répondre à la question posée on cherchera la solution du système d'équations différentielles (160.2) sous la forme

$$x_1=Ae^{i\omega t}, \quad x_2=Be^{i\omega t}.$$

Portons ces solutions dans (160.2) et après simplification par $e^{i\omega t}$ il vient

$$A(\omega_0^2-\omega^2)-\frac{k}{m}B=0, \quad -\frac{k}{m}A+(\omega_0^2-\omega^2)B=0. \tag{160.3}$$

En considérant ce système d'équations algébriques comme des équations aux inconnues A et B on voit que le système (160.3) est linéaire et homogène. Pour que ce système ait des solutions différentes de zéro on doit avoir (voir § 78)

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0.$$

Développant le déterminant on obtient

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2-\left(\frac{k}{m}\right)^2=0 \quad \text{et} \quad \omega^2=\omega_0^2\pm\frac{k}{m}.$$

On en tire les valeurs de la pulsation ω :

$$\omega_+=\sqrt{\omega_0^2-\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_-=\sqrt{\omega_0^2+\frac{k}{m}}. \tag{160.4}$$

Portant ces pulsations de nouveau dans (160.3) on trouve

$$\begin{aligned} &\text{a) pour } \omega=\omega_- \quad A=+B, \\ &\text{b) pour } \omega=\omega_- \quad A=-B=Be^{i\pi}. \end{aligned} \tag{160.4'}$$

On voit ainsi que le système des oscillateurs couplés possède deux pulsations différentes : l'une est un peu inférieure et l'autre un peu supérieure à ω_0. Ces pulsations sont dites *normales ou principales;* c'est avec ces pulsations que les oscillateurs peuvent exécuter des vibrations sinusoïdales simples. En outre pour vibrer avec la pulsation ω_+ les oscillateurs doivent avoir au moment initial des élongations *égales*, en phase ($A=B$, mouvement symétrique) et pour vibrer avec la pulsation ω_- les oscillateurs doivent avoir des élongations égales mais en *opposition de phase* ($A=-B$, mouvement antisymétrique). Les deux cas sont illustrés sur les figures 247 et 248 à l'aide de deux pendules couplés*).

Si les conditions initiales sont différentes de (160.4'), les oscillations du système cesseront d'être simples. Dans le cas général elles peuvent être

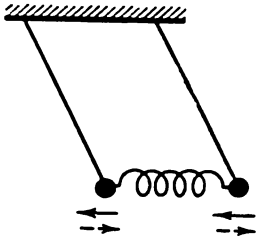


Fig. 247. Mouvements symétriques de pendules couplés

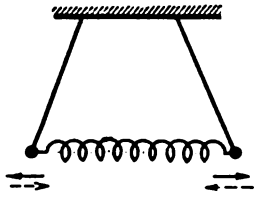


Fig. 248. Mouvements antisymétriques de pendules couplés

représentées comme le résultat d'une superposition d'oscillations de pulsations ω_+ et ω_-. Ecrivons les solutions particulières du système (160.2) sous leur forme réelle. Posant

$$A=ae^{i\delta_1} \quad \text{et} \quad B=be^{i\delta_2},$$

on a

$$x_1=a\cos(\omega_+t+\delta_1), \quad x_2=b\cos(\omega_-t+\delta_2).$$

La solution générale sera la superposition des solutions particulières

$$\begin{aligned} x_1&=a\cos(\omega_+t+\delta_1)+b\cos(\omega_-t+\delta_2),\\ x_2&=a\cos(\omega_+t+\delta_1)-b\cos(\omega_-t+\delta_2). \end{aligned} \tag{160.4''}$$

Définissons maintenant les conditions initiales suivantes : soient au moment $t=0$ une élongation $x_1=\alpha$ et une vitesse $\dot{x}_1=0$ pour le premier oscil-

*) Il faut, toutefois, considérer que pour des pendules couplés l'énergie potentielle s'exprime différemment que pour le cas considéré de deux dipôles en interaction. En particulier, dans le cas des pendules, rien qu'une seule des pulsations (précisément, la plus grande ω_-) diffère de ω_0. Quant à la seconde ω_+, elle ne varie pas, ce qui découle d'ailleurs de ce que $A=B$ pour $\omega=\omega_+$, c'est-à-dire que les pendules oscillent du même côté et le ressort peut être enlevé sans modifier la pulsation.

lateur, tandis que le second oscillateur est en position d'équilibre, c'est-à-dire $x_2=0$ et $\dot{x}_2=0$. Portant ces conditions initiales dans (160.4″) on trouve

$$\alpha=a\cos\delta_1+b\cos\delta_2, \quad 0=a\omega_+\sin\delta_1+b\omega_-\sin\delta_2,$$
$$0=a\cos\delta_1-b\cos\delta_2, \quad 0=a\omega_+\sin\delta_1-b\omega_-\sin\delta_2.$$

La seconde et la quatrième équations donnent

$$\delta_1=\delta_2=0.$$

Portant ces résultats dans la première et la troisième équations on obtient

$$a=b=1/2\alpha.$$

Ainsi donc, les conditions initiales étant données, les vibrations des oscillateurs étudiés s'expriment par les formules :

$$x_1=\frac{A}{2}(\cos\omega_- t+\cos\omega_+ t)=A\cos\frac{\omega_--\omega_+}{2}t\cos\frac{\omega_-+\omega_+}{2}t,$$
$$x_2=\frac{A}{2}(\cos\omega_- t-\cos\omega_+ t)=A\sin\frac{\omega_--\omega_+}{2}t\sin\frac{\omega_-+\omega_+}{2}t.$$

Dans chacune de ces expressions on a un facteur variant lentement [à la pulsation $(\omega_--\omega_+)/2$] constituant l'amplitude modulée et un facteur de phase variant rapidement [à la pulsation $(\omega_-+\omega_+)/2$]. De plus, les vibrations de x_1 et de x_2 sont en quadrature, la différence de phase étant $\pi/2$, de sorte que quand le premier oscillateur vibre avec une amplitude maximale le second se trouve au repos. Peu à peu l'amplitude du premier oscillateur diminue, tandis que celle du second augmente et après un quart de période de modulations les rôles sont intervertis et le processus se poursuit en sens inverse (fig. 249).

Ces « pérégrinations » ou fluctuations de l'énergie s'observent de façon très parlante dans l'expérience connue de deux pendules identiques liés l'un à l'autre.

Calculons maintenant l'énergie totale de nos oscillateurs couplés. L'énergie potentielle de l'oscillateur isolé est égale à $1/2\ m\omega_0^2x^2$, quant

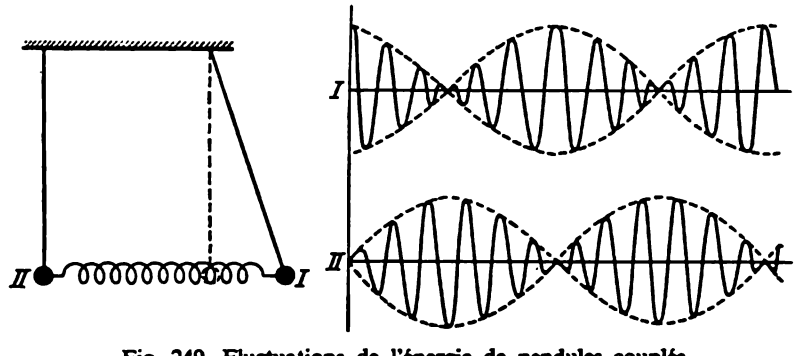


Fig. 249. Fluctuations de l'énergie de pendules couplés

à l'énergie potentielle d'un système d'oscillateurs couplés, comme on l'a vu au début de ce paragraphe, elle comprend en plus de la somme des énergies potentielles des deux oscillateurs le terme $-(2e^2/r^3)x_1x_2$ correspondant à l'énergie de leur interaction.

On a ainsi

$$U=\frac{1}{2}m\omega_0^2x_1^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x_2^2-\frac{2e^2}{r^3}x_1x_2,$$

quant à l'énergie cinétique elle est égale à

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2.$$

Par suite,

$$T+U=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x_1^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x_2^2-\frac{2e^2}{r^3}x_1x_2.$$

Si l'interaction des oscillateurs pouvait être négligée en éliminant le dernier terme, l'énergie totale du système serait égale à la somme des énergies des deux oscillateurs accomplissant des vibrations à la pulsation constante ω_0. Mais cette approximation n'est valable qu'au cas où les oscillateurs se trouvent à une grande distance l'un de l'autre (r grand). Toutefois, on peut représenter l'énergie totale $T+U$ sous une forme telle qu'on puisse l'associer à la somme des énergies des oscillateurs vibrant à des *pulsations modifiées*.

Pour cela introduisons au lieu de x_1 et x_2 de nouvelles coordonnées ξ et η reliées aux précédentes par les relations

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2), \quad \eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2).$$

D'où inversement

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta), \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta)$$

et ensuite

$$\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2=\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2, \quad x_1^2+x_2^2=\xi^2+\eta^2, \quad x_1x_2=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2).$$

Utilisant ces relations transformons l'expression de l'énergie totale :

$$T+U=\frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)+\frac{1}{2}m\omega_0^2(\xi^2+\eta^2)-\frac{e^2}{r^3}(\xi^2-\eta^2)=$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(1-\frac{2e^2}{mr^3\omega_0^2}\right)\xi^2+\frac{1}{2}m\dot{\eta}^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(1+\frac{2e^2}{mr^3\omega_0^2}\right)\eta^2$$

ou en tenant compte de (160.4) et (160.1′)

$$T+U=\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2-\frac{1}{2}m\omega_+^2\xi^2+\frac{1}{2}m\dot{\eta}^2+\frac{1}{2}\omega m_-^2\eta^2. \qquad (160.5)$$

On voit ainsi que transformé de la sorte $T+U$ n'est autre chose que la somme des énergies de deux oscillateurs isolés accomplissant des vibrations avec des pulsations normales déjà trouvées ω_+ et ω_-!

Selon les résultats obtenus au § 158 l'énergie de ces oscillateurs a des valeurs quantifiées :

$$E_{n_+}=\hbar\omega_+\left(n_++\frac{1}{2}\right), \quad E_{n_-}=\hbar\omega_-\left(n_-+\frac{1}{2}\right)$$

et, par suite, l'énergie totale du système sera

$$E_{n_+}+E_{n_-}=\hbar\omega_+\left(n_++\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_-\left(n_-+\frac{1}{2}\right). \tag{160.6}$$

Calculons maintenant les pulsations ω_+ et ω_- avec une approximation suffisante pour nos intentions.

En introduisant au lieu de k son expression tirée de (160.1') on obtient

$$\omega_\pm=\omega_0\left(1-\frac{2e^2}{r^3f}\right)^{1/2}, \quad \omega_-=\omega_0\left(1+\frac{2e^2}{r^3f}\right)^{1/2} \quad (f=m\omega_0^2).$$

Maintenant profitons du développement en série

$$(1+\varepsilon)^{1/2}=1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}+\ldots$$

On obtient

$$\omega_+=\omega_0\left(1-\frac{e^2}{r^3f}-\frac{e^4}{2r^6f^2}\right), \quad \omega_-=\omega_0\left(1+\frac{e^2}{r^3f}-\frac{e^4}{2r^6f^2}\right).$$

Portant ces résultats dans (160.1) on trouve

$$E=E_{n_+}+E_{n_-}=\hbar\omega_0\left[(n_++n_-+1)+\frac{e^2}{r^3f}(n_--n_+)-\frac{e^4}{2r^6f^2}(n_-+n_++1)\right]. \tag{160.7}$$

Au cas où les deux oscillateurs se trouvent dans l'état fondamental, $n_+=n_-=0$ et, de plus, le second terme du crochet s'annule *) et on obtient

$$E=\hbar\omega_0\left(1-\frac{e^4}{2r^6f^2}\right). \tag{160.8}$$

Comme la somme des énergies nulles des deux oscillateurs est égale à $1/2\,\hbar\omega_0+1/2\,\hbar\omega_0=\hbar\omega_0$ on constate que l'énergie totale du système est inférieure à cette somme de la quantité $\frac{e^4\hbar\omega_0}{2f^2r^6}$. La quantité $-\frac{e^4\hbar\omega_0}{2f^2r^6}$ est justement l'énergie de liaison

$$W=-\frac{e^4\hbar\omega_0}{2f^2}\cdot\frac{1}{r^6}=-\frac{C}{r^6}, \tag{160.9}$$

où C est une certaine constante. Le signe moins indique que la liaison est toujours une attraction. La constante C peut être calculée pour différents

*) Ce terme acquiert une grande importance quand l'un des dipôles est dans l'état excité, c'est-à-dire quand n_- ou $n_+\neq 0$. Mais on n'examinera pas ce cas.

atomes d'après les données optiques et les valeurs des constantes universelles e et $\hbar$.

C'est ainsi qu'on peut calculer à l'avance l'énergie des interactions moléculaires. D'autre part, pour mesurer cette énergie on peut utiliser le travail qu'il faut fournir pour rompre la liaison liant l'atome ou la molécule au réseau cristallin solide ou, autrement dit, la chaleur de sublimation. Le tableau donné ci-dessous permet de juger du degré de coïncidence de la valeur de la chaleur de sublimation (réduite au zéro absolu) obtenue par calcul au moyen de la formule (160.9) et celle déterminée par l'expérience.

Substance	Chaleur de sublimation	
	calculée	observée
Ne	0,47	0,58
N_2	1,64	1,86
Ar	2,08	2,03
CH_4	2,42	2,70

En revenant à ce qui a été dit au début du paragraphe on montrera que la possibilité d'expliquer les forces de cohésion de Van der Waals est liée à l'apparition dans la formule de l'énergie de l'oscillateur de cette, si étrange à première vue, énergie nulle égale à $1/2\,\hbar\omega_0$. En effet, si on avait utilisé pour le calcul définitif la formule semi-classique de Planck $E_n=n\hbar\omega_0$, alors de la formule (160.7) disparaîtraient deux unités (dans la première et la dernière parenthèse). Ainsi à l'état fondamental (pour $n_+=n=0$) on obtiendrait pour l'énergie de liaison la valeur zéro. Cela correspond au fait qu'au repos les oscillateurs, d'après la théorie classique, ne peuvent entrer en interaction si, par suite de la distribution des charges, ils ne possèdent pas de moment électrique sensible (atomes des gaz nobles He, Ne Ar!).

Ainsi donc, *l'apparition de forces d'interactions moléculaires à l'état normal est liée à l'existence de l'énergie nulle.*

§ 161. Particule dans une boîte à trois dimensions

Dans les problèmes étudiés la fonction ψ ne dépendait que d'une seule coordonnée. En guise de conclusion on examinera dans ce chapitre un cas simple du problème à trois dimensions.

Soit une boîte à trois dimensions, autrement dit un domaine limité dans toutes les directions où l'énergie potentielle est partout égale à zéro, mais aux frontières duquel elle croît brusquement jusqu'à l'infini et conserve cette valeur dans le reste de l'espace. Supposons que le domaine où l'énergie potentielle est nulle ait la forme d'un parallélépipède d'arêtes l_1, l_2, l_3'. On peut considérer $U(x, y, z)$ comme une somme de trois termes

$$U(x, y, z)=U_x(x)+U_y(y)+U_z(z),$$

tels que

$$\begin{aligned}
&\text{pour } 0 \leqslant x \leqslant l_1 \quad U_x = 0, \quad \text{pour } x \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant l_1 \quad U_x = \infty,\\
&\text{pour } 0 \leqslant y \leqslant l_2 \quad U_y = 0, \quad \text{pour } y \leqslant 0 \text{ et } y \geqslant l_2 \quad U_y = \infty,\\
&\text{pour } 0 \leqslant z \leqslant l_3 \quad U_z = 0, \quad \text{pour } z \leqslant 0 \text{ et } z \geqslant l_3 \quad U_z = \infty.
\end{aligned}$$

On écrira dans ce cas l'équation de Schrödinger en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_x-U_y-U_z)=0. \tag{161.1}$$

C'est une équation différentielle aux dérivées partielles. Le mode de résolution qu'on utilisera ici consiste dans la division de l'équation aux dérivées partielles en trois équations ordinaires. La possibilité de cette division dépend en grande partie du choix rationnel des coordonnées, choix qui est habituellement suggéré par la symétrie du problème. Dans le cas considéré la division se réalise da façon très simple.

Cherchons ψ sous la forme d'un produit de trois fonctions dont chacune ne dépend que d'une seule coordonnée

$$\psi(x, y, z)=X(x)Y(y)Z(z). \tag{161.2}$$

Portant la solution de (161.2) dans l'équation (161.1) et divisant les deux membres par XYZ on obtient

$$\left(\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{2m}{\hbar^2}U_x\right)+\left(\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{2m}{\hbar^2}U_y\right)+\left(\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}-\frac{2m}{\hbar^2}U_z\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}E. \tag{161.3}$$

Le premier couple de termes ne dépend ici que de x, le second, que de y et le troisième, que de z, mais leur somme est égale à une constante. Ce n'est possible qu'au cas où chacune des parenthèses du premier membre est elle-même égale à une constante. Ainsi

$$\begin{gathered}
\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{2m}{\hbar^2}X=C_x,\\
\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{2m}{\hbar^2}Y=C_y, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}-\frac{2m}{\hbar^2}Z=C_z.
\end{gathered} \tag{161.4}$$

On a obtenu trois équations différentielles ordinaires et la division s'est avérée possible. Il est évident que

$$C_x+C_y+C_z=-\frac{2m}{\hbar^2}E.$$

Mais au lieu des constantes C_x, C_y, C_z il est commode d'introduire d'autres : E_x, E_y, E_z en posant, par exemple, $C_x=-\frac{2m}{\hbar^2}E_x$. Alors les équations (161.4) peuvent être récrites sous la forme

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E_x-U_x)X=0, \quad \text{etc.} \tag{161.5}$$

Il est évident que l'équation (161.5) coïncide avec l'équation (156.1) du problème de la particule dans une boîte à une dimension. Les conditions aux limites dans les deux cas sont les mêmes :

$$X(0)=X(l_1)=0. \tag{161.6}$$

Par analogie avec les solutions du § 156 on peut immédiatement écrire les solutions satisfaisant à l'équation (161.5) et aux conditions aux limites (161.6). Après normalisation elles deviennent :

$$X_n=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sin\frac{n_x\pi x}{l_1} \quad (n_x=1, 2, 3, \ldots) \tag{161.7}$$

à la condition que

$$E_{nx}=n_x^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml_1^2}. \tag{161.8}$$

Les deux autres équations du groupe (161.4) ont des solutions analogues :

$$\left.\begin{aligned} Y_n&=\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{n_y\pi y}{l_2},\\ Z_n&=\sqrt{\frac{2}{l_3}}\sin\frac{n_z\pi z}{l_3},\end{aligned}\right\} (n_y, n_z=1, 2, 3, \ldots) \tag{161.9}$$

à la condition que

$$E_{ny}=n_y^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml_2^2}, \quad E_{nz}=n_z^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml_3^2}. \tag{161.8'}$$

Maintenant on peut écrire les solutions de l'équation initiale satisfaisant aux conditions aux limites :

$$\psi_n(x, y, z)=\sqrt{\frac{8}{l_1l_2l_3}}\sin\frac{n_x\pi x}{l_1}\sin\frac{n_y\pi y}{l_2}\sin\frac{n_z\pi z}{l_3}, \tag{161.10}$$

l'énergie ne pouvant prendre que la suite discrète suivante des valeurs :

$$E(n_x, n_y, n_z)=E_{nx}+E_{ny}+E_{nz}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{l_1^2}+\frac{n_y^2}{l_2^2}+\frac{n_z^2}{l_3^2}\right) \tag{161.11}$$

$$(n_x, n_y, n_z)=1, 2, 3, \ldots).$$

Les fonctions propres (161.10) du problème se caractérisent de la façon suivante (voir § 156) : elles représentent des ondes stationnaires possédant n_x+1 plans nodaux parallèles au plan des coordonnées yz, n_y+1 plans nodaux parallèles au plan xz et n_z+1 plans nodaux parallèles à xy.

Les valeurs possibles de l'énergie d'après la formule (161.11) constituent une suite discrète de sorte qu'à chaque groupe de trois valeurs entières de n_x, n_y, n_z est associé un niveau d'énergie déterminé. Ces trois nombres n_x, n_y, n_z sont les *nombres quantiques* du problème.

Pour une représentation parlante des états et des valeurs possibles de l'énergie de la particule dans une boîte il est commode d'utiliser une

image géométrique. Soit un réseau spatial dont la maille élémentaire est un parallélépipède d'arêtes $1/l_1$, $1/l_2$, $1/l_3$ (fig. 250). Le volume de cette maille sera $1/l_1l_2l_3$. Comme chaque état de la particule est caractérisé par l'ensemble des valeurs entières n_x, n_y, n_z on peut représenter tout état par un nœud du réseau dont les coordonnées sont n_x/l_1, n_y/l_2, n_z/l_3. L'énergie associée à cet état sera trouvée au moyen de l'image géométrique de la façon suivante. Soit le vecteur A joignant l'origine des coordonnées au point représentatif de l'état. Le carré de sa longueur sera

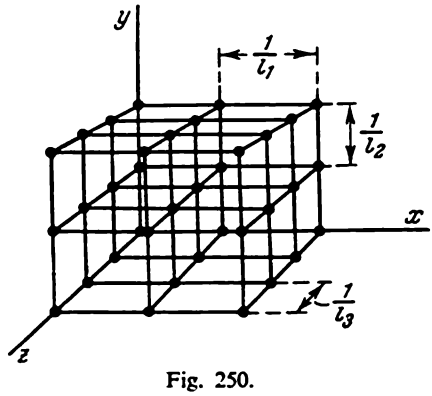


Fig. 250.

$$A^2=n_x^2/l_1^2+n_y^2/l_2^2+n_z^2/l_3^2.$$

L'énergie prendra donc la forme

$$E(n_x, n_y, n_z)=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}A^2.$$

Au moyen de la figure géométrique décrite on peut dégager une particularité très importante de la solution du problème considéré. Si les arêtes de la boîte l_1, l_2, l_3 sont des nombres incommensurables, alors à *chaque état* est associé un point représentatif avec sa valeur de l'énergie. Mais il en serait tout différent si les arêtes forment entre elles des relations rationnelles. Supposons, pour simplifier, qu'une boîte soit en forme de cube de sorte que $l_1=l_2=l_3=l$. Dans ce cas

$$\psi=\sqrt{\frac{8}{l^3}}\sin\frac{n_x\pi x}{l}\sin\frac{n_y\pi y}{l}\sin\frac{n_z\pi z}{l}, \quad E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2).$$

Il est évident que pour chaque groupe des valeurs entières n_x, n_y, n_z on aura une fonction ψ appropriée, mais les valeurs de l'énergie de tous les états, pour lesquels la somme $n_x^2+n_y^2+n_z^2$ est constituée par une même quantité, seront identiques. Ainsi donc, aux différents nœuds du réseau cubique imaginé correspondront toujours des états différents, mais pour certains de ces états l'énergie sera la même.

En qualité d'exemple examinons deux cas particuliers. Soient $n_x=1$, $n_y=1$, $n_z=1$; dans ce cas $n_x^2+n_y^2+n_z^2=3$. Comme il est impossible de trouver trois autres entiers dont la somme des carrés soit égale à trois, à l'état (1, 1, 1) ne correspond qu'une seule valeur de l'énergie. Mais posons que $n_x=1$, $n_y=2$, $n_z=3$. Alors

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=14,$$

et la valeur correspondante de l'énergie aura pour expression

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\cdot 14.$$

A cette valeur de l'énergie correspondent six états différents (voir tableau XXIV).

Tableau XXIV

n_x	n_y	n_z	$n_x^2+n_y^2+n_z^2$
1	2	3	14
1	3	2	
2	3	1	
3	1	2	
2	1	3	
3	2	1	

Il n'est pas difficile de se convaincre qu'au cas d'une boîte cubique la grande majorité des états se caractérisera par la particularité qu'à différents états est associée une même énergie. Ces états sont dits dégénérés et le nombre de niveaux d'énergie coïncidants est appelé « ordre » d'états quantiques. Dans le premier des exemples examinés cet ordre quantique est égal à 1, dans le second il est égal à 6.

Exercices. 1. Chercher la solution du problème des vibrations d'un oscillateur linéaire à trois dimensions (voir § 113). L'énergie potentielle d'un tel oscillateur est exprimée par la somme

$$U=1/2\ f_x x^2+1/2\ f_y y^2+1/2\ f_z z^2,$$

où f_x, f_y, f_z sont des constantes de la force quasi élastique dans les trois axes des coordonnées cartésiennes. En introduisant les pulsations classiques correspondantes $\omega_x=\sqrt{f_x/m}$, etc., on peut représenter l'énergie potentielle sous la forme

$$U=1/2\ m(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2).$$

En portant cette expression de l'énergie potentielle dans l'équation de Schrödinger montrer que les valeurs propres de l'énergie de l'oscillateur sont dans ce cas de la forme :

$$E_{n_x, n_y, n_z}=\hbar[(n_x+1/2)\omega_x+(n_y+1/2)\omega_y+(n_z+1/2)\omega_z],$$

où les entiers n_x, n_y, n_z sont les nombres quantiques du problème considéré, quant aux fonctions propres elles prennent la forme

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}=e^{-\frac{1}{2}(\alpha_x x^2+\alpha_y y^2+\alpha_z z^2)}Hn_x(\sqrt{\alpha_x}\,x)Hn_y(\sqrt{\alpha_y}\,y)Hn_z(\sqrt{\alpha_z}\,z),$$

où

$$\alpha_x=\frac{2\pi m}{\hbar}\omega_x, \quad \text{etc.}$$

Conseil. — Effectuer la division de l'équation de Schrödinger suivant le schéma examiné dans ce paragraphe en utilisant les résultats du § 158 pour l'oscillateur linéaire à une dimension.

2. Vérifier que dans le cas d'un oscillateur linéaire isotrope à trois dimensions les valeurs propres de l'énergie sont :

$$E_n=(n_x+n_y+n_z+3/2)\hbar\omega_0=(n+3/2)\hbar\omega_0 \quad (n=n_x+n_y+n_z).$$

Montrer que tous les niveaux à l'exception du niveau zéro ($n_x=n_y=n_z=0$) sont dégénérés et ont pour ordre quantique $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

I. CALCUL DES VALEURS MOYENNES

Examinons le problème suivant. Supposons qu'on joue à une loterie où à tous les coups on gagne et dont n_1 billets gagnent a_1 francs, n_2 billets gagnent a_2 francs, etc. Cherchons le gain moyen. Soit N le nombre total de billets :

$$n_1+n_2+\ldots+n_k\equiv\sum_{i=1}^{k}n_i=N.$$

Il est évident que le gain moyen $\bar{a}$ s'obtient par application de la « règle de combinaison » :

$$\bar{a}=\frac{a_1n_1+a_2n_2+\ldots+a_kn_k}{n_1+n_2+\ldots+n_k}=a_1\frac{n_1}{N}+a_2\frac{n_2}{N}+\ldots+a_k\frac{n_k}{N}. \tag{I.1}$$

Or les relations n_1/N, n_2/N, ... sont les probabilités du joueur à la loterie de tirer tel ou tel lot *) :

$$w_1=n_1/N, \quad w_2=n_2/N, \quad \ldots, \quad w_k=n_k/N. \tag{I.2}$$

(I.1) peut donc être récrite sous la forme

$$\bar{a}=a_1w_1+a_2w_2+\ldots+a_kw_k\equiv\sum_{i=1}^{k}a_iw_i. \tag{I.3}$$

L'expression du second membre de (I.3), autrement dit la somme des produits des valeurs que peut prendre la quantité a par les probabilités correspondantes, est habituellement appelée dans le calcul des probabilités espérance mathématique.

Dans le cas plus général d'une grandeur x prenant la série des valeurs discrètes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ comprenant également des valeurs négatives et dont les probabilités de tirage sont respectivement égales $w_1, w_2, \ldots, w_k$, l'espérance mathématique est définie comme une *somme algébrique*

$$\bar{x}=x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_kw_k. \tag{I.4}$$

Notons que les probabilités (I.2) sont déterminées de la sorte que la

*) Voir, par exemple, S. Bernstein, *Théorie des probabilités*, M., 1946 (en russe).

somme des probabilités de toutes les valeurs possibles de la quantité a dans (I.3) ou de x dans (I.4) soit égale à l'unité :

$$w_1+w_2+\ldots+w_k=\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{N}=1. \tag{I.5}$$

La signification de cette définition est la suivante : comme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ épuisent toutes les chances de tirer un lot et comme on gagne à tous les coups la somme des probabilités $w_1+w_2+\ldots+w_k$ égale d'après le théorème d'addition des probabilités à la probabilité de tirer un lot *quelconque* est justement la probabilité de l'événement certain. Habituellement la probabilité de l'événement certain est prise égale à l'unité. Si les probabilités de toutes les valeurs possibles satisfont à la condition (I.5), on dit que la probabilité est normée à l'unité.

En physique on a quelquefois affaire à des probabilités qui ne sont pas normées à l'unité. On aurait pu, par exemple, caractériser la probabilité de tirer tel ou tel lot par le nombre de billets associés à ce gain. Alors

$$w'_1=n_1, \quad w'_2=n_2, \quad \ldots, \quad w'_k=n_k.$$

et d'après la formule (I.1)

$$\bar{a}=\frac{a_1w_1+a_2w_2+\ldots+a_kw_k}{w_1+w_2+\ldots+w_k}\equiv\frac{\sum\limits_i a_iw_i}{\sum\limits_i w_i}$$

ou au lieu de (I.4)

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_i x_iw_i}{\sum\limits_i w_i}. \tag{I.6}$$

Les définitions données correspondaient aux grandeurs discrètes (par exemple les différents gains possibles $a_1, a_2, \ldots, a_k$ se différencient d'un nombre fini de francs). En physique par contre on a souvent affaire à des grandeurs variant de façon continue. Dans ce cas la probabilité pour que certaine grandeur prenne une valeur dans l'intervalle étroit x, $x+dx$ est proportionnelle à la grandeur de l'intervalle dx et s'exprime par $w(x)\,dx$. La fonction $w(x)$ appelée fonction de distribution ou *densité de probabilité* a la signification suivante. Construisons la courbe de la fonction $w(x)$ (fig. 251); sur le petit segment x, $x+dx$ la fonction $w(x)$ peut être considérée comme constante et le produit $w(x)\,dx$ représenté par l'aire de la bande hachurée est la probabilité pour que la variable prenne une valeur dans l'intervalle indiqué. Si cette variable varie continûment sur l'intervalle fini de $x=a$ à $x=b$, l'intégrale $\int\limits_a^b w(x)\,dx$ représentée par l'aire limitée par la portion de cour-

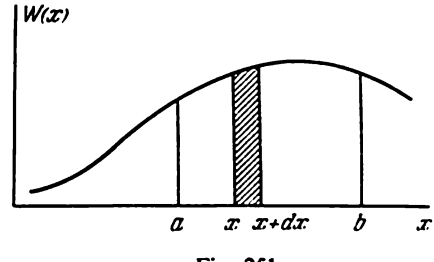


Fig. 251.

be d'ordonnées $x=a$ et $x=b$ est la probabilité pour que la valeur x se trouve quelque part sur l'intervalle fini indiqué (a, b). Au cas où l'intervalle renferme toutes les valeurs possibles de x, l'intégrale $\int_a^b w(x)\,dx$ constitue une probabilité de l'événement certain. Si la fonction $w(x)$ est choisie de sorte que

$$\int_a^b w(x)\,dx=1, \tag{I.7}$$

on dit que la densité de probabilité est normée à l'unité. En particulier, le domaine de variation de x peut être l'intervalle de 0 à ∞ et même de $-\infty$ à $+\infty$. Pour que la condition (I.7) ait dans ce cas un sens, la fonction $w(x)$ doit décroître suffisamment vite avec l'accroissement de x (au moins comme x^{-p} où $p>1$)*).

Pour trouver la valeur moyenne de x tout l'intervalle (a, b) est réparti en des petits segments x_i, x_i+dx. Sur chacun d'eux $w(x)=w(x_i)$ peut être considéré comme constant; $w(x_i)\,dx$ est approximativement égal à la probabilité pour que la variable x prenne une valeur entre x_i et x_i+dx. La limite de la somme $\sum_i x_i w(x_i)\,dx$, égale à l'intégrale $\int_a^b xw(x)\,dx$, est bien dans ce cas l'espérance mathématique ou la valeur moyenne de la grandeur variant continûment**)

$$\bar{x}=\int_a^b xw(x)\,dx. \tag{I.8}$$

Dans ce cas il est supposé que la densité de probabilité soit normée à l'unité, c'est-à-dire qu'on ait l'égalité (I.7). Si $w(x)$ n'est pas normé, alors pour le calcul de $\bar{x}$ il faut utiliser une formule analogue à (I.6) :

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b xw(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}. \tag{I.9}$$

*) Voir, par exemple, V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, Editions Mir, 1970 (traduit du russe).

**) Pour une démonstration rigoureuse on renvoie aux cours de la théorie des probabilités, par exemple à l'ouvrage de B. Gnédenko, *Cours de la théorie des probabilités*, M., 1969 (en russe).

La valeur moyenne du carré $\overline{x^2}$ sera [au cas où $w(x)$ est normé]

$$\overline{x^2}=\int_a^b x^2 w(x)\,dx \tag{I.10}$$

et, en général, la valeur moyenne de toute fonction $f(x)$ est

$$\overline{f(x)}=\int_a^b f(x)w(x)\,dx. \tag{I.11}$$

Examinons un exemple. Soit

$$w(x)=e^{-\lambda x}, \tag{I.12}$$

où x peut prendre toutes les valeurs de 0 à ∞. Vérifions la normalisation de la fonction $w(x)=e^{-\lambda x}$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda},$$

autrement dit la probabilité n'est pas normée. Pour le calcul des valeurs moyennes il faut soit utiliser la formule (I.9), soit normer $w(x)$. Il est évident que dans le cas considéré $\lambda e^{-\lambda x}$ est bien la densité de probabilité normée. La valeur moyenne de x sera

$$\bar{x}=\int_0^\infty x w(x)\,dx=\lambda\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx.$$

Intégrons par parties

$$\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx=\int_0^\infty x d\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)=\left(-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda^2}$$

(la double substitution dans la limite supérieure donne l'indétermination de la forme $\frac{\infty}{\infty}$; en cherchant la limite suivant la règle de l'Hospital on obtient zéro).

Ainsi

$$\bar{x}=\lambda\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}.$$

De façon analogue,

$$\overline{x^2}=\lambda\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty x^2\,d\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)=2\int_0^\infty e^{-\lambda x}x\,dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

La densité de probabilité de la forme $e^{-\lambda x}$ est souvent rencontrée dans ce livre.

II. DISTRIBUTION DE BOLTZMANN DANS LE CAS DE SYSTÈMES QUANTIQUES

Soit un atome ou une molécule dans l'état quantique avec des énergies $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$. Dans la suite l'objet étudié (atome, molécule) sera appelé « système ». Cherchons la probabilité de retrouver le système dans l'état d'énergie E_i. Pour trouver la solution on agira comme on le fait habituellement en statistique : imaginons un grand nombre N de systèmes identiques se trouvant dans les différents états quantiques en équilibre thermique. Supposons qu'à l'état d'énergie E_1 se trouvent N_1 systèmes, à l'état d'énergie E_2, N_2 systèmes, etc. Pour trouver la probabilité d'une telle distribution de systèmes par états déterminons de combien de façons on peut réaliser l'état prescrit, c'est-à-dire l'état caractérisé par les nombres $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots$ pour des systèmes d'énergies $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$. C'est le problème type du calcul des probabilités. Il se résout de la manière suivante. Cherchons d'abord le nombre de façons permettant de choisir de N systèmes N_1 systèmes d'énergie E_1. Ce nombre est égal au nombre de combinaisons de N éléments N_1 à N_1, c'est-à-dire

$$\binom{N}{N_1} = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}.$$

Maintenant cherchons de combien de façons on peut de $N-N_1$ systèmes restants choisir N_2 systèmes dans l'état d'énergie E_2. Ce nombre est égal à

$$\binom{N-N_1}{N_2} = \frac{(N-N_1)!}{N_2!(N-N_1-N_2)!}.$$

Des systèmes restants $N-N_1-N_2$ on peut choisir N_3 systèmes par un nombre de façons égal à

$$\binom{N-N_1-N_2}{N_3} = \frac{(N-N_1-N_2)!}{N_3!(N-N_1-N_2-N_3)!},$$

etc. Il est évident que le nombre de façons permettant de distribuer N systèmes suivant $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_i, \ldots$ groupes est égal au produit de toutes les expressions construites de manière analogue, c'est-à-dire

$$W = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} \frac{(N-N_1)!}{N_2!(N-N_1-N_2)!} \frac{(N-N_1-N_2)!}{N_3!(N-N_1-N_2-N_3)!} \cdots = \\ = \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!\cdots}. \qquad \text{(II.1)}$$

Comme d'autre part le nombre total de systèmes et leur énergie totale doivent être des grandeurs déterminées, on doit avoir deux conditions supplémentaires

$$N_1+N_2+N_3+\ldots+N_i+\ldots=N, \tag{II.2}$$

$$N_1E_1+N_2E_2+N_3E_3+\ldots+N_iE_i+\ldots=E. \tag{II.3}$$

Pour trouver la distribution la plus probable il faut chercher le maximum de l'expression (II.1) satisfaisant aux conditions supplémentaires (II.2) et (II.3). Au lieu de la fonction W prenons son logarithme : il est évident que $\ln W$ atteint son maximum aux mêmes conditions que W.

Cherchons donc le maximum de la fonction

$$\ln W=\ln N!-\sum_i \ln N_i!. \tag{II.4}$$

A des factorielles de grands nombres on peut appliquer la formule de Stirling

$$x!=\sqrt{2\pi x}x^xe^{-x},$$

de sorte que

$$\ln x!=x\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi x).$$

Pour des grandes valeurs de x les deux premiers termes fournissent un résultat suffisamment précis, c'est-à-dire

$$\ln x!=x\ln x-x.$$

Appliquant cette formule au calcul du second membre de (II.4) et tenant compte de (I.2) on obtient

$$\ln W=N\ln N-N-\sum_i N_i\ln N_i+\sum_i N_i= N\ln N-\sum_i N_i\ln N_i. \tag{II.5}$$

Pour obtenir le maximum de $\ln W$ satisfaisant aux conditions (II.2) et (II.3) utilisons la méthode des coefficients indéterminés : multiplions (II.2) par $-\alpha$, (II.3) par $-\beta$, additionnons avec (II.5) et cherchons le maximum absolu de la fonction

$$N\ln N-\sum_i N_i\ln N_i-\alpha\sum_i N_i-\beta\sum_i N_iE_i. \tag{II.6}$$

Suivant la règle bien connue égalons à zéro les dérivées partielles de (II.6) sur $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots$. Cela donne i équations de la forme

$$-\ln N_i-1-\alpha-\beta E_i=0,$$

d'où

$$N_i=e^{-1-\alpha}e^{-\beta E_i},$$

ou, en introduisant la constante $C=e^{-1-\alpha}$,

$$N_i=Ce^{-\beta E_i}.$$

La constante β a la même valeur qu'en statistique classique

$$\beta=\frac{1}{kT}, \tag{II.7}$$

où k est la constante de Boltzmann. Cela résulte du principe de correspondance : pour des grands nombres quantiques toutes les expressions quantiques doivent se transformer en des expressions classiques. Mais comme β selon (II.7) ne dépend pas des nombres quantiques, il doit conserver sa valeur également pour des petits nombres quantiques. Donc

$$N_i=Ce^{-E_i/kT}.$$

C'est bien la formule de Boltzmann. La constante C est facilement trouvée à partir de la condition de normalisation

$$\sum_j N_j=N,$$

ce qui donne

$$N=C\sum_j e^{-E_j/kT},$$

$$C=\frac{N}{\sum_i e^{-E_j/kT}}.$$

Dans les cas où l'état d'énergie E_j est dégénéré, g_j est un multiple, c'est-à-dire qu'il existe g_j états de même énergie, dans l'expression de N_j entre aussi le facteur g_j :

$$N_j=g_jCe^{-E_j/kT}.$$

III. À PROPOS DE LA THÉORIE CLASSIQUE DE L'EFFET ZEEMAN

Montrons qu'avec un lent accroissement du champ magnétique le rayon de l'orbite de l'électron ne varie pas et que seule sa pulsation se modifie. Suivant la seconde équation de Maxwell prise sous forme intégrale (loi généralisée de l'induction électromagnétique) la variation du champ magnétique $\mathcal{H}$ engendre un champ électrique rotationnel $\mathcal{E}$ d'axe dirigé suivant $\mathcal{H}$ avec

$$\oint \mathcal{E}_s ds = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\pi r^2 \frac{d\mathcal{H}}{dt}. \tag{III.1}$$

Si durant le temps que le champ magnétique croît de 0 à $\mathcal{H}$ l'électron arrive à réaliser n révolutions, alors en supposant que $\mathcal{H}$ croît uniformément on a

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\mathcal{H}}{nT}, \tag{III.2}$$

où T est la période de révolution de l'électron. Le travail effectué par le champ sur l'électron au cours d'une révolution est égal à

$$\frac{\Delta W}{n} = e \oint \mathcal{E}_s ds$$

soit, tenant compte de (III.1) et de (III.2),

$$\frac{\Delta W}{n} = \frac{e}{c}\frac{\mathcal{H}}{nT}\pi r^2,$$

de sorte que

$$\Delta W = \frac{e}{c}\frac{\mathcal{H}}{T}\pi r^2 = \frac{e}{c}\mathcal{H} v \pi r^2 = \frac{e}{2c}\mathcal{H}\omega r^2.$$

Ce travail est en premier lieu dépensé à l'accroissement de l'énergie cinétique de l'électron et, en cas de modification du rayon de l'orbite, il sert également à accroître l'énergie potentielle. Donc

$$\frac{e}{2c}\mathcal{H}\omega r^2 = \Delta E_{\text{cin}} + \Delta E_{\text{pot}}. \tag{III.3}$$

Mais

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2, \quad \Delta E_{\text{cin}} = m(r^2\omega\,\Delta\omega + \omega^2 r\,\Delta r), \tag{III.4}$$

$$E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{r}, \quad \Delta E_{\text{pot}} = \frac{e^2}{r^2}\Delta r$$

ou, en tenant compte de l'égalité entre la force d'attraction e^2/r^2 et la force centrifuge d'inertie $mr\omega^2$, il vient

$$\Delta E_{\text{pot}} = mr\omega^2 \Delta r. \tag{III.5}$$

Portant (III.4) et (III.5) dans (III.3) on trouve

$$\frac{e}{2c} \mathcal{H} \omega r^2 = m(r^2 \omega \, \Delta\omega + 2\omega^2 r \, \Delta r).$$

Divisant les deux membres par $mr^2\omega^2$ on obtient

$$\frac{e}{2mc} \frac{\mathcal{H}}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} + 2\frac{\Delta r}{r}. \tag{III.6}$$

Puis, considérant que pour une transformation de l'état infiniment lente (adiabatique) à chaque moment on a une égalité entre les forces agissant sur l'électron (c'est-à-dire la force d'attraction de Coulomb et la force de Lorentz) et la force centrifuge d'inertie, on obtient pour un état stabilisé

$$m(r+\Delta r)(\omega+\Delta\omega)^2 = \frac{e^2}{(r+\Delta r)^2} + \frac{e}{c} \mathcal{H} r\omega$$

ou après multiplication par $(r+\Delta r)^2$

$$m(r+\Delta r)^3(\omega+\Delta\omega)^2 = e^2 + \frac{e}{c} \mathcal{H} r^3 \omega$$

[on négligera les termes contenant $r\,\Delta r$ et $(\Delta r)^2$]. De là par des transformations simples on obtient

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{3}{2}\frac{\Delta r}{r} = \frac{e}{2mc} \frac{\mathcal{H}}{\omega}. \tag{III.7}$$

Rapprochant (III.6) et (III.7) on trouve

$$\Delta r = 0$$

et puis

$$\Delta\omega = \frac{e}{2mc} \mathcal{H},$$

ce qu'il fallait démontrer.

IV. FORMULE DE LA FLUCTUATION QUADRATIQUE MOYENNE

1. La formule de la fluctuation quadratique moyenne

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(\Delta n)^2} = \bar{n}$$

se rencontre dans ce livre si souvent qu'il est rationnelle de montrer comment elle a été déduite.

Examinons le problème suivant de la théorie cinétique des gaz : dans un certain volume V se trouvent N molécules; quelle est la probabilité de trouver n molécules dans la partie v de ce volume? La probabilité pour qu'une molécule se trouve dans le volume v est v/V (voir § 116); la probabilité pour que n molécules *déterminées* se groupent dans le volume v est $(v/V)^n$ et la probabilité pour que $N-n$ molécules soient dans le volume $V-v$ est $\left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}$. Enfin la probabilité pour que n molécules se trouvent dans le volume v et les molécules restantes $(N-n)$ dans le volume $V-v$ est

$$\left(\frac{v}{V}\right)^n \cdot \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \tag{IV.1}$$

Cette formule, comme il a été souligné plus haut, donne la probabilité pour que des molécules *bien déterminées* au nombre de n se trouvent dans le volume v; on peut, par exemple, imaginer que toutes les N molécules sont numérotées et que n de ces molécules de numéros donnés se trouvent dans le volume v. Il est, toutefois, indifférent quelles molécules se trouvent dans le volume v; ce qui importe, c'est que leur nombre soit n. Mais de la distribution considérée de N molécules dans les volumes v et $V-v$ on peut de même déduire

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{IV.2}$$

distributions différentes pour lesquelles, toutefois, on trouvera toujours n molécules dans le volume v et $N-n$ molécules dans le volume $V-v$. En effet, avec N objets on peut effectuer $N!$ permutations, mais ces permutations ne donneront pas toutes des distributions différentes. Il y en a $n!$ permutations de molécules dans le volume v et $(N-n)!$ permutations de molécules dans le volume $V-v$ qui donneront une même distribution. Ainsi donc, du nombre total de $N!$ permutations il faut soustraire $n!(N-n)!$ permu-

tations, qui ne modifient pas la distribution des molécules et, par suite, le nombre de permutations donnant des distributions *différentes* sera exprimé par la formule (IV.2).

Ainsi il existe en tout $\frac{N!}{n!(N-n)!}$ distributions alternatives pour lesquelles n molécules se trouvent dans le volume v et $N-n$ dans le volume $V-v$. La probabilité de chacune de ces distributions est exprimée par la formule (IV.1) et, par suite, d'après le théorème d'addition des probabilités la probabilité pour que n molécules *quelconques* se trouvent dans le volume v est

$$w_n=\frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{v}{V}\right)^n\left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \qquad \text{(IV.3)}$$

Si, en particulier, il faut trouver la probabilité pour que *toutes* les N molécules se groupent dans la partie v du volume V, alors dans ce cas $n=N$ et la formule (IV.3) donne

$$w_n=\frac{N!}{N!0!}\left(\frac{v}{V}\right)^N=\left(\frac{v}{V}\right)^N,$$

autrement dit on obtient de nouveau la formule donnée dans le texte à la page 344. Il est évident que pour une distribution uniforme de N molécules dans le volume V on trouvera Nv/V molécules dans le volume v. Utilisant la formule (IV.3) on peut montrer que cette distribution est la plus probable. Mais la formule (IV.3) donne la probabilité pour que dans le volume v on trouve un nombre quelconque de molécules ($\leqslant N$), c'est-à-dire la probabilité d'états s'écartant de façon quelconque du plus probable. La somme des probabilités (IV.3) sur tous les n de 0 à N donne la probabilité pour que dans le volume v se trouve un *certain* nombre de molécules entre 0 et N. Cet événement est une certitude et $\sum_{n=0}^{N} w_n$ doit donc être égale à l'unité si la probabilité (IV.3) est normée à l'unité. C'est bien ce qui se produit en réalité. En effet, le second membre de (IV.3) est le terme général du binôme $\left(\frac{V-v}{V}+\frac{v}{V}\right)^N$, et c'est pourquoi

$$\sum_{n=0}^{N} w_n=\left(\frac{V-v}{v}+\frac{v}{V}\right)^N=1^N=1.$$

Connaissant la probabilité w_n on peut trouver le nombre moyen de molécules dans le volume v :

$$\bar{n}=\sum_{n=0}^{N} n w_n. \qquad \text{(IV.4)}$$

Notant dans (IV.4) $\frac{v}{V}$ par p écrivons (IV.4) sous une forme explicite :

$$\bar{n}=\sum_{n=0}^{N} n\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}=$$
$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(n-1)!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}=Np\sum_{n=0}^{N}\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}p^{n-1}(1-p)^{N-n}.$$

Introduisant les notations

$$n-1=n', \quad N-1=N'$$

et remarquant que

$$N'-n'=[(N-1)-(n-1)]=N-n,$$

on obtient

$$\bar{n}=Np\sum_{n'=0}^{N'}\frac{N'!}{n'!(N'-n')!}p^{n'}(1-p)^{N'-n'}.$$

Mais d'après la formule du binôme la somme est égale à $(p+1-p)^{N'}$, c'est-à-dire de nouveau est égale à l'unité. Ainsi donc,

$$\bar{n}=Np=N\frac{v}{V}. \tag{IV.5}$$

Cela signifie que le nombre moyen de molécules dans le volume v est égal au nombre de molécules se répartissant dans ce volume pour une distribution uniforme dans tout le volume V, comme il fallait s'y attendre.

Calculons maintenant la valeur moyenne du carré de n, c'est-à-dire $\overline{n^2}$:

$$\overline{n^2}=\sum_{n=0}^{N}n^2w_n.$$

Remplaçant n^2 par $n(n-1)+n$ écrivons

$$\overline{n^2}=\sum_{n=0}^{N}[n(n-1)+n]w_n=\sum_{n=0}^{N}nw_n+\sum_{n=0}^{N}n(n-1)w_n=$$

$$=\bar{n}+\sum n(n-1)\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}=$$

$$=\bar{n}+\sum\frac{N!}{(n-2)!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}=$$

$$=\bar{n}+N(N-1)p^2\sum\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}p^{n-2}(1-p)^{N-n}.$$

Dans la somme on pose

$$N-2=N'', \quad n-2=n''$$

et on remarque que

$$N''-n''=[(N-2)-(n-2)]=N-n.$$

Ayant effectué le remplacement indiqué on voit immédiatement que d'après la formule du binôme la somme est de nouveau égale à $(p+1-p)^{N''}$, c'est-à-dire à l'unité, de sorte que

$$\overline{n^2}=\bar{n}+N(N-1)p^2=\bar{n}+(Np)^2-Np^2=\bar{n}+\bar{n}^2-\bar{n}p=\bar{n}^2+\bar{n}(1-p). \tag{IV.6}$$

Selon la définition de la fluctuation quadratique

$$\overline{(\Delta n)^2}=\overline{(n_k-\bar{n})^2}.$$

Elevant au carré et prenant la moyenne on trouve

$$\overline{(\Delta n)^2}=\overline{n_k^2}-2\bar{n}_k\bar{n}+\bar{n}^2=\overline{n^2}-\bar{n}^2. \tag{IV.7}$$

Portant de (IV. 6) l'expression de $\bar{n}^2$ il vient

$$\overline{n^2}-\bar{n}^2=\bar{n}-\bar{n}p,$$

de sorte que

$$\overline{(\Delta n)^2}=\bar{n}-\bar{n}p. \tag{IV.8}$$

Si v est une petite fraction du volume V, alors $p=v/V$ est un petit nombre. Dans ce cas le second terme de (IV. 8) peut être négligé et on trouve la formule cherchée

$$\overline{(\Delta n)^2}=\bar{n}. \tag{IV.9}$$

Il va de soi que cette formule est applicable non seulement aux fluctuations du nombre de molécules gazeuses, mais également à toutes les fluctuations. Sa signification a été donnée dans le texte à la page 346.

2. La formule (116.5) de la fluctuation quadratique de l'énergie (voir p. 346)

$$\overline{\varepsilon^2}=kT^2\frac{d\bar{E}}{dT} \tag{116.5}$$

se déduit de la façon suivante. On a tout d'abord d'après (IV.7)

$$\overline{\varepsilon^2}=\overline{E^2}-\bar{E}^2. \tag{IV.10}$$

Pour le calcul de la valeur moyenne $\bar{E}$ profitons de la distribution canonique de Gibbs*)

$$\bar{E}=\frac{\int E(p,q)e^{-E(p,q)/kT}\,d\tau}{\int e^{-E(p,q)/kT}\,d\tau}, \tag{IV.11}$$

où $d\tau$ est un élément du volume de l'espace *de phase*. Dérivant (IV.11) en T il vient

$$\frac{d\bar{E}}{dT}=\frac{\frac{1}{kT^2}\int E^2e^{-E/kT}\,d\tau\int e^{-E/kT}\,d\tau-\frac{1}{kT^2}\left[\int Ee^{-E/kT}\,d\tau\right]^2}{\left[\int e^{-E/kT}\,d\tau\right]^2}=$$

$$=\frac{1}{kT^2}\frac{\int E^2e^{-E/kT}\,d\tau}{\int e^{-E/kT}\,d\tau}-\frac{1}{kT^2}\left\{\frac{\int Ee^{-E/kT}\,d\tau}{\int e^{-E/kT}\,d\tau}\right\}^2. \tag{IV.12}$$

*) Voir, par exemple, L. Landau et E. Lifchitz, *Physique théorique*, t. 5, *Physique statistique*, Editions Mir, 1967 (traduit du russe).

Considérant que

$$\frac{\int E^2 e^{-E/kT}\, d\tau}{\int e^{-E/kT} d\tau} = \overline{E^2},$$

on voit que (IV.12) donne

$$kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT} = \overline{E^2} - \bar{E}^2,$$

et, par suite, d'après (IV.10)

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT},$$

ce qu'il fallait démontrer.

V. ORTHOGONALITÉ ET NORMALISATION DES FONCTIONS PROPRES DE L'OSCILLATEUR

Les fonctions propres de l'équation de Schrödinger d'un oscillateur linéaire possèdent la propriété d'orthogonalité sur l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx=0, \qquad m\neq n$$

(comme ψ_n est une fonction réelle de x, alors $\psi_n^*=\psi_n$).

On peut s'en convaincre le plus simplement de la façon suivante. Ecrivons l'équation de Schrödinger pour un oscillateur sous la forme

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+(\lambda-\alpha^2x^2)\psi=0. \tag{158.4}$$

Les valeurs propres du paramètre λ correspondant aux fonctions propres ψ_n sont $\lambda_n=2n+1$. On a ainsi

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2}+(2n+1-\alpha^2x^2)\psi_n=0,$$

$$\frac{d^2\psi_m}{dx^2}+(2m+1-\alpha^2x^2)\psi_m=0.$$

Multipliant la première de ces équations par ψ_m et la seconde par ψ_n puis soustrayant membre à membre et intégrant de $-\infty$ à $+\infty$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\psi_m\frac{d^2\psi_n}{dx^2}-\psi_n\frac{d^2\psi_m}{dx^2}\right)dx=2(m-n)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n\psi_m\,dx.$$

Le premier membre de cette égalité peut être représenté sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left(\psi_m\frac{d\psi_n}{dx}-\psi_n\frac{d\psi_m}{dx}\right)dx=\Big|_{-\infty}^{+\infty}\left(\psi_m\frac{d\psi_n}{dx}-\psi_n\frac{d\psi_m}{dx}\right).$$

Considérant que les fonctions propres tendent vers zéro pour $|x|\to\infty$, car

$$\psi_n=C_ne^{-\alpha x^2/2}H_n(\sqrt{\alpha}x),$$

on constate que la substitution conduit à l'annulation aussi bien pour la limite supérieure qu'inférieure. De sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx=0, \quad m\neq n.$$

Pour $m=n$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2\,dx$$

est égale à un nombre fini (par suite de l'intégrabilité quadratique de la fonction ψ_n) et ceci peut être utilisé pour la recherche du facteur de normalisation C_n. Notons que C_n est, en général, un nombre complexe

$$C_n=|C_n|e^{-i\delta}.$$

Mais puisqu'on ne s'intéresse qu'au carré du *module* $|\psi_n|^2$, il suffit de trouver le module $|C_n|$; le facteur de phase reste indéterminé. Notant pour abréger $|C_n|$ par N_n on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2\,dx=\frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}H_n^2(\xi)\,d(\xi)$$

$$(\xi=\sqrt{\alpha}x).$$

Remplaçons l'un des facteurs dans $H_n^2(\xi)$ par son expression tirée de (159.2)

$$H_n=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}; \qquad (159.2')$$

représentons l'intégrale sous la forme

$$(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^n(e^{-\xi^2})}{d\xi^n}H_n(\xi)\,d(\xi).$$

Intégrons par parties posant

$$dv=\frac{d^n(e^{-\xi^2})}{d\xi^n}d\xi, \quad u=H_n(\xi).$$

de sorte que

$$v=\frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}},$$

$$du=\frac{dH_n(\xi)}{d\xi}d\xi;$$

on obtient

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n(e^{-\xi^2})}{d\xi^n} H_n(\xi)\, d\xi = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} H_n(\xi)\right] + \\ + (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} \frac{dH(\xi)}{d\xi}\, d\xi.$$

Tenant compte de ce que $e^{-\xi^2}$ et toutes ses dérivées s'annulent pour $\xi = \pm\infty$ on voit que le premier terme étant le produit du polynôme par $e^{-\xi^2}$ est égal à zéro. Si on reprend cette intégration par parties n fois en posant chaque fois

$$dv = \frac{d^k e^{-\xi^2}}{d\xi^k}\, d\xi$$

et

$$u = \frac{d^k H_n(\xi)}{d\xi^k}$$

et notant que uv s'annule chaque fois à la limite on obtient en fin de compte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n}\, d\xi.$$

Comme $H_n(\xi)$ est un polynôme de n-ième degré, c'est-à-dire

$$H_n(\xi) = 2^n \xi^n + \ldots,$$

alors

$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!$$

On obtient ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)\, d\xi = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2\, dx = \frac{N_n}{\sqrt{\alpha}} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Les conditions de normalisation donnent

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2\, dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}} 2^n n! \sqrt{\pi},$$

d'où

$$N_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

VI. THÉORÈME DU VIRIEL

En conclusion de son premier livre sur la structure de l'atome Bohr a formulé le théorème suivant : « *Dans tout système au repos, constitué de noyaux et d'électrons gravitant sur des orbites circulaires à des vitesses petites par rapport à celle de la lumière, l'énergie cinétique est égale au signe près à la moitié de l'énergie potentielle* »*). Ce théorème selon Bohr est « facilement démontrable », *toutefois il n'en a pas donné la démonstration.* On dégagera le théorème de Bohr du théorème général appelé *théorème du viriel.* La particularité de ce théorème réside dans ce qu'il possède une valeur statistique et qu'il s'applique, précisément, aux valeurs moyennes.

On utilisera pour un système de points matériels des coordonnées cartésiennes, mais on notera les coordonnées par $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots$, et les impulsions associées par $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, de plus $p_i = m_i\dot{q}_i = m_i v_i$. Les équations du mouvement des points sont $\dot{p}_i = F_i$, où F_i sont les forces agissant sur les points. Prenons la quantité

$$G = \sum_i p_i q_i \tag{VI.1}$$

et cherchons sa dérivée totale par rapport au temps

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{q}_i p_i + \sum_i \dot{p}_i q_i. \tag{VI.2}$$

Transformons le premier terme du second membre

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_i \dot{q}_i m_i \dot{q}_i \equiv \sum_i m_i \dot{q}_i^2 \equiv \sum_i m_i v_i^2 = 2T \text{ **)}; \tag{VI.3}$$

écrivons le second terme sous la forme

$$\sum_i \dot{p}_i q_i = \sum_i F_i q_i \tag{VI.4}$$

(on a utilisé l'égalité $\dot{p}_i = F_i$). On peut maintenant récrire (VI.2) sous la forme

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i q_i\right) = 2T + \sum_i F_i q_i. \tag{VI.5}$$

*) N. Bohr, *Œuvres scientifiques choisies*, M., 1970 (en russe).

**) On conserve les notations utilisées dans le texte [voir, par exemple, la formule (59.9)].

Cherchons maintenant la valeur moyenne durant l'intervalle t_2-t_1. Il vient

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{dG}{dt}\,dt\equiv\overline{\frac{dG}{dt}}=2\bar{T}+\sum_i\overline{F_iq_i}.$$

Cela peut être écrit de façon plus détaillée

$$\frac{1}{t_2-t_1}\left\{\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_2}-\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_1}\right\}=2\bar{T}+\sum_i\overline{F_iq_i}. \tag{VI.6}$$

Si le mouvement n'est pas périodique et les coordonnées comme les vitesses de tous les points sont des grandeurs finies, alors en choisissant pour l'établissement de la moyenne un intervalle de temps (t_2-t_1) suffisamment grand, on rendra le premier membre de (VI.6) aussi proche que l'on veut de zéro. Au cas où le mouvement est périodique on peut prendre (t_2-t_1) égal à la période de ce mouvement ou à un multiple de cette période et, dans ce cas, le premier membre de (VI.6) sera nécessairement égal à zéro. Dans les deux cas (VI.6) donne

$$\bar{T}=-\frac{1}{2}\sum\overline{F_iq_i}. \tag{VI.7}$$

Le second membre de (VI.7) est appelé le *viriel de Clausius* et l'égalité (VI.7) est le *théorème du viriel* sous sa forme générale*).

Supposons maintenant que les forces F_i ont un potentiel U; alors

$$F_i=-\frac{\partial U}{\partial q_i}\equiv-\operatorname{grad}U$$

et le théorème du viriel (VI.7) prend la forme

$$T=\frac{1}{2}\sum_i\overline{\operatorname{grad}U\cdot q_i}. \tag{VI.8}$$

Pour un point isolé en mouvement sous l'action d'une force centrale on a

$$T=\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial U}{\partial q}q}. \tag{VI.9}$$

*) Sous sa forme générale le théorème du viriel a des applications nombreuses surtout dans la théorie cinétique des gaz. Ainsi, par exemple, on peut facilement dégager la relation

$$PV=NkT+\frac{1}{3}\sum\sum rf(r);$$

P est la pression, V le volume du gaz, T la température absolue. Le second terme dans le deuxième membre exprime les forces intérieures d'interaction entre les molécules. Dans le cas d'un gaz suffisamment raréfié on peut négliger le second terme et on a l'équation d'état d'un gaz parfait. Si l'on tient compte du second terme, on obtient en première approximation la formule de Van der Waals.

Si on exprime le potentiel sous forme d'une fonction de puissances, par exemple, $U=aq^{n+1}$, la force sera $F=-\frac{\partial U}{\partial q}=-(n+1)\,aq^n$; puis d'après (VI.9)

$$\overline{T}=\frac{1}{2}\,\overline{\frac{\partial U}{\partial q^n}\cdot q}=-\frac{n+1}{2}\,\overline{aq^{n+1}}=-\frac{n+1}{2}\,\overline{U}. \tag{VI.10}$$

Au cas d'un champ coulombien $n=-2$. Portant dans (VI.10) on trouve

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\,\overline{U}. \tag{VI.11}$$

Pour des orbites circulaires $\overline{T}=T$ et $\overline{U}=U$, de sorte que

$$T=-\frac{1}{2}\,U. \tag{VI.12}$$

Or, c'est bien le théorème de Bohr formulé au début*).

*) Voir également A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, Vieweg, Braunschweig, 1949. La mention $v \ll c$ est essentielle, car en mécanique relativiste la relation (VI.11) n'a pas lieu, vu que la formule (VI.3) n'est plus juste.

INDEX

Absorption négative 299, 301
— par résonance 382, 383
ASTON, spectrographe de masse d' 48, 56, 57
Atome 38
—, modèle 92, 135
—, — planétaire 230
—, rayon 86

BAINBRIDGE, spectrographe de masse de 53, 54
— et JORDAN, spectrographe de masse de 59, 60
BALMER, série de 306, 309
—, formule de 317, 338
Barrière de potentiel 460, 468
— —, réflexion 462
— —, traversée 462
— — à trois dimensions 507
BIBERMAN, SOUCHKINE et FABRIQUANT, expérience de 441, 447
BOHR, postulats quantiques de 274, 275
BOHR-SOMMERFELD, conditions quantiques de 330, 412
Boîte de potentiel 476, 507
BOLTZMANN, distribution dans le cas de systèmes quantiques 296, 516
—, formule de 518
BOTHE et GEIGER, expérience de 378, 379
BRACKETT, série de 310
BRAGG-WULFF, formule de 117, 419

« Catastrophe ultraviolette » 266
Centre de masse (d'inertie) 147
CHADWICK, expérience de 98
Chaleur de sublimation 507
Champ de forces centrales 160, 166, 173
Charge du noyau 97
Classification périodique des éléments d'après MENDELEÏEV 39, 43, 44
Coefficient d'atténuation 104
— de diffusion thermique 68
— de réflexion 463
— de transparence 463
Coefficients atomiques 104, 107
— de diffusion 104
COLLINS et RAYLING, expérience de 245
Collisions 143
— élastiques 278
— inélastiques 280
COMPTON, effet 366, 369
— et SIMON, expérience de 379
Coordonnées cycliques 182
— généralisées 170
— normales 261
Corps noir 255
— —, lois de rayonnement 255
— —, modèles 257, 258

DAVISSON et GERMER, expérience de 418, 424
de BROGLIE, confirmation expérimentale de l'hypothèse de 416
—, hypothèse de 412
DEBYE-SCHERRER, méthode de 426
Décomposition (développement) spectrale 154, 227
Dégénérescence 331, 511
DEMPSTER, spectromètre de masse de 56
Densité spectrale de rayonnement 253
Déplacement gravitationnel vers le rouge 389
DESCARTES-SNELLIUS, loi de 405
Deutérium 79
Diagramme de MOSELEY 125
Diagrammes de potentiel 139

Différence de potentiel de contact 485
Diffraction des atomes 430
— des électrons, MÉTHODE DE BRAGG 419
— —, — de DEBYE-SCHERRER 426
— —, — de LAUE 424
— des rayons X 108
Diffusion des électrons 87
— de particules α 91, 92, 166
— des rayons X 103, 107
Dispersion 345, 403, 408, 415
—, loi de 395
DOPPLER, effet 409
—, — du second ordre 386
Dualité onde-corpuscule 404, 409, 411

Eau lourde 79
Effet COMPTON 366, 369
— DOPPLER 409
— MÖSSBAUER 381, 386
— photoélectrique 348
— —, limite rouge 350, 351
— tunnel 472
— ZEEMAN 234, 237, 336, 519
EICHENWALD, analyse d'une réflexion totale d' 467
EINSTEIN, coefficients d' 298, 299
— formule d' 204
—, relation d' 350
—, théorème de composition des vitesses d' 198
—, théorie de l'émission d' 294, 295
—, vérification expérimentale de la formule d' 207
Electron dans un champ électrostatique longitudinal 21
—, charge 10, 130
—, découverte 9
—, détermination de la charge spécifique (massique) 22, 24, 26, 133, 324
—, diffraction 419, 424, 427
—, diffusion par des atomes 87
—, équation de l'orbite 164
—, mouvement dans des champs électrique et magnétique 16
— dans un puits de potentiel 481
— de recul 373, 374
—, relation entre la masse et la vitesse 32, 206
Electron-volt 22
Emission forcée 294
— induite 298
— —, cohérence 304
— spontanée 291
Energie 201
— cinétique 136, 159
—, équipartition suivant les degrés de liberté 259
—, loi de conservation 135
— nulle de l'oscillateur 491, 507
— de l'oscillateur 151
— au repos 203
—, schéma des niveaux 285, 325
Equation de HAMILTON 178
— de LAGRANGE 170, 173
— d'onde 395
— de SCHRÖDINGER 454
Equations canoniques 178
Etat hors d'équilibre 301
— stationnaire 480
— du système 170

FABRIQUANT, BIBERMAN et SOUCHKINE, expérience de 441, 447
Facteur de séparation 62, 65, 69, 76, 78
Filtres de vitesses 29-31
Fluctuation quadratique moyenne 345, 521
Fluctuations du champ de radiation 343
— de l'énergie 504
— du flux lumineux 359
Focalisation des faisceaux de particules chargées 27, 28, 29
Fonctions propres 476
— —, normalisation 461, 494, 526
— —, orthogonalité 478, 494, 526, 527
Force du frottement de rayonnement 218, 219
Forces centrales 159
— de VAN DER WAALS 499
FOURIER, intégrale de 221
—, série de 155
FRANC ET HERTZ, expériences de 275, 278, 282
Fréquences propres 476
Frottement de rayonnement 218

GALILÉE, transformations de 192
Générateurs optiques quantiques 302

HAMILTON, fonction de 179, 191
HERMITE-TCHÉBYCHEV, polynômes de 492
HERTZ, méthode de détermination des potentiels d'ionisation 286

HUGHES, ROJANSKI et MACMILLAN, méthode de 284
Hydrogène, isotope lourd 322

Images d'électrons 427
Impulsion généralisée 176
Intégrale de FOURIER 221
Interférence des faisceaux d'électrons 417
— — — suivant la méthode de BRAGG 419
— — — — — de DEBYE-SCHERRER 426
IOFFÉ et DOBRONRAVOV, expérience de 357
Ionisation, potentiel 286
—, premier potentiel 287
Isobares 40
Isotope lourd de l'hydrogène 322
Isotopes 39, 60, 80, 81
—, séparation par centrifugation 77
—, — convection 69
—, — diffusion 61
—, — — thermique 67
—, — distillation fractionnée 75
—, — électromagnétique 72
—, — des réactions d'échange 75

JEANS-RAYLEIGH, formule de 261, 265, 297, 347
JORDAN et BAINBRIDGE, spectrographe de masse 60

KAPITSA-TRIKKER, expérience de 35
KAUFMANN, expérience de 32, 33
KEPLER, lois de 164, 165, 166
—, problème de 162
KIRCHHOFF, loi de 253

LAGRANGE, équations de 170, 172, 173
—, fonction de 172, 188
LAPLACE, opérateur de 395
LARMOR, pulsation de 233, 236
—, théorème de 231
Laser à rubis 302
Lasers 302
LAUE, méthode de 108, 423
Localisation optique 303
Loi de conservation de l'énergie 135
— — de l'impulsion 142
— — de la masse relativiste 206
— de dispersion 395, 415
— de l'équivalence de la masse et de l'énergie 203
Lois de conservation 185, 187
— — et événements élémentaires de diffusion 376, 378
— de rayonnement d'un corps noir 255
LORENTZ-EINSTEIN, formule de 34, 36, 199
—, force de 235
—, formule de 34, 188
—, transformations de 194
LOUKIRSKI et PRILÉJAEV, expérience de 353
Lumière, diffraction 411
—, réfraction 404
LUMMER et PRINGSHEIM, modèle de corps noir idéal 257
LYMAN, série 309

Masers 302
Masse réduite 168
— relativiste 203, 206
— au repos 206
MENDELEÏEV, classification périodique des éléments d'après 38, 39, 43, 44
Méthode des lignes isochromatiques 356
— des paraboles 44
— de potentiel de freinage (ralentisseur) 277
MILLIKAN, expérience de 10, 11
Modèle de l'atome 92, 135, 230, 274
— de l'électron dans le métal 481
Moment dipolaire 209
— magnétique orbital 231, 232
MOSELEY, loi de 123
MÖSSBAUER, effet 381, 386
Mouvement dans un champ électromagnétique 16, 187
— — de forces centrales 160
— conventionnellement périodique 329
Mouvements de pendules couplés 503

Niveau de FERMI 482
— métastable 303
Niveaux d'énergie, diagrammes 325
Nombre d'AVOGADRO 130, 131
— d'onde 307
— quantique azimutal 332
— — principal 331
Nombres quantiques 330
Normalisation des fonctions propres 461, 494, 526
Numéro atomique 40, 41

Ondes de de Broglie 414, 416, 461, 462
— —, interprétation statistique 435
Orthogonalité des fonctions propres 478, 494, 526
Oscillateur anisotrope 329
—, énergie 217
—, — nulle 507
—, état normal 487, 492
—, états excités 492
— linéaire harmonique 149, 487
— non harmonique 214
—, rayonnement moyen 213
—, — total 212
Oscillateurs couplés 501
Oscillations browniennes 131
OUMOV-POYNTING, vecteur de 211, 467

Paquet d'ondes 399
Paramètre du choc 93
Particules α, diffusion 90, 92, 166
— —, propriétés 88
PASCHEN, série de 309
PFUND, série de 310
Photon 344
PICKERING, série de 319
PLANCK, constante de 271
—, détermination précise de la constante de 355
—, formule de 268, 295, 297
POISSON, crochets de 184
Postulats de la théorie de la relativité 191
Potentiel cinétique 172
— critique 281
— de freinage, méthode de 277, 351
— intérieur du métal 421
— d'ionisation 286
Pouvoir absorbant du corps 254
— émissif 254
Principe de combinaison 311
— de correspondance 336, 341
— de l'équilibre détaillé 295
— d'équivalence 390
Processus non périodiques 227
Pulsations normales (principales) 503

Quanta d'énergie 269
— de lumière 343, 348, 357
Quantification des orbites circulaires 313
— — elliptiques 328

Radiation de résonance 381
Raies spectrales, largeur naturelle 225
— — de résonance 290
RAYLEIGH-JEANS, formule de 261, 265, 297, 347
Rayon de la section efficace 86
Rayonnement des atomes excités 289
— caractéristique de rayons X 101, 102
— d'un corps noir 255
— électromagnétique 209
— — d'un oscillateur 209
— équilibré dans une enceinte close 252
— de freinage 100
— termique 249, 257
— de VAVILOV-CERENKOV 240
Rayons X 99
— —, absorption 102
— —, diffraction 99, 108, 114
— —, — suivant la méthode de LAUE 114, 115
— —, — — — de WULFF-BRAGG 115
— —, diffusion 103, 107
— —, longueur d'onde 119, 127
— —, spectre 121
Relation entre la masse et la vitesse 32, 196
Relations d'incertitude 437
— —, interprétations erronées 445
— — et principe de causalité 450
Relaxation, temps 217
RUTHERFORD, formule de 95
— et ROYDS, expérience de 90
RYDBERG, constante de 318

SCHRÖDINGER, équation de 454
Section efficace de diffusion 84
— —, rayon 86
Série de BALMER 306
— de FOURIER 155
— de PICKERING 319
Séries spectrales 306, 309
Seuil du spectre continu du côté des longueurs d'onde courtes 101
SKOBELTSYNE, méthode de 376, 380
SNELLIUS-DESCARTES, loi de 405
Spectre caractéristique de rayons X 101, 121
— continu limite 327
— — de rayons X 100
— de rayons X, longueur d'onde limite 354
Spectres des ions hydrogénoïdes 319
— de rayons X 121
Spectrographe à rayons X 117
Spectrographes de masse 48
Spectromètres de masse 55
STEFAN-BOLTZMANN, loi de 256
STOKES, loi de 14

STOLÉTOV, travaux sur l'effet photoélectrique de 349
Système de coordonnées du laboratoire 147

TARTAKOVSKI, expérience de 427
TCHÉBYCHEV-HERMITE, polynômes de 492
Température négative, 301
Temps de relaxation 217
Termes spectraux 311
Théorème du viriel 529
THOMSON G. P., expérience de 427
THOMSON J. J., méthode des paraboles de 60
Transformations de LORENTZ 191
Transitions forcées 291
— spontanées 291
Travail d'extraction 482
TRIKKER-KAPITSA, expérience de 35
TZAN et SPISS, expérience de 36

Valeurs moyennes 512
— propres 476
VAN DER WAALS, forces de 499
VAVILOV-CERENKOV, application de l'effet 247, 248
— —, rayonnement de 240
—, expérience de 359-362
Vecteur d'onde 414
Vibration d'une corde 472
VIEN, formule de 255, 344
—, loi de déplacement de 257
Viriel, théorème du 529
Vitesse aréolaire 161
— de groupe 398, 402
— de phase 398, 402

WULFF-BRAGG, formule de 117, 419, 422

YOUNG, expérience de 305

ZEEMAN, effet 234, 519, 520
— —, cas général 237

TABLE DES MATIÈRES

Préface 5

Chapitre I. ÉLECTRON, SA CHARGE ET SA MASSE 9

§ 1. Découverte de l'électron 9
§ 2. Détermination de la charge de l'électron 10
§ 3. Réalisation pratique de l'expérience de Millikan 11
§ 4. Mouvement de l'électron dans des champs électrique et magnétique 16
§ 5. Electron dans un champ électrostatique longitudinal 21
§ 6. Méthodes expérimentales de détermination de la charge spécifique 22
§ 7. Détermination de la charge spécifique de l'électron par la méthode de deux condensateurs 24
§ 8. Détermination de la charge spécifique de l'électron par la méthode de focalisation au moyen d'un champ magnétique longitudinal 26
§ 9. Focalisation et monochromatisation des faisceaux de particules chargées ... 29
§ 10. Dépendance de la masse de l'électron de sa vitesse 32

Chapitre II. ATOMES. ISOTOPES 38

§ 11. Introduction 38
§ 12. Classification périodique des éléments d'après D. Mendeleïev 38
§ 13. Détermination des masses vraies des atomes. Méthode des paraboles 44
§ 14. Spectrographes de masse 48
§ 15. Spectromètres de masse et spectrographes de masse à double focalisation ... 55
§ 16. Masses et pourcentage des isotopes 60
§ 17. Séparation des isotopes par la méthode de diffusion 61
§ 18. Séparation des isotopes par la méthode de diffusion thermique 67
§ 19. Séparation des isotopes à l'aide des méthodes électromagnétiques 72
§ 20. Séparation des isotopes par des méthodes de distillation fractionnée et des réactions d'échange 75
§ 21. Séparation des isotopes par la méthode de centrifugation 77
§ 22. Production de l'isotope lourd de l'hydrogène (deutérium) et de l'eau lourde 79

Chapitre III. STRUCTURE NUCLÉAIRE DE L'ATOME 84

§ 23. Section efficace de diffusion des particules 84
§ 24. Sondage des atomes par des électrons 87
§ 25. Propriétés des particules α 88
§ 26. Théorie de diffusion des particules α 92
§ 27. Vérification expérimentale de la formule de Rutherford 96
§ 28. Détermination de la charge du noyau 97

Chapitre IV. RAYONS X ET LEUR APPLICATION À LA DÉTERMINATION DES CONSTANTES ATOMIQUES 99

§ 29. Rayons X 99
§ 30. Absorption des rayons X 102
§ 31. Diffusion des rayons X 107
§ 32. Diffraction des rayons X par un réseau cristallin 108
§ 33. Réalisation expérimentale de la diffraction des rayons X 114
§ 34. Détermination de la longueur d'onde des raies spectrales de rayons X 120
§ 35. Spectres de rayons X 121
§ 36. Loi de Moseley 123
§ 37. Détermination de la longueur d'onde absolue des rayons X 127
§ 38. Détermination du nombre d'Avogadro et de la charge de l'électron 130
§ 39. Charge massique de l'électron 133

Chapitre V. STRUCTURE DE L'ATOME ET PHYSIQUE CLASSIQUE 135

A) MÉCANIQUE CLASSIQUE ET STRUCTURE DE L'ATOME .. 135

§ 40. Modèles d'atomes 135
§ 41. Loi de conservation de l'énergie en mécanique 135
§ 42. Diagrammes de potentiel 139
§ 43. Loi de conservation de l'impulsion 142
§ 44. Collisions 143
§ 45. Centre de masse (d'inertie) 147
§ 46. Oscillateur linéaire harmonique 149
§ 47. Représentation des oscillations sous forme complexe 152
§ 48. Décomposition spectrale 154
§ 49. Forces centrales. Energie cinétique en coordonnées polaires 159
§ 50. Mouvement dans un champ de forces centrales 160
§ 51. Le problème de Kepler 162
§ 52. Particule α dans le champ du noyau 166
§ 53. Masse réduite 168
§ 54. Coordonnées généralisées. Etat du système 170
§ 55. Fonction de Lagrange. Equations de Lagrange 170
§ 56. Application des équations de Lagrange au problème du mouvement dans un champ de forces centrales 173
§ 57. Impulsions généralisées 176
§ 58. Equations canoniques de Hamilton 178
§ 59. Contenu physique de la fonction de Hamilton 180
§ 60. Coordonnées cycliques 182
§ 61. Crochets de Poisson. Lois de conservation 184
§ 62. Mouvement dans un champ électromagnétique 187
§ 63. Mécanique des particules rapides. Transformations de Lorentz 191
§ 64. Fondements de la dynamique relativiste de la particule 196
§ 65. De la relation entre la masse et l'énergie 203

B) THÉORIE CLASSIQUE DU RAYONNEMENT ÉLECTROMAGNÉTIQUE 209

§ 66. Centres élémentaires d'émission de la lumière 209
§ 67. Rayonnement électromagnétique d'un oscillateur linéaire 209
§ 68. Rayonnement total et moyen de l'oscillateur 212
§ 69. Spectre électromagnétique d'un oscillateur non harmonique 214
§ 70. Amortissement des oscillations 216
§ 71. Frottement de rayonnement 218
§ 72. Intégrale de Fourier et spectre continu 221
§ 73. Largeur naturelle des raies spectrales 225
§ 74. Autres exemples de développement spectral des processus non périodiques 227

§ 75. Modèle planétaire de l'atome 230
§ 76. Moment magnétique orbital et théorème de Larmor 231
§ 77. Effet Zeeman 234
§ 78. Effet Zeeman. Cas général 237
§ 79. Rayonnement Vavilov-Cerenkov 240

Chapitre VI. RAYONNEMENT DU CORPS NOIR ET HYPOTHÈSE DU QUANTUM D'ÉNERGIE 249

§ 80. Physique classique et problème du rayonnement thermique 249
§ 81. Rayonnement équilibré dans une enceinte close 252
§ 82. Loi de Kirchhoff 253
§ 83. Lois de rayonnement d'un corps noir théorique 255
§ 84. Etude expérimentale des lois du rayonnement thermique 257
§ 85. Théorème d'équipartition de l'énergie suivant les degrés de liberté 259
§ 86. La formule de Rayleigh-Jeans 261
§ 87. « Catastrophe ultraviolette » 266
§ 88. Formule de Planck 268
§ 89. Hypothèse du quantum d'énergie 269

Chapitre VII. NIVEAUX D'ÉNERGIE DES ATOMES 274

§ 90. Modèle planétaire de l'atome et postulats quantiques de Bohr 274
§ 91. Expériences de Franck et de Hertz 275
§ 92. Collision élastique 278
§ 93. Collisions inélastiques. Potentiels critiques 280
§ 94. Perfections apportées à la méthode expérimentale 282
§ 95. Détermination simultanée de tous les niveaux d'excitation 283
§ 96. Mesure des potentiels d'ionisation 285
§ 97. Rayonnement des atomes excités 289
§ 98. Emission spontanée 291
§ 99. Absorption et émission forcée 294
§ 100. Déduction de la formule de Planck d'après Einstein 295
§ 101. Propriétés des émissions induites 298
§ 102. Sources lumineuses 302

Chapitre VIII. SÉRIES SPECTRALES ET NIVEAUX D'ÉNERGIE DE L'HYDROGÈNE ATOMIQUE 306

§ 103. Série de Balmer 306
§ 104. Séries de Lyman, de Paschen, etc. Formule généralisée de Balmer 309
§ 105. Termes spectraux. Principe de combinaison 311
§ 106. Quantification des orbites circulaires 313
§ 107. Théorie de Bohr 316
§ 108. Série de Pickering et spectres des ions hydrogénoïdes 319
§ 109. Application de la théorie précédente. Découverte de l'isotope lourd de l'hydrogène 322
§ 110. Détermination spectroscopique de la charge massique de l'électron 324
§ 111. Diagrammes des niveaux d'énergie 325
§ 112. Spectre continu limite de l'atome d'hydrogène 327
§ 113. Quantification de l'atome hydrogénoïde suivant Bohr et Sommerfeld 328
§ 114. Principe de correspondance 336
§ 115. Crise de la théorie de Bohr 341

Chapitre IX. QUANTA DE LUMIÈRE 343

§ 116. Fluctuations du champ de radiation 343
§ 117. Effet photoélectrique et relation d'Einstein 348
§ 118. Vérification expérimentale de la relation d'Einstein 351
§ 119. Longueur d'onde limite du spectre continu de rayons X 354

§ 120. Détermination précise de la constante de Planck 355
§ 121. Autres expériences dégageant la nature corpusculaire de la lumière 357
§ 122. Fluctuations du flux lumineux 359
§ 123. Diffusion des rayons X (théorie ondulatoire) 362
§ 124. Effet Compton 366
§ 125. Théorie élémentaire de l'effet Compton 369
§ 126. Les électrons de recul 373
§ 127. Evénements élémentaires de diffusion et lois de conservation 376
§ 128. Confirmation expérimentale de l'applicabilité des lois de conservation aux événements élémentaires de diffusion 378
§ 129. Effet Mössbauer 381
§ 130. Quelques applications de l'effet Mössbauer 386

Chapitre X. ONDES ET PARTICULES 392

§ 131. Introduction 392
§ 132. Onde monochromatique plane dans un milieu homogène 392
§ 133. Equation d'onde 395
§ 134. Superposition d'ondes planes 396
§ 135. Paquet d'ondes 399
§ 136. Vitesses de phase et de groupe 402
§ 137. Dualité onde-corpuscule. Réfraction de la lumière 404
§ 138. Dualité onde-corpuscule. Effet Doppler 409
§ 139. Dualité onde-corpuscule. Réseau de diffraction 411
§ 140. Hypothèse de de Broglie 412
§ 141. Propriétés des ondes de de Broglie 414
§ 142. Confirmation expérimentale de l'hypothèse de de Broglie. Méthode de Bragg 416
§ 143. Réfraction des ondes électroniques et potentiel intérieur du métal 421
§ 144. Confirmation expérimentale de l'hypothèse de de Broglie. Méthodes de Laue et de Debye-Scherrer 423
§ 145. Phénomènes d'interférences avec des faisceaux moléculaires et des neutrons 429
§ 146. Paquet d'ondes et particule 433
§ 147. Interprétation statistique des ondes de de Broglie 435
§ 148. Relations d'incertitude 437
§ 149. Détermination de la position et de l'impulsion de la microparticule 439
§ 150. Interprétations erronées des relations d'incertitude 445
§ 151. Relations d'incertitude et principe de causalité 450

Chapitre XI. ÉQUATION DE SCHRÖDINGER 454

§ 152. Equation de Schrödinger et contenu physique de ses solutions 454
§ 153. Réflexion et franchissement d'une barrière de potentiel 460
§ 154. Barrière de potentiel de largeur finie 468
§ 155. Vibration d'une corde 472
§ 156. Particule dans une boîte 476
§ 157. Electron dans un puits de potentiel 481
§ 158. Oscillateur linéaire harmonique 487
§ 159. Etats normal et excités de l'oscillateur linéaire 492
§ 160. Oscillateurs couplés. Forces de Van der Waals 499
§ 161. Particule dans une boîte à trois dimensions 507

ANNEXES 512

I. Calcul des valeurs moyennes 512
II. Distribution de Boltzmann dans le cas de systèmes quantiques 516
III. A propos de la théorie classique de l'effet Zeeman 519
IV. Formule de la fluctuation quadratique moyenne 521
V. Orthogonalité et normalisation des fonctions propres de l'oscillateur 526
VI. Théorème du viriel 529

INDEX 532

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur la traduction et la présentation de ce livre, ainsi que toute autre suggestion que vous voudriez formuler.

Ecrire à l'adresse :

Pervi Rijski péréoulok, 2,
Moscou, I-110, GSP, U. R. S. S.

Imprimé en Union Soviétique